
MB5002 NÜMERİK ANALİZ

Ders Notları

YRD. DOÇ. DR. EMEL YAVUZ DUMAN

İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR BÖLÜMÜ

© 2012, Emel Yavuz Duman
Tüm hakkı saklıdır.

Bu notlar Örgün Öğretimde Uzaktan Öğretim Desteđi (UDES) lisansı altındadır. Ders notlarına ulaşmak için <http://udes.iku.edu.tr/> internet adresine bakınız.

İlk yayınlanma: 2012, Ağustos
İkinci yayınlanma: 2013, Şubat

Yavuz Duman, Emel
İstanbul Kültür Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik-Bilgisayar Bölümü
MB5002 Nümerik Analiz
Ders Notları

Ataköy Kampüs
34156, Bakırköy
İstanbul - Turkey

e.yavuz@iku.edu.tr
<http://web.iku.edu.tr/~eyavuz/>

İçindekiler	3
Şekil Listesi	5
1 Ön Bilgiler ve Hata Analizi	7
1.1 Ön Bilgiler	7
1.1.1 Limit ve Süreklilik	7
1.1.2 Diferansiyellenebilme	8
1.1.3 İntegral	11
1.1.4 Taylor Polinomları ve Serileri	13
1.2 Yuvarlama Hataları ve Bilgisayar Aritmetiği	18
1.2.1 İki Tabanlı Makine Sayıları	18
1.2.2 Ondalık Makine Sayıları	20
1.3 Yakınsama Kavramı	25
1.3.1 Yakınsama Hızı	29
2 Tek Değişkenli Denklemlerin Çözümleri	33
2.1 İkiye Bölme Metodu	33
2.2 Sabit Nokta İterasyonu	39
2.2.1 Sabit Nokta İterasyonu	44
2.3 Newton, Secant ve Regula Falsi Metotları	51
2.3.1 Newton Metodu	51
2.3.1.1 Newton Metodunda Yakınsama	54
2.3.2 Secant Metodu	56
2.3.3 Regula Falsi Metodu	59
2.4 İteratif Metotlarda Hata Analizi	61
2.4.1 Yakınsamanın Mertebesi	61
2.4.2 Katlı Kök	66
2.5 Yakınsamaları Hızlandırmak	71
2.5.1 Aitken Δ^2 Metodu	71
3 İnterpolasyon ve Polinomsal Yaklaşımlar	75
3.0.2 Giriş	75
3.1 İnterpolasyon ve Lagrange Polinomu	76
3.1.1 Lagrange İnterpolasyon Polinomları	78
3.2 Veri Yaklaşımı ve Neville Metodu	87

3.2.1	Neville Metodu	89
3.3	Bölünmüş Farklar	94
3.3.1	İleri Farklar	102
3.3.2	Geri Farklar	103
3.3.3	Merkezi Farklar	106
4	Nümerik İntegral ve Diferansiyel	109
4.1	Nümerik Diferansiyel	109
4.1.1	Üç-Nokta Formülleri	112
4.1.2	Beş-Nokta Formülleri	114
4.1.3	İkinci Türev için Orta Nokta Formülü	117
4.1.4	Türev Hesabında Oluşan Yuvarlama Hataları	119
4.2	Nümerik İntegrasyonun Temelleri	121
4.2.1	Yamuk Kuralı	122
4.2.2	Simpson Kuralı	124
4.2.3	Newton-Cotes Formülleri	129
4.2.3.1	Kapalı Newton-Cotes Formülleri	129
4.2.3.2	Açık Newton-Cotes Formülleri	131
4.3	Bileşik Nümerik İntegrasyon	134
4.3.1	Bileşik İntegral Hesabında Oluşan Yuvarlama Hataları	139
Dizin		141

Şekil Listesi

1.1	Limit ifadesinin geometrik gösterilimi	7
1.2	Türev ifadesinin geometrik gösterilimi	9
1.3	Rolle teoremi	9
1.4	Ortalama değer teoremi	10
1.5	Ekstremum değer teoremi	10
1.6	Ara değer teoremi	11
1.7	Riemann integrali	12
1.8	İntegraller için ortalama değer teoremi	13
1.9	$y = \cos x$ ve $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ fonksiyonlarının grafikleri	15
1.10	Üstel ve lineer hatalar	25
2.1	İkiye bölme metodu	34
2.2	$f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$ fonksiyonunun grafiği	35
2.3	$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ fonksiyonunun grafiği	36
2.4	$y = x$ ve $y = x^2 - 2$ fonksiyonlarının grafikleri	41
2.5	Sabit noktaların varlığı ve teklifi	41
2.6	$y = (x^2 - 1)/3$ fonksiyonunun sabit noktaları	43
2.7	$g(x) = 3^{-x}$ fonksiyonunun sabit noktası	43
2.8	Sabit nokta iterasyonu	44
2.9	Newton metodu	52
2.10	$x = \cos x$ ve $y = x$ eğrilerinin grafikleri	53
2.11	Secant metodu	57
2.12	Regula Falsi metodu	60
2.13	$f(x) = e^x - x - 1$ fonksiyonunun grafiği	68
3.1	Polinom ile bir fonksiyona yaklaşma	76
3.2	$f(x) = e^x$ fonksiyonunun grafiği	77
3.3	$f(x) = -x + 6$ doğrusunun grafiği	79
3.4	$n + 1$ noktadan geçen Lagrange interpolasyon polinomu	79
3.5	$f(x) = 1/x$ ve $P(x) = \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}$ fonksiyonlarının grafikleri	81
4.1	Türev için ileri fark formülünün geometrik yorumu	110
4.2	Üç-nokta orta nokta formülünün geometrik yorumu	114
4.3	Yamuk kuralı	124
4.4	Simpson kuralı	125
4.5	Kapalı Newton-Cotes formülü	129

4.6 Açık Newton-Cotes formülü	131
---	-----

1 Ön Bilgiler ve Hata Analizi

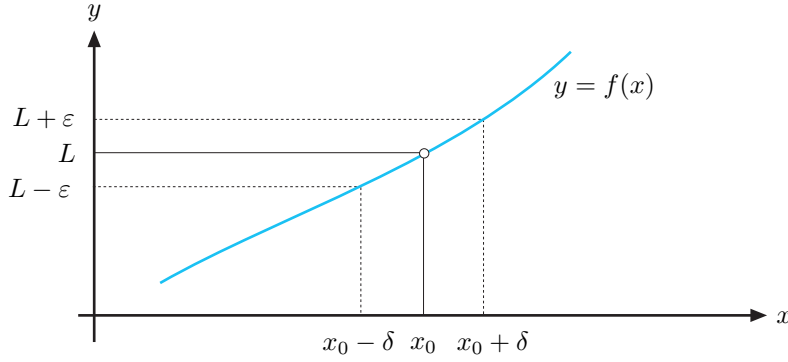
1.1 Ön Bilgiler

1.1.1 Limit ve Süreklilik

Tanım 1.1.1. f fonksiyonu bir X reel sayı cümlesi üzerinde tanımlanmış olsun. Her ε pozitif sayısına karşılık $0 < |x - x_0| < \delta$ ($x \in X$) olduğu müddetçe $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise bu durumda f fonksiyonun x_0 noktasında **limiti** L 'dir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

olarak yazılır (Bkz. Şekil 1.1).



Şekil 1.1: Limit ifadesinin geometrik gösterilimi

Tanım 1.1.2. f fonksiyonu bir X reel sayı cümlesi üzerinde tanımlanmış ve $x_0 \in X$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

eşitliği sağlanıyor ise f fonksiyonuna x_0 noktasında **süreklidir** denir. Eğer f fonksiyonu X cümlesinin her noktasında sürekli ise f fonksiyonu X **cümlesi üzerinde süreklidir** denir.

Bir X cümlesi üzerinde sürekli olan tüm fonksiyonların cümlesi $C(X)$ ile gösterilsin. Eğer X cümlesi reel sayı doğrusu üzerindeki bir aralık ise bu notasyonda parantezler ihmal edilecektir. Örneğin, $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli fonksiyonların cümlesi $C[a, b]$ olarak ifade edilir. Benzer şekilde \mathbb{R} , reel sayılar cümlesi üzerindeki her noktada sürekli olan fonksiyonların cümlesi $C(\mathbb{R})$ veya $C(-\infty, \infty)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.3. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ reel sayıların sonsuz bir dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n > N(\varepsilon)$ olduğu müddetçe $|x_n - x| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir $N(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı var ise bu dizinin limiti x 'dir (ya da dizi x 'e yakınsar) denir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{ya da} \quad n \rightarrow \infty \text{ için } x_n \rightarrow x$$

olarak gösterilir.

Teorem 1.1.4. f fonksiyonu bir X reel sayı cümlesi üzerinde tanımlanmış ve $x_0 \in X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- (a) f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir;
- (b) X içindeki herhangi bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ reel sayı dizisi x_0 'a yakınsıyor ise $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ eşitliği sağlanır.

Bir fonksiyonunun öngörülebilir davranışı için minimum beklenti, göz önüne alınan fonksiyonun sürekli olmasıdır. Dolayısıyla bu derste sürekli fonksiyonlar üzerinden yaklaşımlar yapılacaktır.

1.1.2 Diferansiyellenebilme

Tanım 1.1.5. f fonksiyonu x_0 noktasını içeren bir açık aralıkta tanımlanmış olsun. Eğer

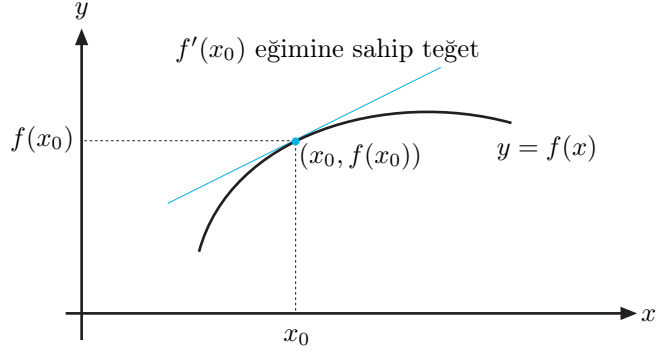
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti var ise f fonksiyonuna x_0 noktasında **diferansiyellenebilir** denir. $f'(x_0)$ değeri f fonksiyonunun x_0 noktasındaki **türevi** olarak adlandırılır. Bir X cümlesinin her noktasında türevi olan bir fonksiyona X **üzerinde diferansiyellenebilir** denir.

$f'(x_0)$ sayısı f fonksiyonuna $(x_0, f(x_0))$ noktasından çizilen teğetin eğimidir (Bkz. Şekil 1.2).

Teorem 1.1.6. f fonksiyonu x_0 noktasında diferansiyellenebilirse bu noktada aynı zamanda süreklidir.

Takip eden teoremler, hata tahminleri için geliştirilen metotlarda önemli yere sahiptirler. Buradan önceki ve sonraki teoremlerin ispatları Analiz derslerinde yapıldığından ispatlar Nümerik Analiz dersi müfredatı dahilinde değildir.

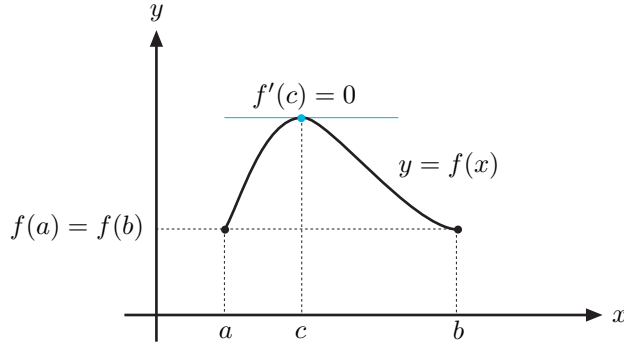


Şekil 1.2: Türev ifadesinin geometrik gösterilimi

X reel sayı cümlesi üzerinde n . mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonların cümlesi $C^n(X)$ ile, her mertebeden türeve sahip fonksiyonların cümlesi $C^\infty(X)$ ile gösterilsin. Polinom, rasyonel, trigonometrik, üstel ve logaritmik fonksiyonlar, X bu fonksiyonların tanımlı olduğu cümleyi göstermek üzere, $C^\infty(X)$ cümlesine aittirler. Daha önceden de vurgulandığı gibi X cümlesi reel sayı doğrusu üzerinde bir aralığı gösteriyor ise bu notasyonda parantezler ihmal edilecektir.

Teorem 1.1.7. (Rolle Teoremi)

$f \in C[a, b]$ ve f fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ eşitliği sağlanıyor ise $f'(c) = 0$ olacak şekilde (a, b) aralığında bir c sayısı vardır (Bkz. Şekil 1.3).



Şekil 1.3: Rolle teoremi

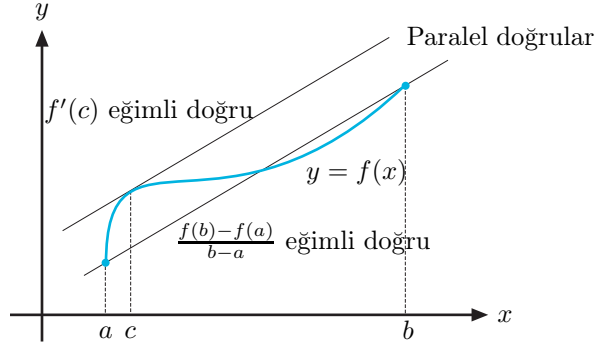
Teorem 1.1.8. (Ortalama Değer Teoremi)

$f \in C[a, b]$ ve f fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir olsun. Bu

durumda (a, b) aralığı içinde

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

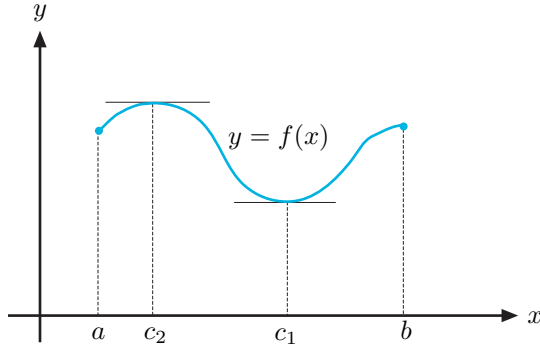
eşitliğini sağlayan bir c sayısı vardır (Bkz. Şekil 1.4).



Şekil 1.4: Ortalama değer teoremi

Teorem 1.1.9. (Ekstremum Değer Teoremi)

$f \in C[a, b]$ ise her $x \in [a, b]$ için $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ olacak şekilde $c_1, c_2 \in [a, b]$ sayıları vardır. Buna ek olarak eğer f fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir ise c_1 ve c_2 sayıları ya $[a, b]$ aralığının uç noktalarıdır ya da f' türevini sıfır yapan değerlerdir (Bkz. Şekil 1.5).



Şekil 1.5: Ekstremum değer teoremi

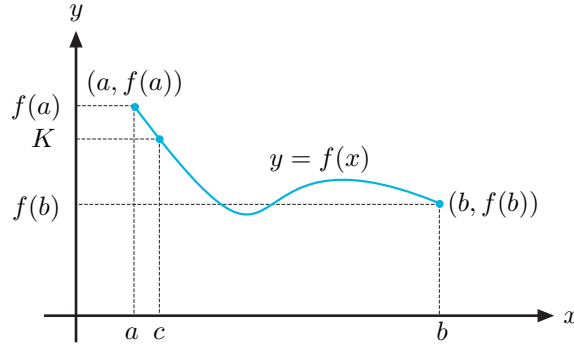
Teorem 1.1.10. (Genelleştirilmiş Rolle Teoremi)

$f \in C[a, b]$ fonksiyonu (a, b) aralığında n defa diferansiyellenebilir olsun. Eğer $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ gibi $(n + 1)$ tane farklı noktada f fonksiyonu

sıfır değerini alıyor ise (x_0, x_n) aralığı içinde ve dolayısıyla (a, b) aralığında $f^{(n)}(c) = 0$ eşitliğini sağlayan bir c sayısı vardır.

Teorem 1.1.11. (Ara Değer Teoremi)

$f \in C[a, b]$ ve K sayısı $f(a)$ ile $f(b)$ arasında herhangi bir sayı olsun. Buna göre (a, b) aralığında $f(c) = K$ eşitliğini sağlayan bir c sayısı vardır (Bkz. Şekil 1.6).



Şekil 1.6: Ara değer teoremi

Örnek 1.1.12. $x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ denkleminin $[0, 1]$ aralığında bir çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1$ fonksiyonu göz önüne alımsın. f fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında süreklidir ve

$$f(0) = -1 < 0 \quad \text{ve} \quad f(1) = 1 > 0$$

eşitliklerini gerçeğe çıkar. Dolayısıyla, Ara Değer Teoremi gereği $0 < x < 1$ aralığındaki bir x sayısı için $x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ eşitliği sağlanır.

Alıştırma 1.1.13. $x^5 - 3x^3 + 2x - 1 = 0$ denkleminin $[0, 2]$ aralığında bir çözümü olduğunu gösteriniz.

Alıştırma 1.1.14. $x - (\ln x)^x = 0$ denkleminin $[4, 5]$ aralığında bir çözümü olduğunu gösteriniz.

Alıştırma 1.1.15. $x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0$ denkleminin çözümlerini içeren aralıkları tespit ediniz.

1.1.3 İntegral

Tanım 1.1.16. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ olmak üzere $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ eşitsizliğini sağlayan x_0, x_1, \dots, x_n sayıları göz önüne alımsın ve $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında herhangi bir z_i sayısı seçilsin. Buna göre $[a, b]$

aralığında f fonksiyonunun **Riemann integrali** aşağıda belirtilen limitin varlığı durumunda

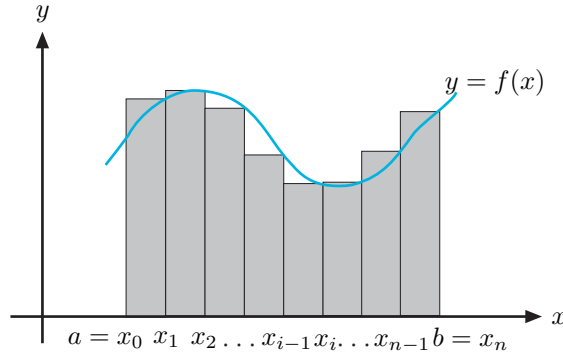
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(z_i)\Delta x_i$$

olarak tanımlanır.

$[a, b]$ aralığında sürekli olan f fonksiyonu aynı zamanda bu aralıkta Riemann integrallenebilirdir. Bu durum, hesapta kolaylık sağlaması bakımından, her $i = 1, 2, \dots, n$ için $[a, b]$ aralığındaki x_i noktalarını eşit aralıklı olarak $z_i = x_i$ şeklinde seçebilmemizi sağlar. Dolayısıyla, $x_i = a + i(b - a)/n$ olmak üzere yukarıda verilen integral tanımı

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

haline dönüşür (Bkz. Şekil 1.7).



Şekil 1.7: Riemann integrali

Teorem 1.1.17. (İntegaller için Ağırlıklı Ortalama Değer Teoremi)

$f \in C[a, b]$, $[a, b]$ üzerinde g fonksiyonunun Riemann integrali mevcut olsun ve bu kapalı aralıkta $g(x)$ işaret değiştirmesin. Buna göre (a, b) aralığında

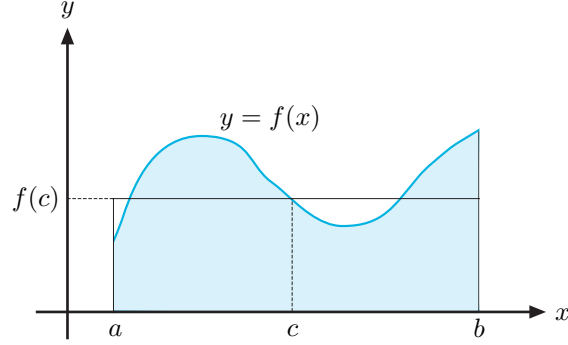
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

eşitliğini sağlayan bir c sayısı vardır.

$g(x) \equiv 1$ olması durumunda Teorem 1.1.17 ifadesi

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

şeklinde ifade edilen ve f fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığındaki **ortalama değerini** veren **İntegraller için Ortalama Değer Teoremi**'ne dönüşür (Bkz. Şekil 1.8).



Şekil 1.8: İntegraller için ortalama değer teoremi

1.1.4 Taylor Polinomları ve Serileri

Bu bölümün son teoremi Taylor polinomlarını ifade eden aşağıdaki teoremdir. Bu tip polinomlar nümerik analizde çokça kullanılırlar.

Teorem 1.1.18. (Taylor Teoremi)

$f \in C^n[a, b]$, $f^{(n+1)}$ türevi $[a, b]$ aralığında mevcut ve $x_0 \in [a, b]$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

ve her $x \in [a, b]$ için x_0 ile x arasında bir $\xi(x)$ sayısı

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

olmak üzere

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde mevcuttur.

Yukarıdaki biçimde tanımlanan $P_n(x)$ polinomuna f fonksiyonunun x_0 civarındaki **n . Taylor polinomu** ve $R_n(x)$ ifadesine de $P_n(x)$ ile ilişkili **kalan terim** (ya da **kesme hatası**) adı verilir. Kesme hatasındaki $\xi(x)$ sayısı $P_n(x)$ polinomunun civarında açıldığı x sayısına bağlı olduğundan x 'in bir fonksiyonudur. Taylor Teoremi en basit anlamda bu tip fonksiyonların varlığını ve değerlerinin x ile x_0 arasında olduğunu garantiler. Nümerik analiz konusu içerisindeki en yaygın problemlerden birisi, belirtilen aralık içerisindeki bir x sayısı için $f^{(n+1)}(\xi(x))$ ifadesine ait üst sınırı belirleme problemidir.

$n \rightarrow \infty$ için $P_n(x)$ 'in limitini almakla elde edilen sonsuz seri f fonksiyonunun x_0 civarındaki **Taylor serisi** olarak adlandırılır. $x_0 = 0$ olması durumunda Taylor polinomuna **Maclaurin polinomu** ve Taylor serisine de **Maclaurin serisi** adı verilir.

Taylor polinomundaki **kesme hatası** terimi, sonsuz bir seri toplamına sonlu yaklaşım yapılması sonucu oluşan kesme hatasını içerir.

Örnek 1.1.19. e^x fonksiyonunun $x_0 = 0$ civarında n . Taylor Polinomu $P_n(x)$ ise

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |e^x - P_n(x)| \leq 10^{-6}$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük n doğal sayısını bulunuz.

Çözüm. $f(x) = e^x$ fonksiyonunun her mertebeden sürekli türevleri vardır ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f^{(n)}(x) = e^x$ sağlanır. $x_0 = 0$ civarında $f(x)$ fonksiyonunun n . Taylor Polinomu açılımında oluşan hata, $\xi(x)$ sayısı 0 ile x arasında olmak üzere,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x-0)^{n+1} \right| = \left| \frac{e^{\xi(x)}}{(n+1)!} x^{n+1} \right|$$

ifadesi ile verilir. Burada, $0 \leq x \leq 1$ olduğundan $\xi(x)$ sayısı da 0 ile 1 arasında yer alır. Dolayısıyla

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |e^x - P_n(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} |R_n(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq \xi \leq 1} \left| \frac{e^{\xi(x)}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{e}{(n+1)!} \leq 10^{-6}$$

elde edilir. Buradan $e \times 10^6 = 2718281.828 \leq (n+1)!$ eşitsizliğini sağlayan en küçük n sayısının 9 olduğu sonucuna ulaşılır.

Örnek 1.1.20. $f(x) = \cos x$ ve $x_0 = 0$ olsun.

- (a) f fonksiyonunun x_0 civarında ikinci Taylor polinomunu; ve
- (b) f fonksiyonunun x_0 civarında üçüncü Taylor polinomunu

hesaplayınız.

Çözüm. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ olduğundan Taylor Teoremi her $n \geq 0$ için uygulanabilir. Ayrıca

$$f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \sin x \text{ ve } f^{(4)}(x) = \cos x$$

olduğundan

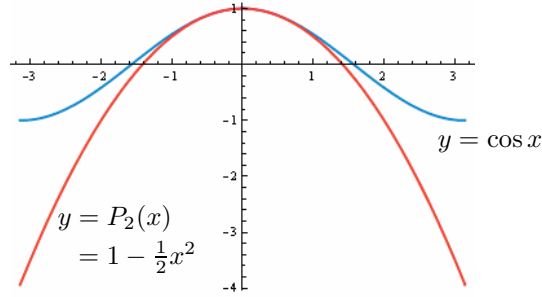
$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1 \text{ ve } f'''(0) = 0$$

elde edilir.

- (a) $n = 2$ ve $x_0 = 0$ için $f(x) = \cos x$ fonksiyonu, $\xi(x)$ sayısı genellikle bilinmeyen 0 ile x arasında bir sayı olmak üzere

$$\begin{aligned}\cos x &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(\xi(x))}{3!}(x-0)^3 \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \sin \xi(x)\end{aligned}$$

şeklinde bir açılıma sahiptir (Bkz. Şekil 1.9).



Şekil 1.9: $y = \cos x$ ve $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ fonksiyonlarının grafikleri

$x = 0.01$ olması durumunda

$$\cos 0.01 = 1 - \frac{1}{2}(0.01)^2 + \frac{1}{6}(0.01)^3 \sin \xi(0.01) = 0.99995 + \frac{10^{-6}}{6} \sin \xi(0.01)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\cos 0.01$ değeri verilen Taylor polinomuyla yapılan yaklaşım ile 0.99995 olarak bulunur. Bu yaklaşımın kesme hatası ya da diğer ismi ile kalan terimi

$$\frac{10^{-6}}{6} \sin \xi(0.01) = 0.1\bar{6} \times 10^{-6} \sin \xi(0.01)$$

olarak hesaplanır. $\sin \xi(0.01)$ ifadesini hesaplamak mümkün olmamasına karşın sinüs fonksiyonunun tüm değerlerini $[-1, 1]$ aralığında aldığı bilindiğinden $\cos 0.01$ ifadesi için yapılan yaklaşımda oluşan hata

$$|\cos 0.01 - 0.99995| = 0.1\bar{6} \times 10^{-6} \underbrace{|\sin \xi(0.01)|}_{\leq 1} \leq 0.1\bar{6} \times 10^{-6}$$

sayısı ile sınırlıdır. Buna göre 0.99995 yaklaşık değeri ile $\cos 0.01$ 'in gerçek değerinin en az ilk beş ondalığı aynıdır ve

$$\begin{aligned}0.999948\bar{3} &= 0.99995 - 0.1\bar{6} \times 10^{-6} \leq \cos 0.01 \\ &\leq 0.99995 + 0.1\bar{6} \times 10^{-6} = 0.9999501\bar{6}\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Gerçekte, hata için bulunan üst sınır gerçek hatadan çok daha büyük olabilir. Bu durum $|\sin \xi(x)|$ için kullanılan sınırın zayıflığından kaynaklanmaktadır. Eğer her $x \in \mathbb{R}$ için $|\sin x| \leq x$ olduğu kullanılırsa $0 \leq \xi(x) < 0.01$ eşitliğinden $|\sin \xi(x)| \leq 0.01$ elde edilir ki bu ise oluşan hata için bir sınırın 0.16×10^{-8} olduğu sonucunu verir.

- (b) $f'''(0) = 0$ olduğundan $\cos x$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ civarında üçüncü Taylor polinomunu kalan terimi ile $0 < \tilde{\xi}(x) < 0.01$ için

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \cos \tilde{\xi}(x)$$

şeklinde elde edilir. (a) şıkında elde edilen $P_2(x)$ polinomu ile $P_3(x)$ polinomu aynı olduğundan $\cos 0.01$ değeri için yapılan yaklaşım yine 0.99995 olarak bulunur. Fakat üçüncü Taylor polinomu kullanılarak yapılan yaklaşımda oluşan hata sınırı, ikinci Taylor polinomu kullanılarak yapılan yaklaşımda oluşan hata sınırından daha küçüktür. Gerçekten, her x değeri için $|\cos x| \leq 1$ olduğu kullanılırsa

$$\left| \frac{1}{24}x^4 \cos \tilde{\xi}(x) \right| \leq \frac{1}{24}(0.01)^4 = 0.41\bar{6} \times 10^{-9}$$

sonucuna ulaşılır. Yani

$$|\cos 0.01 - 0.99995| \leq 0.41\bar{6} \times 10^{-9}$$

ve

$$\begin{aligned} 0.999949999583 &= 0.99995 - 0.41\bar{6} \times 10^{-9} \leq \cos 0.01 \\ &\leq 0.99995 + 0.41\bar{6} \times 10^{-9} = 0.999950000417 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Gerçek değerlerin bilinmemesi durumunda yapılan bir yaklaşımın hassaslığının saptanması, oluşan hatanın üst sınırı ile belirlendiğinden küçük bir üst sınır tespit etmek yaklaşımın güvenilirliğinin ortaya konması bakımından önem taşımaktadır. Zira, bulunan bu üst sınır gerçek hata değerine eşit ya da ondan büyük olacaktır.

Alıştırma 1.1.21. $f(x) = \ln x$ ve $x_0 = 1$ olsun.

- (a) x_0 civarında f fonksiyonunun ikinci Taylor polinomunu kalan terimi ile birlikte hesaplayınız. Bu polinomu kullanarak $\ln 1.1$ için bir yaklaşık değer bulunuz. Yaklaşımda oluşan hata için bir üst sınır hesaplayınız.
- (b) (a) şikkını üçüncü Taylor polinomu için tekrarlayınız.

Üstel ve trigonometrik fonksiyonlar gibi türevi alınabilen sürekli fonksiyonlar için, sonlu sayıda terim kullanılarak yapılan yaklaşımlar tam doğru bir sonuç vermez. Eklenecek her terim küçük de olsa yaklaşımın iyileşmesine katkıda bulunur. Polinoma sonsuz sayıda terim eklenirse tam doğru sonuç elde edilir.

Örnek 1.1.22. Örnek 1.1.20'de elde edilen üçüncü Taylor polinomunu ve kalan terimini kullanarak

$$\int_0^{0.1} \cos x dx$$

integralini yaklaşık olarak hesaplayınız ve bu yaklaşımda oluşan hata için bir üst sınır belirleyiniz.

Çözüm. Örnek 1.1.20'de elde edilen üçüncü Taylor polinomu hata terimi ile birlikte integre edilirse

$$\begin{aligned} \int_0^{0.1} \cos x dx &= \int_0^{0.1} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx + \frac{1}{24} \int_0^{0.1} x^4 \cos \tilde{\xi}(x) dx \\ &= \left[x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^{0.1} + \frac{1}{24} \int_0^{0.1} x^4 \cos \tilde{\xi}(x) dx \\ &= 0.1 - \frac{1}{6}(0.1)^3 + \frac{1}{24} \int_0^{0.1} x^4 \cos \tilde{\xi}(x) dx \end{aligned}$$

yani

$$\int_0^{0.1} \cos x dx \approx 0.1 - \frac{1}{6}(0.1)^3 = 0.0998\bar{3}$$

elde edilir. Bu hesaptaki hata için bir sınır her x için $|\cos \tilde{\xi}(x)| \leq 1$ eşitliğinin kalan teriminin integralinde kullanılması ile

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{24} \int_0^{0.1} x^4 \cos \tilde{\xi}(x) dx \right| &\leq \frac{1}{24} \int_0^{0.1} x^4 \underbrace{|\cos \tilde{\xi}(x)|}_{\leq 1} dx \\ &\leq \frac{1}{24} \int_0^{0.1} x^4 dx = \frac{1}{24} \frac{(0.1)^5}{5} = 8.\bar{3} \times 10^{-8} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. İstenen integralin gerçek değeri

$$\int_0^{0.1} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{0.1} = \sin 0.1 \approx 0.099833416647$$

olduğundan bu yaklaşımdaki gerçek hata

$$|0.099833416647 - 0.0998\bar{3}| = 8.3314 \times 10^{-8}$$

dir ve bu sonuç hata için bulunan üst sınırdan daha küçüktür.

Alıştırma 1.1.23. $x_0 = 1$ civarında $f(x) = \ln x$ fonksiyonunun kalan terimi ile birlikte üçüncü Taylor polinomunu kullanarak

$$\int_1^{1.1} \ln x dx$$

integralini yaklaşık olarak hesaplayınız ve bu yaklaşımda oluşan hata için bir üst sınır belirleyiniz.

Alıştırma 1.1.24. (a) $x_0 = 0$ civarında $f(x) = e^x \cos x$ fonksiyonunun kalan terimi ile birlikte $P_2(x)$ ikinci Taylor polinomunu yazınız.

(b) $P_2(x)$ polinomunu kullanarak $f(0.5)$ değerine bir yaklaşım yapınız. Ayrıca

$$|f(0.5) - P_2(0.5)|$$

ifadesi için bir üst sınır hesaplayınız ve bulduğunuz bu değeri gerçek hata ile karşılaştırınız.

(c) $[0, 1]$ aralığındaki x değerleri için $|f(x) - P_2(x)|$ ifadesine ait bir üst sınır belirleyiniz.

(d) $\int_0^1 P_2(x)dx$ değerini kullanarak $\int_0^1 f(x)dx$ integrali için bir yaklaşım bulunuz.

(e) (d) şıkında verilen yaklaşımda oluşan hata için bir üst sınır belirleyiniz.

1.2 Yuvarlama Hataları ve Bilgisayar Aritmetiği

Her ne kadar nümerik teknikler analitik çözüme yakın sonuçlar verse de bir yaklaşım içerdiğinden arada bir fark, hata vardır. Temel olarak sayısal hatalar iki türdür. Bunlardan ilki Bölüm 1.1'de anlatılan ve sayısal yöntemlerde, matematik işlemler sonucunda elde edilen gerçek değerleri ifade etmek için kullanılan yaklaşımlar sonucu oluşan farklılıklardan doğan **kesme hataları**dır. Bir diğer hata çeşidi olan **yuvarlama hataları** bilgisayarın büyüklükleri sadece belirli sayıda haneyle gösterebilmesinden kaynaklanır. Örneğin birbirini tekrar etmeyen sonsuz sayıda ondalık kısım içeren π transandant sayısını ifade etmek için bu sayının sonlu sayıda ondalığını içeren bir kısmı göz önüne alındığında yuvarlama hatası yapılmış olur. Bunların dışında insanın kendisinden kaynaklanan, fiziksel veya matematiksel bir modelin oluşturulmasında, işlem yaparken veya program yazarken yapılan veya denklemlerin katsayılarını belirlemek amacı ile yapılan deneylerde ölçümlerde kullanılan aletlerin hassaslığına bağlı olarak oluşan giriş verisi hataları da söz konusudur. Bu tip hatalar müfredat dışıdır.

1.2.1 İki Tabanlı Makine Sayıları

Bilgisayarda tam sayıların ifade edilmesi için kullanılan özel bir yöntem yoktur. Tam sayılar ikili sayı sistemi kullanılarak ifade edilirler. Burada önemli olan bir nokta, sayıların ifade edilmesinde kullanılan bit sayısının, gösterilebilecek maksimum tam sayı değerini kısıtlamasıdır. Örneğin 16 bit kullanılarak yazılabilecek en büyük sayı $2^{16} = 65536$ olmaktadır. Eğer bu 16 bitin bir tanesini işaret için kullanarak sayıyı ifade etmeye kalkarsak $2^{(16-1)} = 32768$ değeri elde edilecektir. Eğer tam sayı gösteriminde işaret biti kullanılıyorsa **işaretli tam sayı** (signed integer), kullanılmıyorsa **işaretsiz tam sayı** (unsigned integer) adını alır. Tam sayı gösteriminde limitler aşılsa **taşma** (overflow, underflow) problemi ile karşılaşılır.

dir. Buna göre bizim orijinal makine sayımız sadece 27.56640625 değerini göstermekle kalmayıp yukarıda verilen kendisinden bir büyük ve bir küçük sayının işaret etmiş olduğu sayılarla sınırlı aralıkta yer alan tüm sayıları göstermektedir.

Bu formatta ifade edilebilecek

(i) en küçük pozitif sayı: $s = 0$, $c = 1$ ve $f = 0$ için

$$2^{-1022}(1 + 0) \approx 0.22251 \times 10^{-307},$$

(ii) en büyük sayı: $s = 0$, $c = 2046$ ve $f = 1 - 2^{-52}$ için

$$2^{1023}(2 - 2^{-52}) \approx 0.17977 \times 10^{309}$$

olduğundan eğer hesaplamalar sonucu elde edilen sayı $2^{-1022}(1 + 0)$ 'den büyük ise aşağı-taşma, $2^{1023}(2 - 2^{-52})$ sayısından büyük ise yukarı-taşma yaşanacağından hesaplamamızın belirli bir hassaslık ile yapılmaması durumunda prosedür kesintiye uğrayacaktır. Ayrıca, sıfır sayısı için iki türlü gösterilim vardır: pozitif sıfır için $s = 0$, $c = 0$ ve $f = 0$; negatif sıfır için $s = 1$, $c = 0$ ve $f = 0$.

1.2.2 Ondalık Makine Sayıları

Bu bölümde, her $i = 2, \dots, k$ için $1 \leq d_1 \leq 9$ ve $0 \leq d_i \leq 9$ olmak üzere

$$\pm 0.d_1d_2 \dots d_k \times 10^n$$

olarak ifade edilen k -dijit **normalize edilmiş ondalık kayan-nokta formundaki** sayılar ile ilgileneceğiz.

Nümerik olarak makinede bir taşmaya neden olmayan, normalize edilmiş pozitif

$$y = 0.d_1d_2 \dots d_kd_{k+1}d_{k+2} \dots \times 10^n$$

sayısı göz önüne alınsın. y sayısının kayan nokta formu $fl(y)$ ile gösterilir ve ondalık kısmının sadece k -dijit olarak alınması ile elde edilir. Bu k -dijitin belirlenmesinde genel olarak iki yöntem takip edilir. Bunlardan ilki **kesme** denen ve $d_{k+1}d_{k+2} \dots$ ondalıklarının atılması ile elde edilen

$$fl(y) = 0.d_1d_2 \dots d_k \times 10^n$$

sayıdır. Bir diğeri ise **yuvarlama** adı verilen ve $5 \times 10^{n-(k+1)}$ sayısının y 'ye eklenmesi sonrasında kesme yapılması ile elde edilen

$$fl(y) = 0.\delta_1\delta_2 \dots \delta_k \times 10^n$$

sayıdır. Kısaca yuvarlama yaparken $d_{k+1} \geq 5$ ise $fl(y)$ 'yi elde etmek için d_k sayısına 1 eklenirken (yukarı yuvarlama), $d_{k+1} < 5$ ise k -dijitten sonra kesme yapılır (aşağı yuvarlama). Eğer aşağı yuvarlama yapılıyor ise her $i = 1, 2, \dots, k$ için $\delta_i = d_i$ olur. Bununla beraber, yukarı yuvarlama yapılması durumunda tam kısım da dahil olmak üzere tüm ondalık basamaklar değişebilir.

Sayı	Normalize Edilmiş Ondalık Form
1222000	0.1222×10^7
-0.0000345	-0.345×10^{-4}
0.0027×10^{-3}	0.27×10^{-5}
-3687.487×10^8	$-0.3687487 \times 10^{12}$
0.1001×10^{-5}	0.1001×10^{-5}
$9.26539874 \times 10^{-21}$	$0.926539874 \times 10^{-20}$

Örnek 1.2.2. İrrasyonel π sayısının beş-dijit (a) kesme ve (b) yuvarlama değerlerini elde ediniz.

Çözüm. $\pi = 3.141592654 \dots$ şeklinde kendini tekrar etmeyen sonsuz ondalığa sahip π sayısı normalize edilerek

$$\pi = 0.3141592654 \dots \times 10^1$$

olarak yazılsın. Buna göre

(a) beş-dijit kesme yapılarak π sayısının kayan-nokta formu

$$fl(\pi) = 0.31415 \times 10^1 = 3.1415,$$

(b) sayının altıncı basamağı 9 olduğundan beş-dijit yuvarlama yapılarak π sayısının kayan-nokta formu

$$fl(\pi) = (0.31415 + 0.00001) \times 10^1 = 3.1416$$

olarak elde edilir.

Tanım 1.2.3. p sayısına bir yaklaşım p^* olsun. Bu durumda $|p - p^*|$ farkına **mutlak hata** ve $p \neq 0$ olmak üzere $\left| \frac{p-p^*}{p} \right|$ oranına ise **bağıl hata** adı verilir.

Örnek 1.2.4. Aşağıda verilen p değerlerine yapılan p^* yaklaşımlarında oluşan mutlak ve bağıl hataları hesaplayınız.

(a) $p = 0.3000 \times 10^1$, $p^* = 0.3100 \times 10^1$;

(b) $p = 0.3000 \times 10^{-3}$, $p^* = 0.3100 \times 10^{-3}$;

(c) $p = 0.3000 \times 10^4$, $p^* = 0.3100 \times 10^4$.

Çözüm.

(a) Mutlak hata: $|p - p^*| = |0.3000 \times 10^1 - 0.3100 \times 10^1| = 0.1$

Bağıl Hata: $\frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{0.1}{0.3000 \times 10^1} = 0.333\bar{3} \times 10^{-1}$;

(b) Mutlak hata: $|p - p^*| = |0.3000 \times 10^{-3} - 0.3100 \times 10^{-3}| = 0.1 \times 10^{-4}$

Bağıl Hata: $\frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{0.1 \times 10^{-4}}{0.3000 \times 10^{-3}} = 0.333\bar{3} \times 10^{-1}$;

- (c) Mutlak hata: $|p - p^*| = |0.3000 \times 10^4 - 0.3100 \times 10^4| = 0.1 \times 10^3$
Bağıl Hata: $\frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{0.1 \times 10^3}{0.3000 \times 10^4} = 0.333\bar{3} \times 10^{-1}$.

Yukarıdaki örnekte görüldüğü üzere tüm yaklaşımlarda bağıl hata $0.333\bar{3} \times 10^{-1}$ iken mutlak hata farklı değerler almaktadır. Yapılan yaklaşımda gerçek değere ne oranda yaklaşıldığını ölçmek bakımından bağıl hata mutlak hataya göre daha anlamlıdır. Örneğin 100 km'lik bir yolu 101 km ve 1 km'lik yolu 2 km ölçmede oluşan mutlak hatalar 1 km iken bu ölçümlerin hangisinin daha kabul edilebilir bir hata oranına sahip olduğunu anlamak için bağıl hatalarına bakmak gerekir.

Örnek 1.2.5. (a) $f(x) = \cos x - (x + 1)^2$ fonksiyonunun $x = 0$ civarında üçüncü Taylor polinomunu hata terimini göz ardı ederek hesaplayınız.

- (b) Eğer yukarıda bulunan polinom 5-dijit yuvarlama artimetigi ile $f(0.05)$ değerini hesaplamak için kullanılırsa oluşacak mutlak ve bağıl hatayı tespit ediniz.

Çözüm.

- (a) Hata terimi yazılmayacağından üçüncü Taylor polinomunu hesaplamak için aşağıdaki işlemler yapılır:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x - (x + 1)^2, & f(0) &= \cos 0 - (0 + 1)^2 = 0, \\ f'(x) &= -\sin x - 2(x + 1), & f'(0) &= -\sin 0 - 2(0 + 1) = -2, \\ f''(x) &= -\cos x - 2, & f''(0) &= -\cos 0 - 2 = -3, \\ f'''(x) &= \sin x, & f'''(0) &= 0. \end{aligned}$$

Buna göre

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x - 0) + \frac{f''(0)}{2!}(x - 0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x - 0)^3 \\ &= 0 + \frac{-2}{1!}x + \frac{-3}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 \\ &= -2x - \frac{3}{2}x^2 \end{aligned}$$

olarak üçüncü Taylor polinomunu hesaplanır.

- (b) 5-dijit yuvarlama artimetigi kullanılarak yapılan bu yaklaşımda

$$P_3(0.05) = -2(0.05) - \frac{3}{2}(0.05)^2 = -0.10375$$

olarak elde edilir. Buna göre mutlak hata

$$\begin{aligned} |f(0.05) - P_3(0.05)| &= |\cos(0.05) - (0.05 + 1)^2 - (-0.10375)| \\ &= 2.6039 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

ve bağıl hata da

$$\frac{|f(0.05) - P_3(0.05)|}{|f(0.05)|} = \frac{|\cos(0.05) - (0.05 + 1)^2 - (-0.10375)|}{|\cos(0.05) - (0.05 + 1)^2|} \\ = 2.5098 \times 10^{-6}$$

şeklinde bulunur. Mutlak hatanın bağıl hatadan daha küçük çıkmasının nedeni yapılan yaklaşımın gerçek fonksiyon değerine çok yakın olmasıdır.

Tanım 1.2.6.

$$\frac{|p - p^*|}{|p|} \leq 5 \times 10^{-t}$$

eşitsizliğini sağlayan, negatif olmayan en büyük t pozitif tam sayısı için p^* , p 'ye t **anlamli basamak**ta bir yaklaşımdır denir.

Verilen bir sayının anlamli basamakları aşağıdaki şekilde tespit edilir:

- Tüm sıfırdan farklı sayılar anlamli basamaktır:
4 sayısının bir anlamli basamağı vardır.
1.3 sayısının iki anlamli basamağı vardır.
320 sayısının iki anlamli basamağı vardır.
4325.334 sayısının yedi anlamli basamağı vardır.
- Tüm anlamli basamaklar arasında kalan sıfırlar anlamli basamaklardır:
109 sayısının üç anlamli basamağı vardır.
3.005 sayısının dört anlamli basamağı vardır.
40.001 sayısının beş anlamli basamağı vardır.
- Ondalık bir sayıda ondalık noktasının sağında yer alan tüm sayılar anlamli basamaklardır:
0.10 sayısının iki anlamli basamağı vardır (ilk sıfır anlamli değildir, fakat sondaki sıfır anlamlidir).
0.0010 sayısının iki anlamli basamağı vardır (sondaki bir ve sıfır).
3.20 sayısının üç anlamli basamağı vardır.
14.3000 sayısının altı anlamli basamağı vardır.
400.00 sayısının beş anlamli basamağı vardır (ondalık noktasının solunda yer alan iki sıfır anlamli olduğu bilinen 4 sayısının sağında olduğundan anlamlidir, ayrıca ondalık noktasının sağında yer alan sıfırlar 4 ile sıfır arasında yer aldığından anlamlidir).

x sayısının k -dijit kayan nokta formu $fl(x)$ ile gösterilsin. $fl(x)$ sayısının yuvarlama aritmetiği kullanılarak elde edilmesi durumunda yaklaşımda oluşan bağıl hatanın bir üst sınırı

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq 0.5 \times 10^{-k+1}$$

dir. Gerçekten: $d_1 \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere x sayısı

$$x = 0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n$$

şeklinde verilsin.

- $d_{k+1} < 5$ olsun: Bu durumda $fl(x) = 0.d_1d_2 \cdots d_k \times 10^n$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{|x - fl(x)|}{|x|} &= \frac{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n - 0.d_1d_2 \cdots d_k \times 10^n|}{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n|} \\ &= \frac{|0.d_{k+1}d_{k+2} \cdots \times 10^{n-k}|}{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n|} \leq \frac{0.5 \times 10^{-k}}{0.1} = 0.5 \times 10^{-k+1} \end{aligned}$$

bulunur.

- $d_{k+1} \geq 5$ olsun: Bu durumda $fl(x) = (0.d_1d_2 \cdots d_k) \times 10^n - 10^{n-k}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{|x - fl(x)|}{|x|} &= \frac{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n - (0.d_1d_2 \cdots d_k) \times 10^n - 10^{n-k}|}{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n|} \\ &= \frac{|0.d_{k+1}d_{k+2} \cdots \times 10^{n-k} - 10^{n-k}|}{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n|} \\ &= \frac{|(1 - 0.d_{k+1}d_{k+2} \cdots) \times 10^{n-k}|}{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n|} \\ &\leq \frac{0.5 \times 10^{-k}}{0.1} = 0.5 \times 10^{-k+1} \end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan k -dijit kesme aritmetiği kullanılarak $fl(x)$ sayısının elde edilmesi durumunda oluşacak bağıl hata için bir üst sınır aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{aligned} \frac{|x - fl(x)|}{|x|} &= \frac{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n - 0.d_1d_2 \cdots d_k \times 10^n|}{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n|} \\ &= \frac{|0.d_{k+1}d_{k+2} \cdots \times 10^{n-k}|}{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n|} \\ &= \frac{|0.d_{k+1}d_{k+2} \cdots|}{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots|} \times 10^{-k}. \end{aligned}$$

Diğer taraftan $d_1 \neq 0$ olduğundan paydamm alabileceği minimum değer 0.1'dir. Ayrıca pay üstten 1 ile sınırlı olduğundan

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{0.1} \times 10^{-k} = 10^{-k+1}$$

şeklinde bir üst sınır elde edilir.

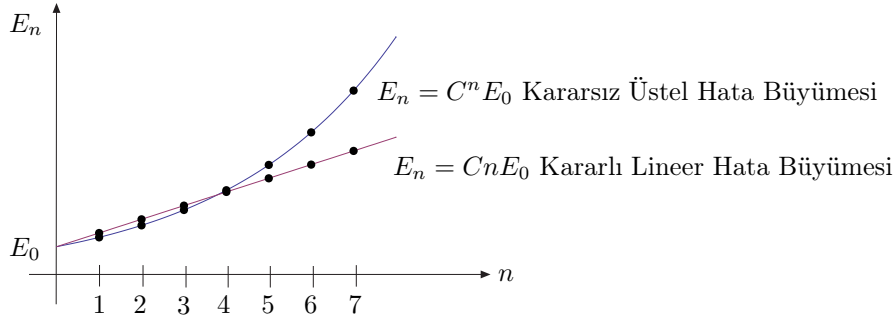
1.3 Yakınsama Kavramı

Tanım 1.3.1. Yapılan bir hesabın herhangi bir adımında oluşan hata $E_0 > 0$ ile, bu adımı takip eden n adım sonrasında oluşan hatanın büyüklüğü ise E_n ile gösterilsin.

- C sayısı n 'den bağımsız bir sabit olmak üzere $E_n \approx CnE_0$ sağlanıyor ise hatanın büyümesi **lineer**dir,
- $C > 1$ olmak üzere $E_n \approx C^n E_0$ sağlanıyor ise hatanın büyümesi **üsteldir**

denir.

Tanımdan da anlaşılacağı üzere bir algoritmada hatanın lineer büyümesi genellikle kabul edilebilir bir durum iken üstel büyümeye sahip bir algoritma kullanılarak yaklaşımda bulunmaktan kaçınmak gerekir. Dolayısıyla lineer hataya sahip bir yaklaşım **kararlı**, üstel hataya sahip bir yaklaşım ise **kararsız** yapıdadır (Bkz. Şekil1.10).



Şekil 1.10: Üstel ve lineer hatalar

Örnek 1.3.2. c_1 ve c_2 reel sabitler olmak üzere $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi her $n = 0, 1, \dots$ için

$$p_n = c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^n + c_2 3^n$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre

- (a) $\{p_n\}$ dizisinin $n = 2, 3, \dots$ için

$$p_n = \frac{10}{3}p_{n-1} - p_{n-2}$$

şeklinde tanımlanan rekürsif denklemin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

- (b) $p_0 = 1$ ve $p_1 = 1/3$ olarak verilmesi durumunda c_1 ve c_2 sabitlerini tespit ediniz.

- (c) c_1 ve c_2 için (b)'de bulunan değerleri kullanarak p_n ifadesini daha sade bir biçimde ifade ediniz.
- (d) (b)'de verilen p_0 ve p_1 değerlerine karşılık c_1 ve c_2 sabitlerini tespit etmek için beş-dijit yuvarlama algoritması uygulandığında oluşan hatanın karakteristiğini araştırınız.

Çözüm.

- (a) Verilen ifade, denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{10}{3}p_{n-1} - p_{n-2} &= \frac{10}{3} \left(c_1 \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} + c_2 3^{n-1} \right) - \left(c_1 \left(\frac{1}{3} \right)^{n-2} + c_2 3^{n-2} \right) \\
&= c_1 \left(\frac{1}{3} \right)^{n-2} \left(\frac{10}{3} \times \frac{1}{3} - 1 \right) + c_2 3^{n-2} \left(\frac{10}{3} \times 3 - 1 \right) \\
&= c_1 \left(\frac{1}{3} \right)^{n-2} \left(\frac{1}{9} \right) + c_2 3^{n-2} (9) \\
&= c_1 \left(\frac{1}{3} \right)^n + c_2 3^n = p_n.
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre istenen sağlanmış olur.

- (b) $p_0 = 1$ ve $p_1 = \frac{1}{3}$ olsun. Dolayısıyla sabitler

$$\begin{aligned}
p_0 = 1 &\Rightarrow n = 0 : 1 = c_1 + c_2 \\
p_1 = \frac{1}{3} &\Rightarrow n = 1 : \frac{1}{3} = \frac{1}{3}c_1 + 3c_2 \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 0
\end{aligned}$$

şeklinde tek türlü belirli olarak elde edilirler.

- (c) Verilen dizi yukarıda bulunan sabit değerleri kullanılarak

$$p_n = \left(\frac{1}{3} \right)^n = 3^{-n}$$

olarak en sade halde yazılabilir.

- (d) Şimdi dizinin terimlerinin beş-dijit yuvarlama aritmetiği kullanılarak yazıldığını varsayalım. Buna göre $p_0^* = 1.0000$ ve $p_1^* = 0.33333$ 'dür ve bu durumda sabitler $c_1^* = 1.0000$ ve $c_2^* = -0.12500 \times 10^{-5}$ şeklinde elde edilir. Gerçekten:

$$\begin{aligned}
p_0^* = 1.0000 &\Rightarrow n = 0 : 1.0000 = c_1^* + c_2^* \\
p_1^* = 0.33333 &\Rightarrow n = 1 : 0.33333 = \frac{1}{3}c_1^* + 3c_2^*
\end{aligned}$$

olduğundan

$$c_1^* = 1.0000 - c_2^* \Rightarrow 0.33333 = \frac{1}{3}(1.0000 - c_2^*) + 3c_2^* \Rightarrow$$

$$0.33333 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}c_2^* + 3c_2^* \Rightarrow 0.33333 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}c_2^* \Rightarrow$$

$$-0.33333 \times 10^{-5} = \frac{8}{3}c_2^* \Rightarrow c_2^* = -0.12500 \times 10^{-5}$$

ve

$$c_1^* = 1.0000 - (-0.12500 \times 10^{-5}) \Rightarrow c_1^* = 1.0000$$

bulunur. Dolayısıyla rekürsif seri, yeni bulunan katsayılar ile

$$p_n^* = 1.0000 \left(\frac{1}{3}\right)^n + (-0.12500 \times 10^{-5})3^n$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi bu yaklaşımda oluşan (mutlak) hatanın karakteristiğini inceleyelim:

$$|p_n - p_n^*| = \left| 3^{-n} - \left(1.0000 \left(\frac{1}{3}\right)^n + (-0.12500 \times 10^{-5})3^n \right) \right|$$

$$= |3^{-n} - 3^{-n} - (-0.12500 \times 10^{-5}) 3^n|$$

$$= (0.12500 \times 10^{-5}) 3^n$$

olduğundan bu prosedür kararsızdır. Çünkü hata üstel olarak büyümektedir. Aşağıdaki tabloda bazı n değerleri için bu yaklaşımda oluşan bağıl hata gösterilmektedir:

n	Hesaplanan p_n^* Değeri	Gerçek p_n Değeri	Bağıl Hata
0	0.10000×10^1	0.10000×10^1	
1	0.33333×10^0	0.33333×10^0	
2	0.11110×10^0	0.11111×10^0	9×10^{-5}
3	0.37000×10^{-1}	0.37037×10^{-1}	1×10^{-3}
4	0.12230×10^{-1}	0.12346×10^{-1}	9×10^{-3}
5	0.37660×10^{-2}	0.41152×10^{-2}	8×10^{-2}
6	0.32300×10^{-3}	0.13717×10^{-2}	8×10^{-1}
7	-0.26893×10^{-2}	0.45725×10^{-3}	7×10^0
8	-0.92872×10^{-2}	0.15242×10^{-3}	6×10^1

Örnek 1.3.3. c_1 ve c_2 reel sabitler olmak üzere $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi her $n = 0, 1, \dots$ için

$$p_n = c_1 + c_2 n$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre

(a) $\{p_n\}$ dizisinin $n = 2, 3, \dots$ için

$$p_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}$$

şeklinde tanımlanan rekürsif denklemin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

(b) $p_0 = 1$ ve $p_1 = 1/3$ olarak verilmesi durumunda c_1 ve c_2 sabitlerini tespit ediniz.

- (c) c_1 ve c_2 için (b)'de bulunan değerleri kullanarak p_n ifadesini daha sade bir biçimde ifade ediniz.
- (d) (b)'de verilen p_0 ve p_1 değerlerine karşılık c_1 ve c_2 sabitlerini tespit etmek için beş-dijit yuvarlama algoritması uygulandığında oluşan hatanın karakteristiğini araştırınız.

Çözüm.

- (a) Verilen ifade, denklemden yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 2p_{n-1} - p_{n-2} &= 2(c_1 + c_2(n-1)) - (c_1 + c_2(n-2)) \\ &= 2c_1 + 2nc_2 - 2c_2 - c_1 - nc_2 + 2c_2 \\ &= c_1 + c_2n = p_n \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre istenen sağlanmış olur.

- (b) $p_0 = 1$ ve $p_1 = \frac{1}{3}$ olsun. Dolayısıyla sabitler

$$\begin{aligned} p_0 = 1 \Rightarrow n = 0 : \quad 1 &= c_1 + c_2 \cdot 0 \Rightarrow c_1 = 1, \\ p_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow n = 1 : \quad \frac{1}{3} &= c_1 + c_2 \cdot 1 = 1 + c_2 \Rightarrow c_2 = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

şeklinde tek türlü belirli olarak elde edilirler.

- (c) Verilen dizi yukarıda bulunan sabit değerleri kullanılarak

$$p_n = 1 - \frac{2}{3}n.$$

olarak en sade halde yazılabilir.

- (d) Şimdi dizinin terimlerinin beş-dijit yuvarlama aritmetiği kullanılarak yazıldığını varsayalım. Buna göre $p_0^* = 1.0000$ ve $p_1^* = 0.33333$ 'dür ve bu durumda sabitler $c_1^* = 1.0000$ ve $c_2^* = -0.66667$ şeklinde elde edilir. Gerçekten:

$$\begin{aligned} p_0^* = 1.0000 \Rightarrow n = 0 : \quad 1.0000 &= c_1^* + c_2^* \cdot 0 = c_1^* \Rightarrow c_1^* = 1.0000 \\ p_1^* = 0.33333 \Rightarrow n = 1 : \quad 0.33333 &= c_1^* + c_2^* \cdot 1 = c_1^* + c_2^* \Rightarrow c_2^* = -0.66667 \end{aligned}$$

olduğundan

$$p_n^* = 1.0000 + (-0.66667)n$$

elde edilir.

Şimdi bu yaklaşımda oluşan (mutlak) hatanın karakteristiğini inceleyelim:

$$\begin{aligned} |p_n - p_n^*| &= \left| 1 - \frac{2}{3}n - (1.0000 + (-0.66667)n) \right| \\ &= \left| 1 - \frac{2}{3}n - 1 + 0.66667 \cdot n \right| \\ &= \left(0.66667 - \frac{2}{3} \right) n \end{aligned}$$

olduğundan bu prosedür karardır. Çünkü hata lineer olarak büyümektedir. Aşağıdaki tabloda bazı n değerleri için bu yaklaşımda oluşan bağıl hata gösterilmektedir:

n	Hesaplanan p_n^* Değeri	Gerçek p_n Değeri	Bağıl Hata
0	0.10000×10^1	0.10000×10^1	
1	0.33333×10^0	0.33333×10^0	
2	-0.33330×10^0	-0.33333×10^0	9×10^{-5}
3	-0.10000×10^1	-0.10000×10^1	0
4	-0.16670×10^1	-0.16667×10^1	0
5	-0.23334×10^1	-0.23333×10^1	4×10^{-5}
6	-0.30000×10^1	-0.30000×10^1	0
7	-0.36667×10^1	-0.36667×10^1	0
8	-0.43334×10^1	-0.43333×10^1	2×10^{-5}

1.3.1 Yakınsama Hızı

İterasyon teknikleri kullanılarak yapılan yaklaşımlarda genellikle diziler kullanıldığından, bu bölümde bazı tanımlar verilerek dizilerin yakınsama hızı üzerinde durulacaktır.

Tanım 1.3.4. $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi sıfıra, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi herhangi bir α sayısına yakınsasın. Yeterince büyük n değerleri için

$$|\alpha_n - \alpha| \leq K|\beta_n|$$

eşitsizliğini sağlayan bir K sayısı varsa, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi α 'ya $O(\beta_n)$ hızında **yakınsar** denir ve $\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$ yazılır.

Tanım 1.3.4'e göre $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi istenen özelliği sağlayan herhangi bir $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi ile karşılaştırılabilir olsa da biz hemen her durumda $p > 0$ için

$$\beta_n = \frac{1}{n^p}$$

formundaki dizileri göz önüne alacağız ve en büyük p değeri ile ilgileneceğiz. Burada $\alpha_n = \alpha + O(1/n^p)$ 'dir.

Örnek 1.3.5. $n \geq 1$ için

$$\alpha_n = \frac{n+1}{n^2} \text{ ve } \hat{\alpha}_n = \frac{n+3}{n^3}$$

şeklinde tanımlanan iki dizi göz önüne alımsın. Her ne kadar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = 0 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\alpha}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^3} = 0$$

sağlansa da $\{\hat{\alpha}_n\}$ dizisi limit değerine $\{\alpha_n\}$ dizine göre daha hızlı yakınsar. Gerçekten, beş-dijit yuvarlama aritmetiği kullanılarak aşağıdaki değerler elde

edilir:

n	1	2	3	4	5	6	7
α_n	2.0000	0.75000	0.44444	0.31250	0.24000	0.19444	0.16327
$\hat{\alpha}_n$	4.0000	0.62500	0.22222	0.10938	0.064000	0.041667	0.029155

Yukarıdaki şekilde tanımlanan her iki dizinin de yakınsama hızını tespit ediniz.

Çözüm. $\beta_n = 1/n$ ve $\hat{\beta}_n = 1/n^2$ olarak tanımlansın.

$$|\alpha_n - 0| = \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{n+n}{n^2} = 2 \cdot \frac{1}{n} = 2\beta_n$$

ve

$$|\hat{\alpha}_n - 0| = \frac{n+3}{n^3} \leq \frac{n+3n}{n^3} = 4 \cdot \frac{1}{n^2} = 4\hat{\beta}_n$$

olduğundan $\{\alpha_n\}$ dizisi sıfıra $\{1/n\}$ 'nin sıfıra yakınsama hızında yakınsarken $\{\hat{\alpha}_n\}$ dizisi aynı değere daha hızlı olarak $\{1/n^2\}$ 'nin sıfıra yakınsama hızında yakınsar. Buna göre

$$\alpha_n = 0 + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{ve} \quad \hat{\alpha}_n = 0 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

yazılabilir.

O notasyonu ayrıca fonksiyonların yakınsama hızlarını belirtmek için de kullanılır.

Tanım 1.3.6. $\lim_{h \rightarrow 0} G(h) = 0$ ve $\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = L$ olsun. Eğer yeterince küçük h değerleri için

$$|F(h) - L| \leq K|G(h)|$$

eşitsizliğini sağlayan bir K sayısı varsa $F(h)$ fonksiyonu L 'ye $O(G(h))$ hızında yakınsar denir ve $F(h) = L + O(G(h))$ yazılır.

Bu derste karşılaştırmada kullanılan $G(h)$ fonksiyonu $p > 0$ olmak üzere $G(h) = h^p$ formunda alınacaktır. Dolayısıyla $F(h) = L + O(h^p)$ eşitliğini sağlayan en büyük p değeri ile ilgilenecektir.

Örnek 1.3.7. Kosinüs fonksiyonunun $h = 0$ civarında üçüncü Taylor polinomu hata terimi ile birlikte göz önüne alarak

$$\cos h + \frac{1}{2}h^2 = 1 + O(h^4)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Örnek 1.1.20'dan $\xi(h)$ sayısı 0 ile h arasında olmak üzere

$$\cos h = 1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{24}h^4 \cos \xi(h)$$

şeklinde yazılabileceğini biliyoruz. Buna göre

$$\cos h + \frac{1}{2}h^2 - 1 = \frac{1}{24}h^4 \cos \xi(h)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla

$$\left| \left(\cos h + \frac{1}{2}h^2 \right) - 1 \right| = \left| \frac{1}{24} \cos \xi(h) \right| h^4 \leq \frac{1}{24} h^4$$

bulunur. Yani, $h \rightarrow 0$ için $\cos h + \frac{1}{2}h^2$ ifadesinin 1 limit değerine h^4 'ün 0'a yakınsama hızında yakınsadığı sonucu elde edilir. Bu ise

$$\cos h + \frac{1}{2}h^2 = 1 + O(h^4)$$

demektir.

2 Tek Değişkenli Denklemlerin Çözümleri

Bu bölümde nümerik yaklaşımın en temel uğraşlarından birisi olan **kök bulma problemi** üzerinde durulacaktır. Bu süreçte verilen bir f fonksiyonu için $f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan ve denklemin **kökü**, **çözümü** ya da **sıfır yeri** olarak adlandırılan reel x sayılarına çeşitli metodlar kullanılarak yaklaşımlarda bulunulacaktır.

2.1 İkiye Bölme Metodu

Kök bulma problemi incelenirken göz önüne alınacak ilk teknik temel olarak Ara Değer Teoremi kullanılarak elde edilen **İkiye Bölme Metodu**dur.

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f(a)$ ve $f(b)$ değerlerinin işaretleri farklı ise Ara Değer Teoremi'ne göre (a, b) aralığında $f(p) = 0$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir p sayısı vardır. Bu prosedür her ne kadar verilen aralıkta birden fazla kök olması durumunda da kullanışlı olsa dahi biz kolaylık sağlaması bakımından (a, b) aralığında f fonksiyonunun tek türlü belirli bir kökü olduğunu varsayacağız.

İkiye bölme yöntemi $f(a)f(b) < 0$ olmak üzere, $[a, b]$ aralığını ikiye bölmek sureti ile parçalayarak her bir adımda kökün yer aldığı alt aralığın tespit edilmesi olgusuna dayanır.

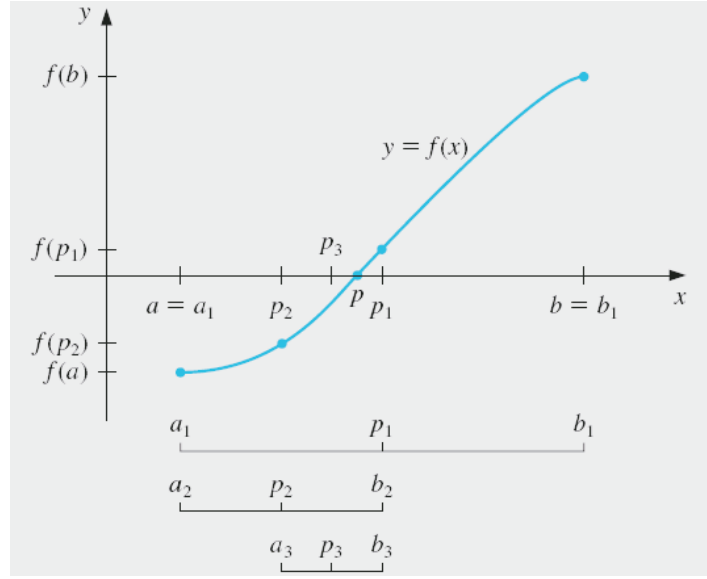
$a_1 = a, b_1 = b$ olmak üzere $[a, b]$ aralığının orta noktası olan

$$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

noktası göz önüne alınsın:

- Eğer $f(p_1) = 0$ ise $p = p_1$ verilen denklemin köküdür.
- Eğer $f(p_1) \neq 0$ ise $f(p_1)$ değeri ya $f(a_1)$ ya da $f(b_1)$ ile aynı işaretlidir.
 - Eğer $f(p_1)$ ile $f(a_1)$ aynı işaretli ise $p \in (p_1, b_1)$ dir. Bu durumda $a_2 = p_1$ ve $b_2 = b_1$ alınır.
 - Eğer $f(p_1)$ ile $f(a_1)$ farklı işaretli ise $p \in (a_1, p_1)$ dir. Bu durumda $a_2 = a_1$ ve $b_2 = p_1$ alınır.

Daha sonra verilen denklemin bir kökünü barındırdığı bilinen $[a_2, b_2]$ aralığının orta noktası yukarıda anlatıldığı şekilde tespit edilip aynı prosedür uygulanarak kök değeri verilen bir ε hassaslık değeri ile belirlenir (Bkz Şekil 2.1).



Şekil 2.1: İkiye bölme metodu

Yukarıda anlatılan prosedür sonlu sayıda tekrarlandıktan sonra bulunan değer, gerçek kök değerine bir yaklaşım olarak elde edilir. Dolayısıyla durma kriteri dediğimiz bir tolerans değerinin sağlandığını, yani yapılan yaklaşımın istediğimiz ε hassaslığında olduğunu kontrol edilmesi gerekir. Örneğin, bir ε değeri verildiğinde p_1, p_2, \dots, p_k her bir adımda kök değerine yapılan yaklaşımlar olmak üzere $n = 1, 2, \dots, k$ için

$$|p_n - p_{n-1}| < \varepsilon, \quad (2.1)$$

$$\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \varepsilon, \quad p_n \neq 0 \quad (2.2)$$

veya

$$|f(p_n)| < \varepsilon \quad (2.3)$$

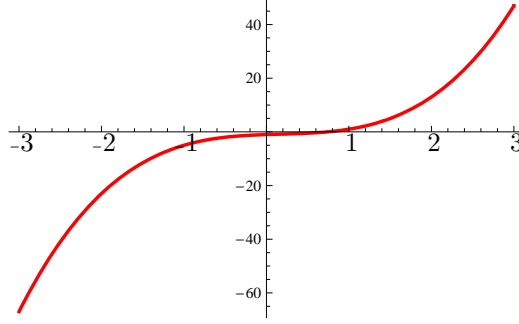
eşitsizliklerinden herhangi biri sağlandığında yapılan yaklaşımın istenen hassaslıkta olduğu kabul edilebilir. Bununla birlikte yukarıda verilen durma kriterlerinin kullanımında bazı zorluklar ortaya çıkmaktadır: Örneğin, öyle $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri vardır ki $p_n - p_{n-1}$ farkı sifıra yakınsamasına karşın dizinin kendisi iraksaktır. Diğer tarafta, $f(p_n)$ değeri sifıra çok yakınken p_n ifadesi verilen aralıktaki gerçek kök değeri p 'den çok farklı olabilir. Eğer f ya da p hakkında herhangi bir bilgi verilmemişse (2.2) eşitsizliğini kullanmak oranın bağıl hatayı test etmeye yakın sonuçlar vereceğinden en uygun durma kriteridir.

İkiye bölme algoritması kullanılarak bir yaklaşım yapılmak istendiğinde öncelikle $f(a)f(b) < 0$ eşitsizliğini sağlayacak $[a, b]$ aralığının tespit edilmesi gerekir. Her bir adımda, bulunan bu aralık ikiye bölünerek kökü barındıran alt

aralık tayin edildiğinden, $[a, b]$ başlangıç aralığının küçük olması avantajlı bir durumdur. Örneğin $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$ fonksiyonu göz önüne alınsın (Bkz. Şekil 2.2).

$$f(-4)f(4) < 0 \text{ ve } f(0)f(1) < 0$$

olmasına karşın f fonksiyonunun bir kökünü barındıran $[a, b]$ aralığını $[-4, 4]$ yerine $[0, 1]$ şeklinde almak işlem yükü açısından daha mantıklıdır.



Şekil 2.2: $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$ fonksiyonunun grafiği

Aşağıdaki örnek ikiye bölme metodunun ne şekilde işletildiğine dair bir uygulama olarak verilmektedir. Bu örnekte bağıl hata sınırının 0.0001 'den küçük olduğu bir yaklaşım yapılmakta ve bu yaklaşımı elde etmek için

$$\frac{|p-p_n|}{|p|} < 10^{-4}$$

eşitsizliğinin sağlanıp sağlanmadığına bakılmaktadır.

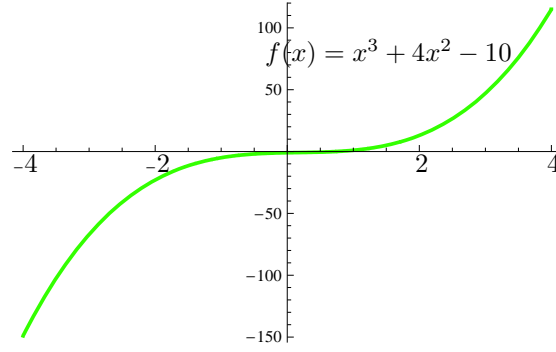
Örnek 2.1.1. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ denkleminin $[1, 2]$ aralığında bir kökü olduğunu gösteriniz ve ikiye bölme metodunu kullanarak bu aralıktaki köke en az 10^{-4} hassaslıkla bir yaklaşımda bulununuz.

Çözüm. $f(1) = -5 < 0$ ve $f(2) = 14 > 0$ olduğundan Teorem 1.1.8 ile verilen Ara Değer Teoremi'ne göre sürekli $f(x)$ fonksiyonunun verilen aralıkta en az bir kökü vardır.

İkiye bölme metodunun ilk adımında $[1, 2]$ aralığının orta noktası 1.5 değeri göz önüne alınır. $f(1.5) = 2.375 > 0$ olduğundan kökün $[1, 1.5]$ aralığında yer aldığı sonucu elde edilir. Dolayısıyla yeni aralığımız $[1, 1.5]$ olarak tespit edilir. Bu aralığın orta noktası 1.25 değeri için $f(1.25) = -1.796875 < 0$ olduğundan kök değerinin $[1.25, 1.5]$ aralığında yer aldığı sonucu elde edilir. $[1.25, 1.5]$ aralığının orta noktası 1.375 değeri için $f(1.375) = 0.16211 > 0$ olduğundan verilen denkleme ait kökün $[1, 1.375]$ aralığında yer aldığı sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde hareket ederek aşağıdaki tablo elde edilir:

n	a_n	p_n	b_n	$f(p_n)$
1	1.0	1.5	2.0	2.375
2	1.0	1.25	1.5	-1.796875
3	1.25	1.375	1.5	0.162109375
4	1.25	1.3125	1.375	-0.8483886719
5	1.3125	1.34375	1.375	-0.350982666
6	1.34375	1.359375	1.375	-0.09640884399
7	1.359375	1.3671875	1.375	0.03235578537
8	1.359375	1.36328125	1.3671875	-0.03214997053
9	1.36328125	1.365234375	1.3671875	0.00007202476263
10	1.36328125	1.364257813	1.365234375	-0.01604669075
11	1.364257813	1.364746094	1.365234375	-0.007989262813
12	1.364746094	1.364990234	1.365234375	-0.003959101523
13	1.364990234	1.365112305	1.365234375	-0.00194365901

Şekil 2.3'de $f(x)$ fonksiyonunun x eksenini kestiği nokta, yani sıfır yeri gösterilmektedir.



Şekil 2.3: $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ fonksiyonun grafiği

Tablodan görüldüğü üzere 13 iterasyon sonucunda p köküne bir yaklaşım 1.365112305 olarak elde edilmiştir. Bu yaklaşımda oluşan mutlak hata için bir sınır

$$|p - p_{13}| < |b_{14} - a_{14}| = |1.365234375 - 1.365112305| = 0.000122070$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan $|a_{14}| < |p|$ olduğundan istenen durma kriteri kullanılarak

$$\frac{|p - p_{13}|}{|p|} < \frac{|b_{14} - a_{14}|}{|a_{14}|} < \frac{0.000122070}{1.365112305} = 8.942121432 \times 10^{-4}$$

sonucuna ulaşılır. Buna göre yapılan yaklaşımın hassaslığının en az 10^{-4} olduğu görülür. Aslında dokuz ondalık basamak ile aranan kökün gerçek değeri $p = 1.365230013$ 'tür. Bu durumda p_9 yaklaşımı p_{13} 'den daha iyi bir yaklaşımdır.

Bu olgu $|f(p_9)| < |f(p_{13})|$ olmasından sezilmekle birlikte gerçek kök değerinin ne olduğu bilinmeden kesin bir yargıya varmak doğru olmaz.

İkiye bölme metodu konsept olarak her ne kadar kolay anlaşılır olsa da önemli dezavantajları vardır. $|p - p_n|$ farkının çok küçük olmasını sağlayacak n iterasyon sayısı kimi zaman çok büyük bir sayı olabilir. Buna göre gerçek kök değerine yakınsaması yavaştır. Fakat, metot kesinlikle kök değerine yakınsar. Yani, eğer verilen fonksiyon sürekli ise bu metot kullanılarak sıfır yerine bir yaklaşımda bulunmak her zaman mümkündür. Dolayısıyla yakınsaması daha hızlı metotlara geçmeden önce ikiye bölme metodunu incelemek bir başlangıç olarak önemlidir.

Örnek 2.1.2. İkiye bölme metodunu kullanarak $\varepsilon = 10^{-3}$ hassaslıkla $\sqrt{3}$ değerine bir yaklaşımda bulununuz.

Çözüm. Öncelikle metot verilen bir fonksiyonun köklerinin bulunması için kullanıldığından kökü $\sqrt{3}$ olan bir fonksiyon tanımlamak gerekir. Tüm olası seçimler içerisinde söz konusu fonksiyonu kolaylık sağlaması bakımından $f(x) = x^2 - 3$ olarak tanımlayıp pozitif kökünü göz önüne alalım. Şimdi f fonksiyonunun bu kökünü barındıran bir $[a, b]$ aralığı bulalım:

$$f(a) = f(1.7) = -0.11 < 0 \text{ ve } f(b) = f(1.8) = 0.24 > 0$$

olduğundan Ara Değer Teoremi'ne göre $[a, b] = [1.7, 1.8]$ aralığında $f(x) = x^2 - 3$ fonksiyonunun bir kökü vardır. Diğer bir deyişle $\sqrt{3}$ değeri $(1.7, 1.8)$ aralığında yer alır. Buna göre aşağıdaki tablo elde edilir:

n	a_n	p_n	b_n	$f(p_n)$
1	1.7	1.75	1.8	0.625×10^{-1}
2	1.7	1.725	1.75	-0.24375×10^{-1}
3	1.725	1.7375	1.75	0.1890625×10^{-1}
4	1.725	1.73125	1.7375	$-0.27734375 \times 10^{-2}$
5	1.73125	1.734375	1.7375	$0.8056640625 \times 10^{-2}$
6	1.73125	1.7328125	1.734375	$0.2639160156 \times 10^{-1}$
7	1.73125	1.73203125	1.7328125	$-0.6774902344 \times 10^{-4}$

Dolayısıyla $|f(p_7)| = 0.6774902344 \times 10^{-4} < 10^{-3}$ olduğundan verilen hassaslık değeri ile aranan kök $p \approx p_7 = 1.73203125$ şeklinde elde edilir.

Örnek 2.1.3. (a) $f(x) = e^{-x} - \sin x$ fonksiyonunun kökünü barındıran bir aralık tespit ediniz.

(b) Yukarıda tespit ettiğiniz aralıktaki köke ikiye bölme metodunun ilk 4 adımını gerçekleştirerek bir yaklaşımda bulununuz.

Çözüm.

(a) Her yerde sürekli $f(x)$ fonksiyonu Ara Değer Teoremi'nin koşulunu sağladığından reel sayılar içinde $a < b$ eşitsizliğini sağlayan bir a, b sayı çiftini

$f(a)f(b) < 0$ ifadesini gerçekleyecek şekilde bulmak yeterlidir. Burada $a = 0$ ve $b = 1$ olarak göz önüne alırsa

$$f(a) = f(0) = e^0 - \sin 0 = 1 > 0$$

ve

$$f(b) = f(1) = e^{-1} - \sin 1 = -0.47359 < 0$$

olduğundan $f(0)f(1) < 0$ koşulu sağlanır. Bu ise Ara Değer Teoremi'ne göre $[0, 1]$ aralığında $f(x) = e^{-x} - \sin x$ fonksiyonunun bir kökünün olduğu anlamına gelir.

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$
1	0	1	0.5	0.12711
(b) 2	0.5	1	0.75	-0.20927
3	0.5	0.75	0.625	-0.049836
4	0.5	0.625	0.5625	0.036480

Buna göre aranan kök 10^{-1} hassaslık ile $p \approx p_4 = 0.5625$ olarak bulunur.

Teorem 2.1.4. $f \in C[a, b]$ ve $f(a)f(b) < 0$ olsun. Bu durumda ikiye bölme metodu ile elde edilen $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi f fonksiyonunun verilen aralıktaki p köküne yakınsar ve $n \geq 1$ için

$$|p_n - p| \leq \frac{b - a}{2^n}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. Her $n \geq 1$ için $p \in (a_n, b_n)$ ve

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b - a)$$

dır. Ayrıca, $p_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ olduğundan

$$|p_n - p| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{b - a}{2^n} \quad (n \geq 1)$$

elde edilir. □

İkiye bölme metodunda

$$|p_n - p| \leq \frac{1}{2^n}(b - a)$$

olduğundan $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi p köküne $O\left(\frac{1}{2^n}\right)$ hızında yakınsar. Yani

$$p_n = p + O\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

dır.

Burada dikkat edilmesi gereken bir husus Teorem 2.1.4'ün yapılan yaklaşımda oluşan hata için bir üst sınır belirlememize yardımcı olduğudur. Bazı durumlarda bu üst sınır gerçek hatadan çok büyük olabilir. Örneğin Örnek 2.1.1'de dokuzuncu yaklaşım için

$$|p - p_9| \leq \frac{2-1}{2^9} = 1.953125 \times 10^{-3}$$

iken aslında gerçek hata değeri

$$|p - p_9| = |1.365230013 - 1.365234375| = 4.362 \times 10^{-6}$$

olarak tespit edilir.

Örnek 2.1.5. $a = a_1 = 1$, $b = b_1 = 2$ olmak üzere $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ denkleminde en az 10^{-3} hassaslıkla bir yaklaşım ikiye bölme metodu kullanılarak yapılmak istendiğinde oluşacak iterasyon sayısını hesaplayınız.

Çözüm. n iterasyon sayısını göstermek üzere

$$|p_n - p| \leq 2^{-n}(b - a) = 2^{-n} < 10^{-3}$$

eşitsizliğini gerçekleştirecek olan n sayısını tespit etmek gerekir. Buna göre 10 tabanında gerekli logaritma işlemleri yapılırsa $-n \log 2 < -3 \log 10$ yani

$$n > \frac{3}{\log 2} = 9.965784285$$

elde edilir. İterasyon sayısı yukarıda tespit edilen değerden büyük en yakın tam sayı olduğundan on iterasyon sonucunda en az 10^{-3} hassaslık ile bir yaklaşım yapılmış olunacağı sonucuna ulaşılır. Gerçekten Örnek 2.1.1'de elde edilen tabloda $p_{10} = 1.364257813$ olduğundan oluşan gerçek hata

$$|1.365230013 - 1.364257813| = 0.9722 \times 10^{-3} < 10^{-3}$$

olup verilen üst sınırı geçmez. Burada tekrar belirtmek gerekir ki yukarıdaki şekilde bulunan n iterasyon sayısı bazı durumlarda verilen hassaslık değeri ile bir yaklaşımda bulunmak için yapılması gereken iterasyon sayısından çok daha fazla olabilir.

2.2 Sabit Nokta İterasyonu

Bir fonksiyonun sabit noktaları, fonksiyon altındaki görüntüsü yine kendi değerine eşit olan noktalarıdır.

Tanım 2.2.1. Bir g fonksiyonu verilsin. $g(p) = p$ eşitliğini sağlayan bir noktaya g fonksiyonunun **sabit noktası** denir.

Bu bölümde sabit nokta problemine bir çözümün ne şekilde bulunacağı ve sabit nokta problemi ile kök bulma problemi arasındaki ilişki üzerinde durulacaktır. Aşağıda anlatıldığı anlamda kök bulma problemi ile sabit nokta problemi birbirine denk sınıflardır:

- Verilen bir $f(p) = 0$ kök bulma problemi için

$$g(x) = x - f(x) \text{ ya da } g(x) = x + 3f(x)$$

gibi çok farklı şekillerde p noktasında bir sabit nokta içeren g fonksiyonları tanımlanabilir. Zira

$$g(p) = p - f(p) = p - 0 = p \Rightarrow g(p) = p$$

dir.

- Tersine, eğer g fonksiyonunun bir sabit noktası p ise, örneğin

$$f(x) = x - g(x)$$

olarak tanımlanan $f(x)$ fonksiyonunun bir kökü

$$f(p) = p - g(p) = p - p = 0$$

sağlandığından p 'dir.

Her ne kadar üzerinde durulan konu verilen bir denklemin köklerine bir yaklaşım yapma problemi olsa da sabit nokta barındıran fonksiyonlar kullanılarak kök bulma problemini çözme yolunda güçlü bir metot elde etmek mümkündür.

Öncelikle, verilen bir fonksiyonun sabit noktalarını bulma problemini incelemeyen önce sabit nokta konseptini daha da anlaşılır kılmak amacı ile aşağıdaki örneği göz önüne alalım:

Örnek 2.2.2. $g(x) = x^2 - 2$ fonksiyonunun herhangi bir sabit noktasını tespit ediniz.

Çözüm. Bir $g(x)$ fonksiyonu için p sabit noktası $g(p) = p$ eşitliğini sağladığından $p = p^2 - 2$ yani $p^2 - p - 2 = (p+1)(p-2) = 0$ denkleminin çözümü olan $p = -1$ ve $p = 2$ noktaları aranan sabit noktalar olarak bulunur. Gerçekten

$$g(-1) = (-1)^2 - 2 = -1 \text{ ve } g(2) = (2)^2 - 2 = 2$$

dir.

Tanımından da anlaşılacağı üzere sabit noktalar verilen g fonksiyonu ile $y = x$ doğrusunun kesim noktalarıdır. Bu durum Şekil 2.4'de gösterilmektedir.

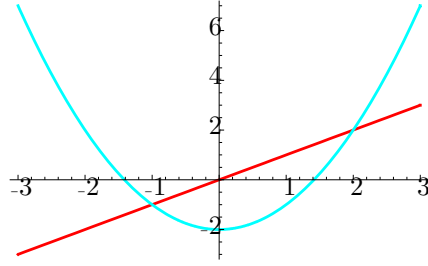
Aşağıdaki teorem bize sabit noktanın varlığı ve teklifi ile ilgili olarak yeter şartı vermektedir.

Teorem 2.2.3. (i) *Eğer $g \in C[a, b]$ ve her $x \in [a, b]$ için $g(x) \in [a, b]$ ise $[a, b]$ aralığında g fonksiyonunun en az bir sabit noktası vardır.*

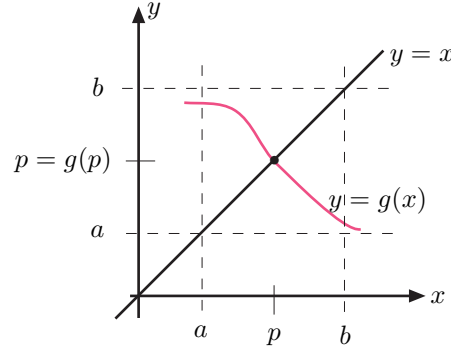
(ii) *Yukarıda verilenlere ek olarak, (a, b) üzerinde $g'(x)$ türevi mevcut ve her $x \in (a, b)$ için*

$$|g'(x)| \leq k$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $k < 1$ pozitif sabiti var ise $[a, b]$ aralığında g 'nin tek türlü belirli bir sabit noktası vardır (Bkz Şekil 2.5).



Şekil 2.4: $y = x$ ve $y = x^2 - 2$ fonksiyonlarının grafikleri



Şekil 2.5: Sabit noktaların varlığı ve tekliği

Kanat. (i) Eğer $g(a) = a$ veya $g(b) = b$ ise g 'nin sabit noktası uç noktalarda yer alır. Diğer durumda her $x \in [a, b]$ için $g(x) \in [a, b]$ olduğundan $g(a) > a$ ve $g(b) < b$ 'dir. $h(x) = g(x) - x$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $[a, b]$ aralığında süreklidir ve

$$h(a) = g(a) - a > 0 \text{ ve } h(b) = g(b) - b < 0$$

eşitsizliklerini gerçekler. Dolayısıyla Ara Değer Teoremi'ne göre $h(p) = 0$ olacak şekilde bir p sayısı (a, b) aralığında mevcuttur. Bu p sayısı için

$$0 = h(p) = g(p) - p$$

olduğundan $g(p) = p$ eşitliğini sağlar. Yani (a, b) aralığında yer alan p sayısı g fonksiyonunun bir sabit noktasıdır.

(ii) Yukarıdaki koşullara ek olarak $|g'(x)| \leq k < 1$ sağlansın ve $[a, b]$ aralığında g fonksiyonunun p ve q gibi iki farklı sabit noktası var olsun. Ortalama Değer Teoremi'ne göre p ile q arasında ve dolayısıyla $[a, b]$ aralığı içinde bir ξ sayısı

$$\frac{g(p) - g(q)}{p - q} = g'(\xi)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde mevcuttur. Buna göre yukarıdaki ifadenin her iki tarafının mutlak değeri alınır, $g(p) = p$, $g(q) = q$ ve $|g'(\xi)| \leq k < 1$ olduğu kullanılarak gerekli işlemler yapılırsa

$$|p - q| = |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)||p - q| \leq k|p - q| < |p - q|$$

yani

$$|p - q| < |p - q|$$

çelişkisi elde edilir. Bu ise bizi $p \neq q$ varsayımının yanlış olduğu sonucuna götürür. Dolayısıyla $p = q$ 'dur, yani $[a, b]$ aralığındaki sabit nokta tek türlü belirlidir. □

Örnek 2.2.4. $g(x) = \frac{x^2-1}{3}$ fonksiyonunun $[-1, 1]$ aralığında tek türlü belirli bir sabit noktası olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $g'(x) = \frac{2x}{3}$ olduğundan sürekli $g(x)$ fonksiyonunun $[-1, 1]$ aralığında türevi mevcuttur. Buna göre $g(x)$ fonksiyonu maksimum ve minimum değerlerini ya sınır noktaları olan $x = -1$ veya $x = 1$ 'de ya da türevini sıfır yapan $x = 0$ noktasında alır. $g(-1) = g(1) = 0$ ve $g(0) = -\frac{1}{3}$ olduğundan g fonksiyonun $x = -1$ ve $x = 1$ noktalarında mutlak maksimumu ve $x = 0$ noktasında ise mutlak minimumu vardır. Buna göre her $x \in [-1, 1]$ için

$$-1 < -\frac{1}{3} < g(x) \text{ ve } g(x) < 0 < 1$$

olduğundan $g(x) \in [a, b] = [-1, 1]$ sağlanır. Dolayısıyla verilen aralıkta fonksiyonun en az bir tane sabit noktası vardır. Diğer taraftan

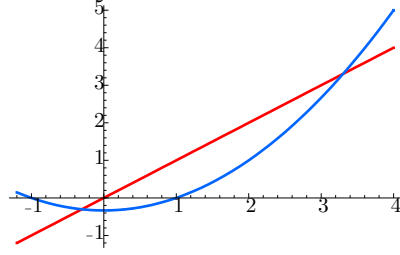
$$|g'(x)| = \left| \frac{2x}{3} \right| \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{2x}{3} \right| = \frac{2}{3} = k < 1$$

eşitsizliği de gerçekleştiğinden $[-1, 1]$ aralığında yer alan sabit nokta tek türlü belirlidir.

Örnek 2.2.4'de $[-1, 1]$ aralığında tek türlü belirli olduğu saptanan sabit nokta cebirsel olarak da bulunabilir: $p = g(p) = \frac{p^2-1}{3}$ olduğundan $p^2 - 3p - 1 = 0$ kuadratik denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden iki tane kök bulunur. Bunlardan biri $[-1, 1]$ aralığında yer alan

$$p = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{13})$$

olup g fonksiyonunun sabit noktasıdır (Bkz Şekil 2.6). Diğer taraftan $p^2 - 3p - 1 = 0$ denkleminin diğer bir kökü $[3, 4]$ aralığında yer alan $p = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13})$ 'dir. Bununla beraber $g(3) = \frac{3^2-1}{3} = 2.\bar{6} \notin [3, 4]$ olduğundan $[3, 4]$ aralığı ile göz önüne alındığında g fonksiyonu Teorem 2.2.3'ün hipotez koşullarını sağlamaz. Dolayısıyla Teorem 2.2.3 verilen bir fonksiyonun söz konusu aralıktaki sabit noktasının varlığını garantilemek için yeterdir fakat gerek değildir.



Şekil 2.6: $y = (x^2 - 1)/3$ fonksiyonunun sabit noktaları

Örnek 2.2.5. $g(x) = 3^{-x}$ fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığında tek türlü belirli bir sabit noktasının varlığının Teorem 2.2.3 kullanılarak gösterilemeyeceğini, fakat aslında bu aralıkta verilen fonksiyona ait sadece bir sabit noktanın mevcut olduğunu gösteriniz.

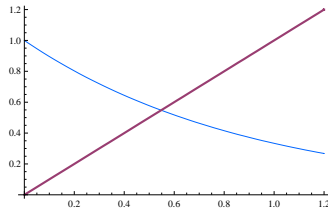
Çözüm. $[0, 1]$ aralığında $g'(x) = -3^{-x} \ln 3 < 0$ olduğundan sürekli $g(x)$ fonksiyonu verilen aralıkta monoton azalandır. Buna göre maksimum değerini aralığın sol ucunda, minimum değerini ise sağ ucunda alır. Ayrıca

$$g(1) = \frac{1}{3} \leq g(x) \leq 1 = g(0)$$

olduğundan her $x \in [0, 1]$ için $g(x) \in [0, 1]$ sağlanır. Dolayısıyla Teorem 2.2.3'ün ilk kısmına göre $[0, 1]$ aralığında g fonksiyonunun en az bir sabit noktası vardır. Diğer taraftan

$$g'(0.01) = -3^{-0.01} \ln 3 = -1.086608855$$

olduğundan en azından $(0, 1)$ aralığında yer alan 0.01 noktası için $|g'(x)| \not\leq 1$ olur. Dolayısıyla Teorem 2.2.3 kullanılarak var olduğu bilinen sabit noktanın tekliği hakkında bir hüküm bildirilemez. Burada dikkat edilmesi gereken nokta ise $|g'(x)| \not\leq 1$ olmasından sabit noktanın verilen aralıkta tek türlü belirli olmadığı sonucu çıkmadığıdır. Sadece teklik hakkında herhangi bir bilgi elde edilememiş olur. Gerçekte, $[0, 1]$ aralığında $g(x) = 3^{-x}$ fonksiyonu g monoton azalan olduğundan $y = x$ doğrusunu sadece bir kez keser ve kesim noktası g 'nin tek türlü belirli sabit noktasıdır. Bu durum Şekil 2.7'de gösterilmektedir.



Şekil 2.7: $g(x) = 3^{-x}$ fonksiyonunun sabit noktası

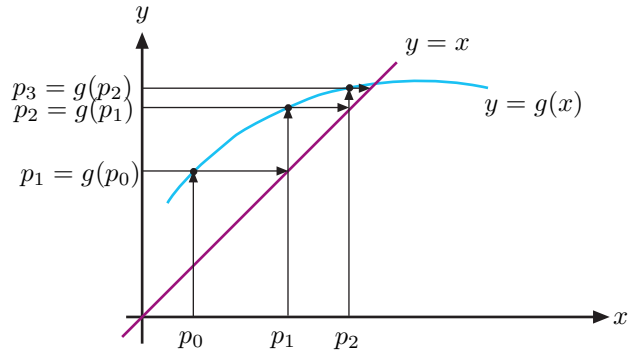
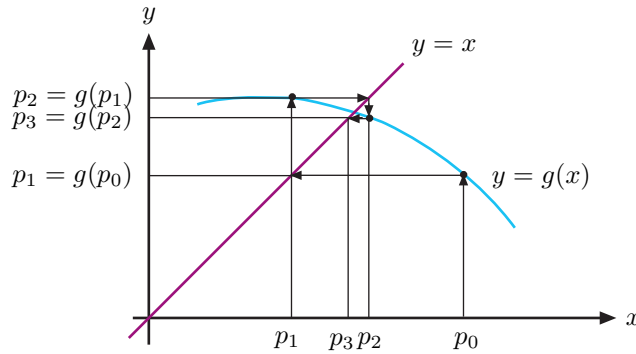
2.2.1 Sabit Nokta İterasyonu

Bu aşamada Örnek 2.2.5’de verilen g fonksiyonunun $p = g(p) = 3^{-p}$ eşitliğini gerçekleyen sabit noktalarını tespit etmemizi sağlayacak bir yöntem bilmediğimiz için söz konusu sabit noktaları belirleyemeyiz. Bununla birlikte belirli bir yakınsaklık derecesine sahip olarak verilen fonksiyonun sabit noktaları için yaklaşımlarda bulunabiliriz.

g fonksiyonunun sabit noktasına bir yaklaşımda bulunmak için bir p_0 ilk yaklaşım değeri seçelim ve her $n \geq 1$ için $p_n = g(p_{n-1})$ olacak şekilde $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi tanımlayalım. Eğer bu dizi p 'ye yakınsar ve g fonksiyonu sürekli ise

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(p_{n-1}) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n-1}\right) = g(p)$$

sağlanır ve $x = g(x)$ ifadesi için çözüm elde edilmiş olur. Bu teknik **sabit nokta iterasyonu** ya da **fonksiyonel iterasyon** olarak adlandırılır (Bkz. Şekil 2.8).



Şekil 2.8: Sabit nokta iterasyonu

Örnek 2.2.6. Şimdi Örnek 2.1.1'de incelenen $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin $[1, 2]$ aralığında tek türlü belirli bir çözümünün olduğunu biliyoruz. Bu köke sabit nokta iterasyonu ile bir yaklaşımda bulunmak için $x = g(x)$ şeklinde bir fonksiyon tanımlamak gerekir. Bu fonksiyon verilen denklem kullanılarak pek çok farklı şekilde oluşturulabilir. Örneğin $4x^2 = 10 - x^3$ yazarsak $x^2 = \frac{1}{4}(10 - x^3)$ olduğundan $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$ elde edilir. Biz $[1, 2]$ aralığındaki çözüm ile ilgilendiğimizden pozitif olan $x = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$ ifadesini sabit nokta fonksiyonu adayı olarak seçebiliriz. Bunun yanında $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ denklemini kullanılarak $x = g(x)$ eşitliğini sağlayan başka fonksiyonlar da yazılabilir:

$$(a) \quad x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10,$$

$$(b) \quad x = g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x},$$

$$(c) \quad x = g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3},$$

$$(d) \quad x = g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{4+x}},$$

$$(e) \quad x = g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}.$$

Okuyucu, yukarıdaki şekilde tanımlanan her fonksiyonun $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ denkleminin $[1, 2]$ aralığındaki çözümünü sabit nokta iterasyonu metodu ile bulmak için kullanılacak Teorem 2.2.3'in koşullarını sağlayan sabit nokta fonksiyonu olup olmadığını araştırmalıdır ki bu fonksiyonlardan (b) ile verilen $[1, 2]$ aralığında sürekli değil iken, (a) her $x \in [1, 2]$ için $g(x) \in [1, 2]$ içermesini sağlamaz. Şimdi bu ayrıntıya değinmeden verilen aralıkta herhangi bir p_0 başlangıç yaklaşımı seçelim ve bulunan yaklaşımlarda elde edilen sonuçlardan tespit edilen sabit nokta fonksiyonu adaylarından hangilerinin isteneni sağladığını görelim. Eğer $p_0 = 1.5$ olarak alınır ve g 'nin yukarıdaki şekilde tanımlanan tüm seçimleri kullanılarak

$$p_n = g(p_{n-1})$$

sabit nokta iterasyonu uygulanırsa aşağıdaki tablo değerleri elde edilir. Diğer taraftan Örnek 2.1.1'de belirtildiği üzere gerçek kök değeri 1.365230013'dür. Bu değere ikiye bölme metodu uygulanarak ulaşılmak istendiğinde 27 iterasyon yapmak gerekirken (c), (d) ve (e) ile verilen fonksiyonlar kullanılarak yapılan yaklaşımlarda farklı iterasyon sayılarına karşılık gerçek kök değerine ulaşılmaktadır. Bununla beraber (a) ile verilen fonksiyon ıraksak iken (b) ile verilen fonksiyonun üçüncü adımı tanımsızdır.

n	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1	-0.875	0.81649658	1.286953768	1.348399725	1.373333333
2	6.73242188	2.99690881	1.402540804	1.367376372	1.365262015
3	-469.720012	$(-8.65)^{1/2}$	1.345458374	1.364957015	1.365230014
4	1.03×10^8		1.375170253	1.365264748	1.365230013
5			1.360094193	1.365225594	
6			1.367846968	1.365230576	
7			1.363887004	1.365229942	
8			1.365916734	1.365230022	
9			1.364878217	1.365230012	
10			1.365410062	1.365230014	
15			1.365223680	1.365230013	
20			1.365230236		
25			1.365230006		
30			1.365230013		

Yukarıdaki örnekten görüleceği üzere verilen bir denklemin çözümüne sabit nokta iterasyonu metodu kullanılarak yapılacak bir yaklaşımda iki önemli problem ortaya çıkmaktadır. Bunlardan ilki sabit nokta fonksiyonunun tanımlanması, bir diğeri de tanımlanan bu fonksiyonun uygun bir adım sayısı ile sonucu vermesidir. Bu aşamada aşağıdaki teorem ve ilişkili sonuç bu sorulara cevap olacaktır:

Teorem 2.2.7. (Sabit Nokta Teoremi)

$g \in C[a, b]$ ve her $x \in [a, b]$ için $g(x) \in [a, b]$ olsun. Bunlara ek olarak g' türevi (a, b) aralığında mevcut ve her $x \in (a, b)$ için

$$|g'(x)| \leq k$$

eşitsizliğini sağlayan bir $0 < k < 1$ sayısı var olsun. Buna göre $[a, b]$ aralığındaki her p_0 sayısı için

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanan dizi $[a, b]$ aralığında tek türlü belirli bir p sabit noktasına yakınsar.

Kanıt. Teorem 2.2.3'den biliyoruz ki $[a, b]$ aralığında g fonksiyonunun $g(p) = p$ eşitliğini sağlayan bir p sabit noktası tektürlü belirli olacak şekilde mevcuttur. Ayrıca g fonksiyonu $[a, b]$ aralığını kendi içine resmettiğinden yukarıdaki şekilde verilen $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi her $n \geq 0$ için tanımlıdır ve $p_n \in [a, b]$ bağıntısını gerçekler. Diğer taraftan $|g'(x)| \leq k$ eşitsizliği ve Ortalama Değer Teoremi kullanılarak her n için $\xi_n \in (a, b)$ olmak üzere

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = |g'(\xi_n)| |p_{n-1} - p| \leq k |p_{n-1} - p| \quad (2.4)$$

ifadesi elde edilir. Bu prosedür indaktif olarak uygulandığında

$$|p_n - p| \leq k |p_{n-1} - p| \leq k^2 |p_{n-2} - p| \leq \dots \leq k^n |p_0 - p|$$

sonucuna ulaşılır. $0 < k < 1$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$ sağlanır. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p_n - p| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} k^n |p_0 - p| = 0$$

elde edilir. Yani, $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p 'ye yakınsar. \square

Sonuç 2.2.8. g fonksiyonu Teorem 2.2.7'nin koşullarını sağlıyorsa p sabit noktasma yapılan p_n yaklaşımında oluşan mutlak hata için bir sınır $n \geq 1$ olmak üzere

$$|p_n - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\} \quad (2.5)$$

ve

$$|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1 - k} |p_1 - p_0| \quad (2.6)$$

eşitsizlikleri ile elde edilir.

Kanıt. $p \in [a, b]$ olduğundan (2.4) eşitsizliğinden

$$|p_n - p| \leq k^n |p_0 - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}$$

sonucuna ulaşılır. Diğer taraftan $n \geq 1$ için Teorem 2.2.7'nin ispat tarzındaki gibi hareket ederek

$$|p_{n+1} - p_n| = |g(p_n) - g(p_{n-1})| \leq k |p_n - p_{n-1}| \leq \cdots \leq k^n |p_1 - p_0|$$

bulunur. Dolayısıyla $m > n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} |p_m - p_n| &= |p_m - p_{m-1} + p_{m-1} - p_{m-2} + p_{m-2} + \cdots + p_{n+1} - p_n| \\ &\leq |p_m - p_{m-1}| + |p_{m-1} - p_{m-2}| + \cdots + |p_{n+1} - p_n| \\ &\leq k^{m-1} |p_1 - p_0| + k^{m-2} |p_1 - p_0| + \cdots + k^n |p_1 - p_0| \\ &= k^n |p_1 - p_0| (1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p$ olduğundan

$$|p - p_n| = \lim_{m \rightarrow \infty} |p_m - p_n| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} k^n |p_1 - p_0| \sum_{i=0}^{m-n-1} k^i \leq k^n |p_1 - p_0| \sum_{i=0}^{\infty} k^i$$

sonucuna ulaşılır. Diğer taraftan $0 < k < 1$ için $\sum_{i=0}^{\infty} k^i$ serisi toplamı $\frac{1}{1-k}$ olan geometrik bir seri olduğundan

$$|p - p_n| \leq \frac{k^n}{1 - k} |p_1 - p_0|$$

eşitsizliği elde edilir. \square

Yukarıdaki sonuçta verilen her iki eşitsizlik de türevi sınırlayan k sayısına bağlıdır. Ayrıca bu k değeri ne kadar küçük olursa yakınsama hızı o kadar yüksek olacaktır. Eğer k değeri 1'e yakın ise yakınsama çok düşük bir hızda gerçekleşir.

Örnek 2.2.9. Teorem 2.2.7 ve Sonuç 2.2.8'de elde edilen sonuçları Örnek 2.2.6'da tanımlanan fonksiyonlar üzerinde uygulayalım:

(a) $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$ için $g_1(1) = 6$ ve $g_1(2) = -12$ olduğundan g_1 fonksiyonu $[1, 2]$ aralığını kendi içine resmetmez. Ayrıca, $g_1'(x) = 1 - 3x^2 - 8x$ olduğundan her $x \in [1, 2]$ için $|g_1'(x)| > 1$ sağlanır. Her ne kadar Teorem 2.2.7, g_1 şeklinde tanımlanan fonksiyonun bu metotta kullanılmayacağını söylemesede, yakınsamanın garantisi yoktur. Keza örneğe ilişkin tabloda fonksiyonun sabit noktaya yakınsamadığı görülmektedir.

(b) $g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$ şeklinde verilen fonksiyon $[1, 2]$ aralığını $[1, 2]$ içine resmetmez. Ayrıca verilen aralıkta, en azından bir $p_0 = 1.5$ noktası için $p_n = g_2(p_{n-1})$ şeklinde tanımlanan $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi tanimsızdır. Bundan daha fazla olarak, $|g_2'(p)| \approx 3.4$ olduğundan $|g_2'(x)| < 1$ eşitsizliğini sağlayan ve $p \approx 1.356$ değerini içeren bir aralık yoktur. Dolayısıyla bu metod ile yakınsama garanti edilemez.

(c) $g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $[1, 2]$ aralığında süreklidir. Ayrıca her $x \in [1, 2]$ için

$$g_3'(x) = -\frac{3}{4}x^2(10 - x^3)^{-1/2} < 0$$

olduğundan monoton azalandır. Dolayısıyla maksimum değerini sol uçta, minimum değerini ise aralığın sağ ucunda alır. Diğer yandan

$$g_3(1) = 1.5 < 2 \text{ fakat } g_3(2) = 0.7071067812 \not\approx 1$$

olduğundan g_3 fonksiyonu $[1, 2]$ aralığını kendi içine resmetmez. Ayrıca $|g_3'(2)| \approx 2.12 \not\leq 1$ olduğundan $[1, 2]$ aralığında $|g_3'(x)| \leq k < 1$ eşitsizliği de geçersizdir.

Şimdi, $[1, 2]$ aralığı yerine $p_0 = 1.5$ olmak üzere $[1, 1.5]$ aralığında $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini göz önüne alalım. $[1, 1.5]$ aralığında $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi yakınsaktır ve yukarıda olduğu gibi $g_3'(x) < 0$ sağlandığından $g_3(x)$ fonksiyonu monoton azalandır. Dolayısıyla her $x \in [1, 1.5]$ için

$$1 < 1.28 \approx g_3(1.5) \leq g_3(x) \leq g_3(1) = 1.5$$

eşitsizliği gerçekleştiğinden g_3 fonksiyonu $[1, 1.5]$ aralığını kendi içine resmeder. Diğer taraftan $|g_3'(x)| \leq |g_3'(1.5)| \approx 0.66 < 1$ sağlandığından Teorem 2.2.7'e göre yakınsaklığın sağlandığı sonucuna ulaşılır ki biz zaten yukarıdaki tabloda kök değerine bir yaklaşım elde etmiştik.

(d) $g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{4+x}}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $[1, 2]$ aralığında süreklidir. Ayrıca

$$g_4'(x) = -\frac{5}{\sqrt{10}(4+x)^{3/2}} < 0$$

olduğundan $[1, 2]$ aralığında monoton azalandır. Dolayısıyla maksimum değerini aralığın sol ucunda minimum değerini ise sağ ucunda alır. Buna göre her $x \in [1, 2]$ için

$$1 < 1.29 \approx g_4(2) \leq g_4(x) \leq g_4(1) \approx 1.41 < 2$$

eşitsizlikleri sağlandığından $g_4(x) \in [1, 2]$ bağıntısı elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} |g_4'(x)| &= \left| -\frac{5}{\sqrt{10}(4+x)^{3/2}} \right| \leq \max_{1 \leq x \leq 2} \left| \frac{5}{\sqrt{10}(4+x)^{3/2}} \right| \\ &= \left| \frac{5}{\sqrt{10}(5)^{3/2}} \right| \approx 0.14142 < 1 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ki buna göre Teorem 2.2.7'e göre yakınsama garantidir. Daha fazla olarak, türev için elde edilen birden küçük üst sınır değeri (d) şıkında yaklaşık olarak 0.14142, (c) şıkında ise 0.66 olarak elde edildiğinden Sonuç 2.2.8'e göre g_4 fonksiyonu sabit noktaya g_3 'e göre daha hızlı yakınsayacaktır. Bu olgu yukarıdaki tablodan da gözlemlenmektedir.

- (e) Sabit nokta fonksiyonun $g_5(x) = x - \frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$ şeklinde seçilmesi ile yukarıda yakınsaklığı ortaya koyduğumuz tüm fonksiyonlardan daha hızlı bir biçimde sabit noktaya yakınsayan bir $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi elde edilmiş olur. Okuyucu diğer şıklardaki gibi hareket ederek bu durumu analiz etmelidir.

Örnek 2.2.10. (a) $\sin x - \frac{x}{1.4} = 0$ denkleminin $[1, \pi/2]$ aralığındaki çözümünü Sabit-Nokta Metodu ile elde etmek için bir $g(x)$ sabit nokta fonksiyonu belirleyiniz.

- (b) (a) şıkında elde edilen $g(x)$ fonksiyonunu kullanarak $p_0 = 1.4$ olmak üzere yukarıda verilen denklemin çözümünü $\varepsilon = 10^{-6}$ hassaslıkla bulmak için yapılması gereken iterasyon sayısını hesaplayınız.

Çözüm.

- (a) $\sin x - \frac{x}{1.4} = 0 \Rightarrow x = 1.4 \sin x$ olduğundan $g(x) = 1.4 \sin x$ fonksiyonunun $[1, \pi/2]$ aralığında Sabit Nokta Teoreminin koşullarını sağladığını gösterelim. Yukarıdaki şekilde tanımlanan $g(x)$ fonksiyonun $[1, \pi/2]$ aralığında sürekli olduğu açıktır. Ayrıca $g'(x) = 1.4 \cos x$ fonksiyonu her $x \in [1, \pi/2]$ için pozitif olduğundan $g(x)$ fonksiyonu verilen aralıkta monoton artandır. Dolayısıyla maksimum değerini $\pi/2$ 'de ve minimum değerini ise 1'de alır ve $g(x)$ fonksiyonunun alacağı tüm değerler $g(\pi/2)$ ve $g(1)$ değerleri arasında olur.

$$g(\pi/2) = 1.4 \sin \frac{\pi}{2} = 1.4 < \frac{\pi}{2} = 1.5708$$

ve

$$g(1) = 1.4 \sin 1 = 1.1781 > 1$$

gerçeklendiğinden her $x \in [1, \pi/2]$ için $g(x) \in [1, \pi/2]$ sağlanır. Yani $g(x)$ fonksiyonunun $[1, \pi/2]$ aralığında en az bir sabit noktası vardır. Diğer taraftan

$$|g'(x)| = |1.4 \cos x| = 1.4 |\cos x| \leq 1.4 \max_{1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} |\cos x|$$

olduğundan $h(x) = \cos x$ dersek bu fonksiyon $x \in [1, \pi/2]$ için $h'(x) = -\sin x < 0$ özelliğini sağladığından monoton azalandır ve ekstremum değerlerini uç noktalarda alır. Buna göre

$$|h(1)| = |\cos 1| = 0.54030 > |h(\pi/2)| = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

olduğundan

$$|g'(x)| \leq 1.4 \max_{1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} |\cos x| = 1.4 \cos 1 = k = 0.75642 < 1$$

elde edilir. Dolayısıyla yukarıdaki şekilde tanımlanan $g(x)$ fonksiyonunun $[1, \pi/2]$ aralığında tek türlü belirli bir sabit noktası vardır.

(b) $p_0 = 1.4$ ise $p_1 = g(p_0) = 1.4 \sin 1.4 = 1.3796$ 'dir. n iterasyon sayısını göstermek üzere $|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0| \leq 10^{-6}$ olduğundan

$$|p_n - p| \leq \frac{0.75642^n}{1 - 0.75642} |1.3796 - 1.4| \leq 10^{-6} \Rightarrow \frac{0.75642^n}{0.24358} (0.0204) \leq 10^{-6} \Rightarrow$$

$$0.75642^n \leq 0.11940 \times 10^{-4} \Rightarrow n \log(0.75642) \leq \log(0.11940 \times 10^{-4}) \Rightarrow$$

$$n(-0.12124) \leq -4.9230 \Rightarrow n \geq 40.605$$

yani $n \geq 41$ elde edilir.

Örnek 2.2.11. Sabit Nokta Metodunu kullanarak $xe^x = 0.3$ denkleminin $[0.1, 0.9]$ aralığındaki kökünü beş-dijit yuvarlama aritmetiği kullanarak $p_0 = 0.2$ olmak üzere 10^{-4} hassaslıkla hesaplayınız.

Çözüm. $f(x) = xe^x - 0.3$ fonksiyonunun bir sabit nokta fonksiyonunun $g(x) = 0.3e^{-x}$ olduğunu gösterelim. Açık olarak üstel $g(x)$ fonksiyonu \mathbb{R} 'de ve özel olarak $[0.1, 0.9]$ aralığında süreklidir. Ayrıca $g'(x) = -0.3e^{-x} < 0$ eşitsizliği her x için sağlandığından fonksiyon monoton azalandır. Dolayısıyla $g(x)$ maksimum değerini $[0.1, 0.9]$ aralığının sol, minimum değerini ise sağ ucunda alır.

$$g(0.1) = 0.3e^{-0.1} = 0.27145 < 0.9$$

$$g(0.9) = 0.9e^{-0.9} = 0.12197 > 0.1$$

olduğundan her $x \in [0.1, 0.9]$ için $g(x) \in [0.1, 0.9]$ sağlanır. Dolayısıyla Sabit Nokta Teoremi'ne göre verilen aralıkta $g(x)$ fonksiyonunun en az bir sabit noktası vardır. Ayrıca

$$|g'(x)| = |0.3e^{-x}| \leq 0.3 \max_{0.1 \leq x \leq 0.9} e^{-x} = 0.3e^{-0.1} = 0.27145 = k < 1$$

sağlandığından yani $g(x)$ fonksiyonunun mutlak değeri üstten $k = 0.27145$ gibi birden küçük bir sayı ile sınırlı olduğundan, Sabit Nokta Teoremi'ne göre $[0.1, 0.9]$ aralığında $g(x)$ fonksiyonunun sabit noktası tek türlü belirlidir. Şimdi Sabit Nokta Metodu'nu kullanarak 10^{-4} hassaslıkla istenen kökü bulalım. Buna göre

$$p_n = g(p_{n-1}) \Rightarrow p_n = 0.3e^{-p_{n-1}}$$

olduğundan

n	p_n	$g(p_n)$	$ p_n - g(p_n) $
0	0.20000	0.24562	0.45620×10^{-1}
1	0.24562	0.23467	0.10950×10^{-1}
2	0.23467	0.23725	0.25800×10^{-2}
3	0.23725	0.23664	0.61000×10^{-3}
4	0.23664	0.23678	0.14000×10^{-3}
5	0.23678	0.23675	0.30000×10^{-4}

elde edilir. Dolayısıyla $f(x) = xe^x - 0.3$ fonksiyonun $[0.1, 0.9]$ aralığındaki kökü 10^{-4} hassaslıkla $p_5 = 0.23675$ olarak bulunur.

2.3 Newton, Secant ve Regula Falsi Metotları

Newton metodu ya da diğer bilinen bir ismi ile **Newton-Raphson metodu** kök bulma probleminde kullanılan en güçlü ve iyi bilinen metotlardan birisidir. Bu bölümde anlatılacak diğer yaklaşım teknikleri Newton metodu kullanılarak elde edilmektedir. Newton metodunu ortaya koymak için pek çok yol izlenebilir. Biz metodun inşasını Taylor polinomları ile yapacağız.

2.3.1 Newton Metodu

$f \in C^2[a, b]$ olsun. $f'(p_0) \neq 0$ ve $|p - p_0|$ farkı *yeterince küçük* olmak üzere p kök değerine $p_0 \in [a, b]$ gibi bir yaklaşım yapılsın. $f(x)$ fonksiyonunun p_0 civarında birinci Taylor polinomunu $\xi(x)$ sayısı x ile p_0 arasında olmak üzere

$$f(x) = f(p_0) + (x - p_0)f'(p_0) + \frac{(x - p_0)^2}{2}f''(\xi(x))$$

şeklinde yazılabilir. Burada eğer $x = p$ alırsa $\xi(p)$ sayısı p ile p_0 arasında olmak üzere

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2}f''(\xi(p))$$

elde edilir. $f(p) = 0$ olduğundan

$$0 = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2}f''(\xi(p))$$

eşitliğine ulaşılır.

Newton metodu $|p-p_0|$ farkının çok küçük olduğu varsayımı altında $(p-p_0)^2$ değerinin çok daha küçük olması olgusuna dayanır. Buna göre oluşan hata ihmal edilebilir bir büyüklüktedir. Dolayısıyla

$$0 \approx f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0)$$

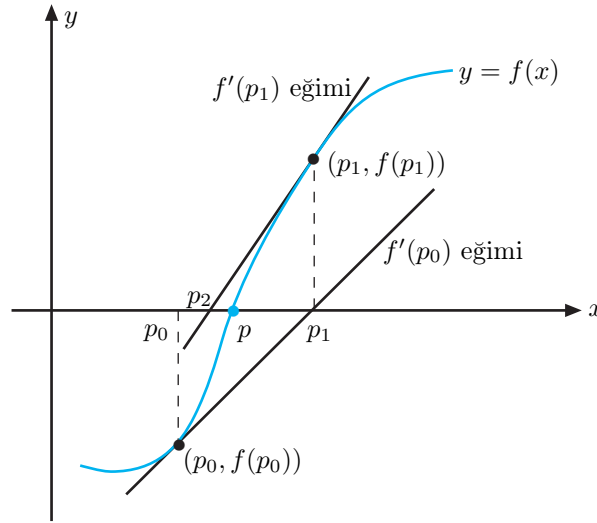
yazılabilir. Bu ifade p 'ye göre düzenlenirse

$$p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \equiv p_1, \quad f'(p_0) \neq 0$$

elde edilir. Rekürsif olarak $n \geq 1$ için $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanırsa p_0 başlangıç yaklaşımı olmak üzere Newton metodu elde edilmiş olur (Bkz. Şekil 2.9).



Şekil 2.9: Newton metodu

İkiye bölme metodunda açıklanan tüm durma kriterleri Newton metodunda da kullanılabilir. Yani, bir ε değeri verildiğinde p_1, p_2, \dots, p_k her bir adımda kök değerine yapılan yaklaşımlar olmak üzere $n = 1, \dots, k$ için

$$|p_n - p_{n-1}| < \varepsilon, \quad (2.8)$$

$$\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \varepsilon, \quad p_n \neq 0 \quad (2.9)$$

veya

$$|f(p_n)| < \varepsilon \quad (2.10)$$

eşitsizliklerinden herhangi biri sağlandığında yapılan yaklaşımın istenen hassaslıkta olduğu kabul edilebilir. Fakat biliyoruz ki ne (2.8) ne (2.9) ne de (2.10)'dan elde edilen sonuçlar $|p_n - p|$ gerçek hata değerine tam olarak eşit değildir.

Newton metodu $n \geq 1$ için

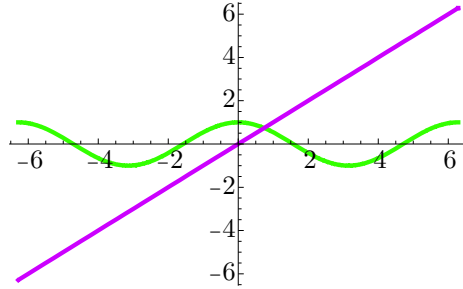
$$g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad (2.11)$$

olmak üzere $p_n = g(p_{n-1})$ şeklinde tanımlanan fonksiyonel bir iterasyon tekniğidir. Bu metodun herhangi bir n için $f'(p_{n-1}) = 0$ değerini alması durumda kullanılmayacağı (2.7)'den açıktır. Daha sonra gösterileceği üzere teknik, f' ifadesinin sıfırına uzak olması durumunda daha kuvvetli hale gelmektedir.

Örnek 2.3.1. $f(x) = \cos x - x = 0$ foksiyonu göz önüne alımsın. (a) sabit nokta ve (b) Newton metotlarını kullanarak $f(x)$ fonksiyonunun kök değerine bir yaklaşımda bulununuz.

Çözüm.

- (a) Verilen kök bulma problemi $x = \cos x$ şeklinde bir sabit nokta problemine dönüştürülebilir. Şekil 2.10'dan görüldüğü gibi $x = \cos x$ denkleminin tek türlü belirli sabit noktası $[0, \pi/2]$ aralığında yer alır.



Şekil 2.10: $x = \cos x$ ve $y = x$ eğrilerinin grafikleri

$p_0 = \pi/4$ olmak üzere $n \geq 1$ için $p_n = g(p_{n-1}) = \cos(p_{n-1})$ alınırsa sabit nokta iterasyonu ile aşağıdaki tablo elde edilir:

n	p_n
0	0.7853981635
1	0.7071067810
2	0.7602445972
3	0.7246674808
4	0.7487198858
5	0.7325608446
6	0.7434642113
7	0.7361282565

Bu aşamada dikkat edilmesi gereken bir husus yakınsamanın göz önüne alınan fonksiyon için çok yavaş olduğudur. Zira uygulanan sekiz adımda $p_n = g(p_{n-1})$ eşitliği sağlanmamıştır. Dolayısıyla adım sayısını arttırmak gerekir.

- (b) $f(x) = \cos x - x = 0$ fonksiyonunun $f'(x) = -\sin x - 1$ türevi üzerinde çalışılan $[0, \pi/2]$ aralığında sıfırdan farklı olduğundan Newton metodu kullanılabilir. Buna göre $p_0 = \pi/4$ seçilir ve $n \geq 1$ için

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} = p_{n-1} - \frac{\cos p_{n-1} - p_{n-1}}{-\sin p_{n-1} - 1}$$

dizisi göz önüne alınırsa aşağıdaki tablo değerleri elde edilir:

n	p_n
0	0.7853981635
1	0.7395361337
2	0.7390851781
3	0.7390851332
4	0.7390851332

Tabloya göre 10 ondalık basamak alınarak yapılan bu yaklaşımda p_3 ile p_4 değerleri aynı olduğundan aranan kök değerinin 0.7390851332 olduğu sonucuna ulaşılır.

2.3.1.1 Newton Metodunda Yakınsama

Örnek 2.3.1'de görüldüğü üzere Newton metodu ile az sayıda iterasyonla, yakınsaması çok hızlı yaklaşımlar yapmak mümkündür. Örnek 2.3.1'de sabit nokta metodu ile elde edilen yedinci iterasyon değerinden daha iyi bir yaklaşıma Newton metodunun ilk iterasyonunda rastlanmaktadır. Şimdi Newton metodunun neden bu kadar etkili olduğunu inceleyelim: Newton metodunun Taylor serisi kullanılarak yapılan inşasında p_0 başlangıç yaklaşımı büyük önem taşımaktadır. Aslında en kritik varsayım $|p - p_0|$ değerinin çok küçük olduğu ve dolayısıyla $(p - p_0)^2$ ifadesini içeren terimin ihmal edilebileceğidir. Bu varsayım p_0 başlangıç yaklaşımı p gerçek kök değerinden çok farklı olması durumunda geçersiz olacaktır. Eğer p_0 yaklaşımı gerçek kök değerine yeterince yakın değil ise Newton metodu ile yapılan yaklaşımda yakınsamanın sağlanamayacağı şüphesi oluşabilir. Çoğu durumda, istisnalar olmakla birlikte, zayıf başlangıç yaklaşımı altında dahi yakınsamanın gerçekleştiği gözlemlenmektedir.

Teorem 2.3.2. $f \in C^2[a, b]$ olsun. Eğer bir $p \in (a, b)$ için $f(p) = 0$ ve $f'(p) \neq 0$ koşulları sağlanıyorsa, alınan her $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$ başlangıç yaklaşımı için Newton metodu kullanılarak yaratılan $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin p kök değerine yakınsamasını sağlayacak bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

Kanıt. İspat Newton metodunun

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

olmak üzere $n \geq 1$ için $p_n = g(p_{n-1})$ şeklinde bir fonksiyonel iterasyon olarak analiz edilmesi olgusuna dayanır. k sayısı $(0, 1)$ aralığında yer alsın. g fonksiyonunun kendini kendi içine resmettiği bir $[p-\delta, p+\delta]$ aralığını, her $x \in (p-\delta, p+\delta)$ için $|g'(x)| \leq k$ eşitsizliği sağlanacak şekilde tespit edelim.

Analiz derslerinden biliyoruz ki $[a, b]$ aralığında sürekli bir h fonksiyonu için $p \in (a, b)$ olmak üzere $h(p) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, $[a, b]$ 'nin bir alt aralığı olan $[p - \delta_1, p + \delta_1]$ aralığında yer alan her x değeri için $h(x) \neq 0$ eşitsizliğini sağlayacak bir $\delta_1 > 0$ sayısı mevcuttur. $h \equiv f'$ olarak göz önüne alınabilir. Zira f' süreklidir ve $f'(p) \neq 0$ koşulunu sağlar. Buna göre bir $\delta_1 > 0$ sayısı için $x \in [p - \delta_1, p + \delta_1] \subseteq [a, b]$ olmak üzere $f'(x) \neq 0$ eşitsizliği gerçekleşir. Diğer taraftan $f \in C^2[a, b]$ ve her $x \in [p - \delta_1, p + \delta_1]$ için

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

olduğundan $g \in C^1[p - \delta_1, p + \delta_1]$ bulunur.

$f(p) = 0$ kabulü altında

$$g'(p) = \frac{f(p)f''(p)}{[f'(p)]^2} = 0$$

olduğu sonucu elde edilir. Diğer taraftan yine analiz derslerinden biliyoruz ki $[a, b]$ aralığında sürekli bir h fonksiyonu için $p \in (a, b)$ olmak üzere $h(p) = 0$ koşulu sağlanıyorsa, $[a, b]$ 'nin bir alt aralığı olan $[p - \delta, p + \delta]$ aralığında yer alan her x değeri için $|h(x)| \leq k$ eşitsizliğini sağlayacak bir $\delta > 0$ sayısı mevcuttur. Gerekli koşulları sağladığından $h \equiv g'$ alınabilir. Bu durumda $0 < \delta < \delta_1$ koşulunu sağlayan bir δ sayısı için $x \in [p - \delta, p + \delta] \subseteq [a, b]$ olmak üzere $|g'(x)| \leq k$ eşitsizliği gerçekleşir.

Şimdi g fonksiyonunun $[p - \delta, p + \delta]$ aralığını kendi içine resmettiğini gösterelim: Ortalama Değer Teoremi'ne göre $x \in [p - \delta, p + \delta]$ için $|g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x - p|$ eşitliğini sağlayacak bir ξ sayısı x ile p arasında mevcuttur. Buna göre

$$|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x - p| \leq k|x - p| < |x - p|$$

elde edilir. x sayısı $x \in [p - \delta, p + \delta]$ aralığında yer aldığından $|x - p| < \delta$ sağlanır ve dolayısıyla $|g(x) - p| < \delta$ olduğu sonucuna ulaşılır. $|g(x) - p| < \delta$ yazılımından her $x \in [p - \delta, p + \delta]$ için $p - \delta \leq g(x) \leq p + \delta$ eşitsizliği elde edildiğinden g fonksiyonunun $[p - \delta, p + \delta]$ aralığını kendi içine resmettiği bulunur.

Yukarıda elde edilen tüm çıkarımlardan $g(x)$ fonksiyonunun $[p - \delta, p + \delta]$ aralığında Sabit Nokta Teoreminin (Teorem 2.2.7) koşullarını sağladığı sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla ner $n \geq 1$ için

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

şeklinde tanımlanan $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi her $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$ başlangıç yaklaşımı için p kök değerine yakınsar. \square

Teorem 2.3.2'den anlaşılacağı üzere uygun p_0 ilk yaklaşımı ile Newton metodu kök değerine yakınsayan bir dizi elde etmemize olanak tanır. Ayrıca g fonksiyonunun sınırı olan k sayısı yakınsamanın hızında önemli rol oynar. Buna göre k sayısı 0'a ne kadar yakın ise yakınsama o kadar hızlı olacaktır. Bu sonuç Newton metodu için önemli olmakla birlikte δ sayısının ne şekilde belirleneceği konusunda herhangi bir bilgi vermediğinden uygulamada nadiren kullanılır.

Örnek 2.3.3. $p_0 = 3$ başlangıç yaklaşımı olmak üzere beş-dijit yuvarlama aritmetiği kullanarak $y = x^3 - 4x - 5$ ve $y = e^x - 4x - 5$ eğrilerinin bir kesim noktasını Newton metodunu ile $\varepsilon = 10^{-3}$ hassaslıkla hesaplayınız.

Çözüm. Bu iki eğri aynı bir (x, y) noktasında kesişeceğinden $x^3 - 4x - 5 = e^x - 4x - 5 \Rightarrow x^3 = e^x$ eşitliğini sağlayan x noktası ya da buna denk olarak $f(x) = x^3 - e^x$ fonksiyonunun kökleri aranmalıdır. $f(x)$ fonksiyonu her mertebeden sürekli türevlere sahip ve $f'(x) = 3x^2 - e^x$ türev fonksiyonu $p_0 = 3$ başlangıç yaklaşımı için $f'(p_0) = f'(3) = 3 \cdot 3^2 - e^3 = 6.9145 \neq 0$ sağladığından Newton metodu kullanılabilir. Buna göre $p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$ için gerekli işlemler aşağıdaki gibi yapılır:

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{6.9145}{6.9145} = 2 \Rightarrow$$

$$|f(p_1)| = |f(2)| = 0.61094 > \varepsilon$$

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{0.61094}{4.6109} = 1.8675 \Rightarrow$$

$$|f(p_2)| = |f(1.8675)| = 0.40915 \times 10^{-1} > \varepsilon$$

$$p_3 = p_2 - \frac{f(p_2)}{f'(p_2)} = 1.8675 - \frac{f(1.8675)}{f'(1.8675)} = 1.8675 - \frac{0.040915}{3.9906} = 1.8572 \Rightarrow$$

$$|f(p_3)| = |f(1.8572)| = 0.63619 \times 10^{-4} < \varepsilon$$

n	p_n	$ f(p_n) $
0	3	6.9145
1	2	0.61094
2	1.8675	0.40915×10^{-1}
3	1.8572	0.63619×10^{-4}

Buna göre yukarıda verilen iki eğrinin kesim noktasının apsisine, 10^{-3} hassaslıkla yapılan yaklaşımın değeri $p_3 = 1.8572$ olarak elde edilir.

2.3.2 Secant Metodu

Newton metodu çok güçlü bir kök bulma tekniği olmakla birlikte her iterasyonda f fonksiyonunun türevinin aldığı değer kontrol edilmesi gerekliliği bir

zorluk olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu problemi ortadan kaldırarak Newton metodundan daha zayıf bir metot elde etmek mümkündür.

Bir p_{n-1} noktasındaki türev

$$f'(p_{n-1}) = \lim_{x \rightarrow p_{n-1}} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}}$$

ifadesi ile verildiğinden p_{n-1} değerinin p_{n-2} 'ye yakın olduğu kullanılarak

$$f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-2}) - f(p_{n-1})}{p_{n-2} - p_{n-1}} = \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}$$

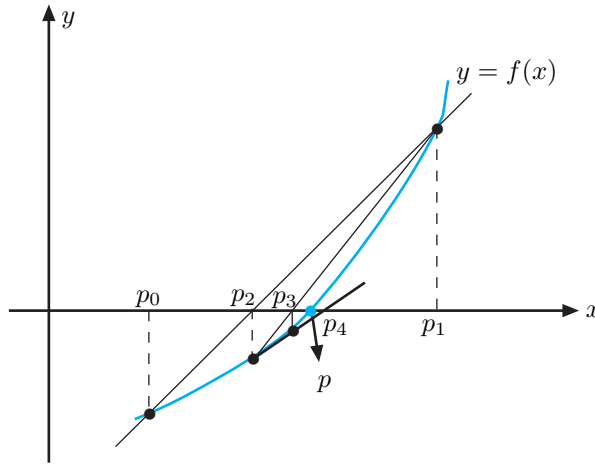
elde edilir. Bu yaklaşım değeri

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

şeklinde verilen Newton metodunda kullanılırsa

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{\frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}} \\ &= p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})} \end{aligned} \quad (2.12)$$

ifadesine ulaşılır. Yukarıda ifade edilen kök bulma tekniğine **Secant Metodu** adı verilir (Bkz. Şekil 2.11). Sekant metodunda Newton'dan farklı olarak p_0 ve p_1 gibi iki tane başlangıç yaklaşımı belirlemek gerekir.



Şekil 2.11: Secant metodu

Örnek 2.3.4. Örnek 2.3.1'de göz önüne alınan $x = \cos x$ denkleminin çözümüne Secant metodunu kullanarak yaklaşımlarda bulununuz. Bulduğunuz bu yaklaşımları Newton metodu ile elde edilen yaklaşımlarla kıyaslayınız.

Çözüm. $f(x) = \cos x - x$ olmak üzere, Örnek 2.3.1'de $p_0 = \pi/4$ başlangıç yaklaşımı için Newton ve sabit nokta metotları ile elde edilen yaklaşımların karşılaştırılması yapılmıştı. Şimdi problemi Secant metodu ile çözelim. Bunun için iki tane başlangıç yaklaşımına ihtiyaç vardır. $p_0 = 0.5$ ve $p_1 = \pi/4$ olarak seçilsin. $n \geq 2$ için

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})} \\ &= p_{n-1} - \frac{(\cos p_{n-1} - p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{(\cos p_{n-1} - p_{n-1}) - (\cos p_{n-2} - p_{n-2})} \end{aligned}$$

iterasyonu yapılarak aşağıdaki tablo elde edilir:

n	p_n
0	0.5000000000
1	0.7853981635
2	0.7363841388
3	0.7390581392
4	0.7390851493
5	0.7390851332

Örnek 2.3.1'den biliyoruz ki on ondalık basamak kullanılarak yapılan yaklaşım ile elde edilen kök değeri 0.7390851332'dir ve bu değere Newton metodu ile p_3 yaklaşımında, Secant metodu ile p_5 yaklaşımında ulaşılmıştır. Bu örnekte Secant metodunun yakınsama hızı Newton metoduna göre daha yavaş iken sabit nokta iterasyonu metodunun yakınsama hızına kıyasla çok daha hızlıdır.

Örnek 2.3.5. $p_0 = 1$ ve $p_1 = 1.2$ olmak üzere Secant Metodunu kullanarak $\ln x = \cos x$ denkleminin bir çözümünü beş-dijit yuvarlama aritmetiği ile $\varepsilon = 10^{-3}$ hassaslıkla hesaplayınız.

Çözüm. $f(x) = \ln x - \cos x$ olsun. Bu denklemin kökleri bize yukarıdaki eşitliği sağlayan x değerini verir. Şimdi Secant metodunu uygulayarak $\varepsilon = 10^{-3}$ hassaslıkla $p_0 = 1$ ve $p_1 = 1.2$ için köke yaklaşım yapalım.

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
p_2 &= p_1 - \frac{f(p_1)(p_1 - p_0)}{f(p_1) - f(p_0)} = 1.2 - \frac{f(1.2)(1.2 - 1)}{f(1.2) - f(1)} \\
&= 1.2 - \frac{(-0.18004)(0.2)}{(-0.18004) - (-0.54030)} = 1.3 \\
f(p_2) &= f(1.3) = -0.51346 \times 10^{-2} \Rightarrow \\
|f(p_2)| &= |f(1.3)| = 0.51346 \times 10^{-2} > \varepsilon = 10^{-3} \\
p_3 &= p_2 - \frac{f(p_2)(p_2 - p_1)}{f(p_2) - f(p_1)} = 1.3 - \frac{f(1.3)(1.3 - 1.2)}{f(1.3) - f(1.2)} \\
&= 1.3 - \frac{(-0.51346 \times 10^{-2})(1.3 - 1.2)}{(-0.51346 \times 10^{-2}) - (-0.18004)} = 1.3029 \\
f(p_3) &= f(1.3029) = -0.11084 \times 10^{-3} \Rightarrow \\
|f(p_3)| &= |f(1.3029)| = 0.11084 \times 10^{-3} \leq \varepsilon = 10^{-3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre aranan kök $p \approx p_3 = 1.3029$ olarak hesaplanır.

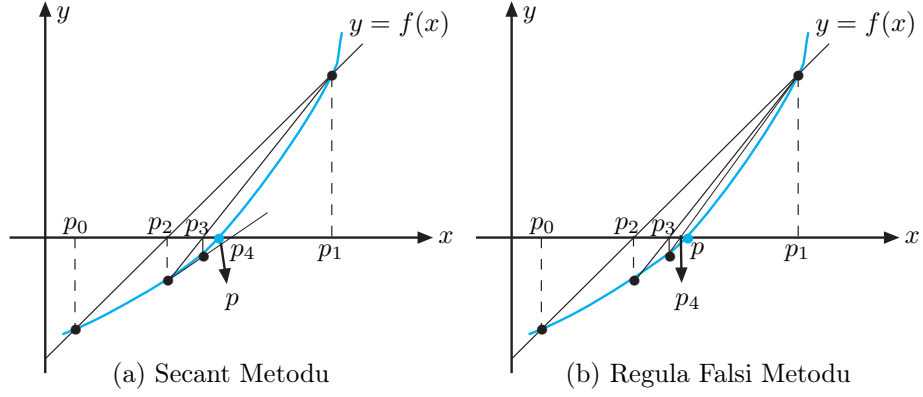
n	p_n	$ f(p_n) $
0	1	$ -0.54030 $
1	1.2	$ -0.18004 $
2	1.3	$ -0.51346 \times 10^{-2} $
3	1.3029	$ 0.11084 \times 10^{-3} $

2.3.3 Regula Falsi Metodu

Eğer bir yaklaşımda Secant metodunu kullanarak iterasyonlar oluşturur, aynı zamanda ikiye bölme metodunda olduğu gibi her bir adımda kökü ihtiva eden aralığı test ederek ilerlersek **Regula Falsi Metodu** ile bir yaklaşımda bulunmuş oluruz.

Bu metotla önce $f(p_0)f(p_1) < 0$ koşulunu sağlayan p_0 ve p_1 başlangıç yaklaşımları seçilir. Daha sonra Secant metodunda elde edilen iteratif formül kullanılarak, $(p_0, f(p_0))$ ve $(p_1, f(p_1))$ noktalarını birleştiren doğrunun x eksenini kestiği nokta olan p_2 yaklaşımı bulunur. p_3 yaklaşımını elde etmek için $f(p_0)$, $f(p_1)$ ve $f(p_2)$ değerlerinin işaretlerine bakılır. Eğer $f(p_1)f(p_2) < 0$ ise $(p_1, f(p_1))$ ve $(p_2, f(p_2))$ noktalarını birleştiren doğrunun x eksenini kestiği nokta p_3 yaklaşımı olarak elde edilir. Eğer $f(p_0)f(p_2) < 0$ ise $(p_0, f(p_0))$ ve $(p_2, f(p_2))$ noktalarını birleştiren doğrunun x eksenini kestiği nokta p_3 yaklaşımı olarak elde edilir. Bu prosedür tekrarlanarak p_4, p_5, \dots yaklaşımları bulunur.

Şekil 2.12'de grafik anlamda Secant ve Regula Falsi metodu arasındaki fark gösterilmektedir. Secant metodunda işaretine bakılmaksızın elde edilen ardışık yaklaşım noktalarını birleştiren doğrunun x eksenini kestiği noktanın yeni yaklaşım değeri olarak elde edilmesine karşın, Regula Falsi metodunda ardışık yaklaşım noktalarını birleştiren doğru parçasının x eksenini kestiği yeni yaklaşım noktasının işaretinin kendinden önceki iki yaklaşımın işaretleri ile karşılaştırılması yapılmaktadır. Şekil 2.12'de görüldüğü üzere Secant ve Regula



Şekil 2.12: Regula Falsi metodu

Falsi metotları ile elde edilen p_2 ve p_3 yaklaşımlarının değerleri aynı iken p_4 yaklaşımları birbirinden farklıdır.

Örnek 2.3.6. Örnek 2.3.1’de göz önüne alınan $x = \cos x$ denkleminin çözümüne Regula Falsi metodunu kullanarak yaklaşımlarda bulununuz. Bulduğunuz bu yaklaşımları Örnek 2.3.1 ve Örnek 2.3.4’de elde edilen yaklaşımlarla kıyaslayınız.

Çözüm. Bir kıyaslama yapılmasına olanak sağlaması bakımından $p_0 = 0.5$ ve $p_1 = \pi/4$ olarak seçilsin. $n \geq 2$ için yine Secant metodunda olduğu gibi

$$\begin{aligned}
 p_n &= p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})} \\
 &= p_{n-1} - \frac{(\cos p_{n-1} - p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{(\cos p_{n-1} - p_{n-1}) - (\cos p_{n-2} - p_{n-2})}
 \end{aligned}$$

formülü kullanılarak her aşamada elde edilen $f(p_n)$ değerinin işareti de göz önüne alınırsa aşağıdaki tablo elde edilir:

n	p_{n-2}	p_n	p_{n-1}	$f(p_n)$
0		0.5000000000		0.3775825619
1		0.7853981634		-0.07829138221
2	0.5000000000	0.7363841388	0.7853981634	0.0045177185
3	0.7363841388	0.7390581392	0.7853981634	0.0000451772
4	0.7390581392	0.7390848638	0.7853981634	$4.5087180833 \times 10^{-7}$
5	0.7390848638	0.7390851305	0.7853981634	$4.4996427695 \times 10^{-9}$
6	0.7390851305	0.7390851332	0.7853981634	$4.4905856811 \times 10^{-11}$

Şimdi Örnek 2.3.1, Örnek 2.3.4 ve Örnek 2.3.6’de farklı yöntemlerle yapılan yaklaşımları beraber görelim:

	Sabit Nokta M.	Newton M.	Secant M.	Regula Falsi M.
n	p_n	p_n	p_n	p_n
0	0.785398164	0.7853981635	0.5000000000	0.5000000000
1	0.707106781	0.7395361337	0.7853981635	0.7853981634
2	0.760244597	0.7390851781	0.7363841388	0.7363841388
3	0.724667481	0.7390851332	0.7390581392	0.7390581392
4	0.748719886	0.7390851332	0.7390851493	0.7390848638
5	0.732560845		0.7390851332	0.7390851305
6	0.743464211			0.7390851332
7	0.736128257			

Regula Falsi metodunda ilk iki yaklaşım sayılmaz ise Secant metodunda yapılan adım sayısı ile aynı hassaslığa sahip yaklaşım değerinin elde edildiği görülür. Bununla beraber Regula Falsi metodu içerdiği hesap yoğunluğundan ötürü çokça tercih edilmeyecektir.

2.4 İteratif Metotlarda Hata Analizi

Bu bölümde fonksiyonel iterasyon yapılarının yakınsama hızları incelenecek ve daha hızlı bir yakınsama elde etmek bakımından Newton metodu üzerinde bazı düzenlemeler yapılacaktır.

2.4.1 Yakınsamanın Mertebesi

Tanım 2.4.1. $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p değerine yakınsam ve her $n \geq 0$ için $p_n \neq p$ koşulu sağlansın. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^\alpha} = \lambda$$

eşitliğini sağlayan α ve λ pozitif sabitleri varsa $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ **dizisi p değerine λ asimtotik hata sabiti ile α mertebesinde yakınsar** denir.

Eğer $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $p = g(p)$ çözümüne α mertebesinde yakınsıyor ise, $p_n = g(p_{n-1})$ formundaki bir iteratif tekniğin α mertebesinde olduğu söylenir.

Genelde, yüksek mertebeden yakınsaklığa sahip bir dizinin düşük mertebeden yakınsaklığa sahip bir diziye göre yakınsaması daha hızlıdır. Asimtotik hata sabiti, yakınsama hızını etkiler fakat mertebeyi iyileştirmez. Aşağıda verilen iki merteye özellikle önemlidir:

(i) eğer $\alpha = 1$ (ve $\lambda < 1$) ise dizi **lineer (doğrusal) yakınsak**,

(ii) eğer $\alpha = 2$ ise dizi **kuadratik yakınsak**,

denir.

Aşağıdaki örnekte lineer yakınsak bir dizi ile kuadratik yakınsamaya sahip bir dizinin karşılaştırması yapılmaktadır. Ayrıca, neden yüksek mertebeden yakınsamaya sahip diziler kullanarak yeni metodlar bulmaya çalıştığımız anlatılmaktadır.

Örnek 2.4.2. $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi lineer olarak $\lambda = 0.5$ asimtotik hata sabiti ile 0'a yakınsasın:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - 0|}{|p_n - 0|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1}|}{|p_n|} = 0.5.$$

Benzer şekilde, $\{\bar{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi kuadratik olarak $\lambda = 0.5$ asimtotik sabiti ile 0'a yakınsasın:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\bar{p}_{n+1} - 0|}{|\bar{p}_n - 0|^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\bar{p}_{n+1}|}{|\bar{p}_n|^2} = 0.5.$$

Kolaylık sağlaması bakımından her n için

$$\frac{|p_{n+1}|}{|p_n|} \approx 0.5 \quad \text{ve} \quad \frac{|\bar{p}_{n+1}|}{|\bar{p}_n|^2} \approx 0.5$$

yazılabilir. Lineer yakınsama yapısında

$$|p_n - 0| = |p_n| \approx 0.5|p_{n-1}| \approx 0.5^2|p_{n-2}| \approx \dots \approx 0.5^n|p_0| \Rightarrow |p_n| \approx 0.5^n|p_0|$$

ifadesi geçerli iken kuadratik yakınsama yapısı ile

$$\begin{aligned} |\bar{p}_n - 0| = |\bar{p}_n| &\approx 0.5|\bar{p}_{n-1}|^2 \approx 0.5(0.5|\bar{p}_{n-2}|^2)^2 = 0.5^3|\bar{p}_{n-2}|^4 \\ &\approx 0.5^3(0.5|\bar{p}_{n-3}|^2)^4 = 0.5^7|\bar{p}_{n-3}|^8 \approx \dots \approx 0.5^{2^n-1}|\bar{p}_0|^{2^n} \Rightarrow |\bar{p}_n| \approx 0.5^{2^n-1}|\bar{p}_0|^{2^n} \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Aşağıdaki tablo $|p_0| = |\bar{p}_0| = 1$ alınması durumunda 0'a yakınsayan her iki dizinin de yakınsama hızını göstermektedir:

n	Lineer Yakınsak $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi 0.5^n	Kuadratik Yakınsak $\{\bar{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi 0.5^{2^n-1}
1	5.0000×10^{-1}	5.0000×10^{-1}
2	2.5000×10^{-1}	1.1250×10^{-1}
3	1.2500×10^{-1}	7.8125×10^{-3}
4	6.2500×10^{-2}	3.0518×10^{-5}
5	3.1250×10^{-2}	4.6566×10^{-10}
6	1.5625×10^{-2}	1.0842×10^{-19}
7	7.8125×10^{-3}	5.8775×10^{-39}

Buna göre kuadratik yakınsak $\{\bar{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi 7. terimde sifıra 10^{-38} hassaslık ile yaklaşırken, lineer yakınsak $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin aynı hassaslığı yakalaması için en az 126 terim gerekmektedir.

Örnek 2.4.3. (a) $\{\frac{1}{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$, (b) $\{\frac{1}{2^n}\}_{n=0}^{\infty}$ ve (c) $\{2^{-(3/2)^n}\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerinin yakınsaklık mertebelerini ve asimtotik hata sabitlerini tespit ediniz. Bulduğunuz sonuçlara göre (b) ve (c) ile verilen dizileri karşılaştırmınız.

Çözüm. (a) $p_n = \frac{1}{n+1}$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için $p_n \rightarrow 0$ sağlanır. Yani $p = 0$ 'dır. Buna göre yukarıda verilen tanım göz önüne alındığında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{1}{n+2} - 0 \right|}{\left| \frac{1}{n+1} - 0 \right|^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1 = \lambda$$

eşitliği elde edilir. Yani, verilen dizinin yakınsamasının mertebesi $\alpha = 1$ ve asimtotik hata sabiti ise $\lambda = 1$ olarak bulunur.

(b) $p_n = \frac{1}{2^n}$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için $p_n \rightarrow 0$ sağlanır. Yani $p = 0$ 'dır. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{1}{2^{n+1}} - 0 \right|}{\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right|^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n\alpha}}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{1}{2^{n(1-\alpha)}}$$

elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n(1-\alpha)}}$ limit değeri $\alpha = 1$ için 1'e eşittir. Dolayısıyla eğer $\alpha = 1$ almırsa verilen dizinin sifıra $\lambda = 1/2$ asimtotik hata sabitine sahip olarak lineer yakınsadığı sonucuna ulaşılır.

(c) $p_n = 2^{-(3/2)^n}$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için $p_n \rightarrow 0$ sağlanır. Yani $p = 0$ 'dır. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| 2^{-(3/2)^{n+1}} - 0 \right|}{\left| 2^{-(3/2)^n} - 0 \right|^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-(3/2)^n(3/2-\alpha)}$$

elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-(3/2)^n(3/2-\alpha)}$ limit değeri $\alpha = 3/2$ için 1'e eşittir. Dolayısıyla eğer $\alpha = 3/2$ almırsa verilen dizinin sifıra $\lambda = 1$ asimtotik hata sabitine sahip olarak $3/2$ mertebesinde yakınsadığı sonucuna ulaşılır.

Şimdi istenen karşılaştırmayı yapalım: $p_n = \frac{1}{2^n}$ ve $q_n = 2^{-(3/2)^n}$ olmak üzere bazı n değerleri için

n	p_n	q_n
0	1.00000	0.50000000
1	0.50000	0.35355300
2	0.25000	0.21022400
3	0.12500	0.09638820
4	0.06250	0.02992510
5	0.03125	0.00517671

tablosu elde edilir. $\{q_n\}_{n=0}^\infty$ dizisinin yakınsama mertebesi $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ dizisine göre daha yüksek olduğundan her iki dizinin de yakınsadığı nokta olan 0 değerine $\{q_n\}_{n=0}^\infty$ dizisi $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ 'den daha önce ulaşacaktır.

Teorem 2.4.4. $g \in C[a, b]$ ve her $x \in [a, b]$ için $g(x) \in [a, b]$ olsun. Bunlara ek olarak g' türevi (a, b) aralığında sürekli ve her $x \in (a, b)$ için

$$|g'(x)| \leq k$$

eşitsizliğini sağlayan bir $0 < k < 1$ sayısı var olsun. Eğer $g'(p) \neq 0$ ise $[a, b]$ aralığındaki her $p_0 \neq p$ sayısı için

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanan dizi $[a, b]$ aralığında tek türlü belirli bir p sabit noktasına sadece lineer olarak yakınsar.

Kanıt. Sabit Nokta Teoreminden (Teorem 2.2.7) p_n dizisinin p 'ye yakınsadığının biliyoruz. (a, b) aralığında g' türevi mevcut olduğundan Ortalama Değer Teoremi'ne göre her n için

$$p_{n+1} - p = g(p_n) - g(p) = g'(\xi_n)(p_n - p)$$

eşitliğini gerçekleyecek p_n ile p arasında bir ξ_n sayısı mevcuttur. Ayrıca $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p değerine yakınsadığından $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi de p 'ye yakınsar. (a, b) aralığında g' sürekli olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g'(\xi_n) = g'(p)$$

eşitliği gerçekleşir. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} = \lim_{n \rightarrow \infty} g'(\xi_n) = g'(p)$$

ve buradan da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|} = |g'(p)|$$

sonucu elde edilir. Buna göre $g'(p) \neq 0$ ise sabit nokta iterasyonunun yakınsaması $|g'(p)|$ asimtotik hata sabiti olmak üzere lineerdir. \square

Teorem 2.4.4'e göre $g(p) = p$ formundaki bir sabit nokta iterasyonunda yüksek mertebeden yakınsaklık $g'(p) = 0$ olması durumunda ortaya çıkar. Aşağıdaki teorem kuadratik yakınsamanın sağlanması için ne gibi ek koşullar getirilmesi gerektiğini ifade etmektedir.

Teorem 2.4.5. $x = g(x)$ denkleminin bir çözümü p ve $g'(p) = 0$ olsun. Ayrıca p noktasını içeren bir I açık aralığında $|g''(x)| < M$ eşitsizliği sağlanmak üzere g'' türev ifadesi sürekli olsun. Buna göre $n \geq 1$ için $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$ olmak üzere $p_n = g(p_{n-1})$ şeklinde tanımlanan dizinin en az kuadratik olarak p değerine yakınsadığı bir $\delta > 0$ sabiti vardır. Ayrıca, yeterince büyük n değerleri için

$$|p_{n+1} - p_n| < \frac{M}{2} |p_n - p|^2$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Kanıt. $k \in (0, 1)$ olsun. Ayrıca $|g'(x)| \leq k$ ve g'' türevinin sürekli olduğu I açık aralığı tarafından içerilen bir $[p - \delta, p + \delta]$ aralığı $\delta > 0$ için mevcut olsun. Teorem 2.3.2'nin ispatında gösterildi ki $|g'(x)| \leq k < 1$ eşitsizliği gerçekleştiğinden $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin terimleri $[p - \delta, p + \delta]$ aralığı içinde yer alır. Eğer $g(x)$ fonksiyonun lineer Taylor polinomunu p civarında yazarsak, ξ sayısı p ile $x \in [p - \delta, p + \delta]$ arasında olmak üzere

$$g(x) = g(p) + g'(p)(x - p) + \frac{g''(\xi)}{2}(x - p)^2$$

eşitliği elde edilir. $g(p) = p$ ve $g'(p) = 0$ hipotez koşulları yukarıda yazılırsa

$$g(x) = p + \frac{g''(\xi)}{2}(x-p)^2$$

bulunur. Özel olarak $x = p_n$ için ξ_n sayısı p_n ile p arasında yer almak üzere

$$p_{n+1} = g(p_n) = p + \frac{g''(\xi_n)}{2}(p_n - p)^2$$

ve buradan

$$p_{n+1} - p = \frac{g''(\xi_n)}{2}(p_n - p)^2$$

eşitliğine ulaşılır. $[p - \delta, p + \delta]$ aralığında $|g'(x)| \leq k < 1$ olduğundan g fonksiyonu $[p - \delta, p + \delta]$ aralığını kendi içine resmeder. Dolayısıyla Sabit Nokta Teoreminden $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin p değerine yakınsadığı sonucu elde edilir. Diğer taraftan her n için ξ_n sayısı p ile p_n arasında yer aldığından $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi de p 'ye yakınsar ve buna göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^2} = \frac{|g''(p)|}{2}$$

eşitliği geçerlidir. Son ifadeden elde edilen neticeler $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin kuadratik olarak yakınsadığı ve daha yüksek dereceden bir yakınsamanın sağlanması için $g''(p) = 0$ değerini alması gerektiğidir.

$[p - \delta, p + \delta]$ aralığında g'' fonksiyonu sürekli ve üstten M sayısı ile sınırlı olduğundan yeterince büyük n değerleri için

$$|p_{n+1} - p| < \frac{M}{2}|p_n - p|^2$$

eşitsizliğinin sağlandığı sonucu elde edilir. □

Sabit nokta metodu ile kuadratik bir yakınsama elde etmek için $g(p) = p$ eşitliğinin yanı sıra $g'(p) = 0$ ifadesinin de sağlanması gerekir. Şimdi bu iki eşitliği sağlayacak ve $f(x) = 0$ kök bulma problemi ile ilişkili sabit nokta fonksiyonunun ne şekilde belirleneceği üzerinde duralım.

ϕ daha sonra belirlenecek diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$g(x) = x - \phi(x)f(x)$$

formundaki g fonksiyonu kullanılarak oluşturulan

$$p_n = g(p_{n-1}) \quad n \geq 1$$

dizisini göz önüne alalım.

Uygulanacak iteratif metod ile kuadratik yakınsamanın sağlanması için $f(p) = 0$ değerini sağlayan p noktasında $g'(p) = 0$ olmalıdır. Buna göre

$$g'(x) = 1 - \phi'(x)f(x) - f'(x)\phi(x)$$

ve burada $f(p) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$g'(p) = 1 - f'(p)\phi(p)$$

bulunur. Yani, $g'(p) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\phi(p) = 1/f'(p)$ eşitliğinin gerçekleşmesidir.

Eğer $\phi(x) = 1/f'(x)$ olarak seçilir ise $\phi(p) = 1/f'(p)$ eşitliğinin sağlanması garanti altına alınmış olur. Bu durumda iterasyon için

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

ifadesi elde edilir. Bu ise Newton metodu ile verilen iterasyon formülünden başkası değildir.

Yukarıda anlatılanların ışığında $f(p) = 0$ ve $f'(p) \neq 0$ olması durumunda p 'ye yeterince yakın bir değerle başlayarak Newton metodunu kullanmak sureti ile yapılan bir yaklaşımın mertebesi en az kuadratik olacaktır.

2.4.2 Katlı Kök

Yukarıda anlatıldığı üzere $f(x) = 0$ fonksiyonunun köklerinin bulunması probleminde yüksek mertebeden yakınsamaya sahip bir iteratif metot kullanılmak istendiğinde p değeri verilen fonksiyonun kökü olmak üzere $f'(p) \neq 0$ eşitsizliğinin sağlanması gerekir. Özel olarak Newton ve Secant metotlarında $f(p) = 0$ kök değeri için $f'(p) = 0$ eşitliğinin gerçekleşmesi bazı zorluklara neden olmaktadır. Şimdi bu durumu irdelemek için aşağıdaki tanımı verelim:

Tanım 2.4.6. $x \neq p$ ve $\lim_{x \rightarrow p} q(x) \neq 0$ olmak üzere $f(x) = 0$ fonksiyonunun bir p kökü için

$$f(x) = (x - p)^m q(x)$$

eşitliği sağlanıyorsa bu p kökü **m -katlı sıfır yeri** olarak adlandırılır.

Yukarıda sözü edilen q fonksiyonu aslında f 'nin herhangi bir sıfır yerini barındırmayan bir parçasıdır. Şimdi verilen bir fonksiyonun 1-katlı sıfır yeri, yani **basit sıfırı** olup olmadığını belirlememize yardımcı olan aşağıdaki teoremi inceleyelim.

Teorem 2.4.7. Bir $f \in C^1[a, b]$ fonksiyonunun $p \in (a, b)$ noktasında basit sıfırı olması için gerek ve yeter şart $f'(p) \neq 0$ olmak üzere $f(p) = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

Kanıt. f fonksiyonunun p noktasında basit sıfıra sahip olsun. Bu durumda

$$\lim_{x \rightarrow p} q(x) \neq 0$$

olmak üzere $f(x) = (x - p)q(x)$ eşitliği sağlanır. $f \in C^1[a, b]$ olduğundan

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} f'(x) = \lim_{x \rightarrow p} [q(x) + (x - p)q'(x)] = \lim_{x \rightarrow p} q(x) \neq 0$$

sonucu elde edilir. Yani $f'(p) \neq 0$ 'dır. Tersine $f'(p) \neq 0$ olmak üzere $f(p) = 0$ eşitliği sağlansın. f fonksiyonunun p civarında sıfırcı Taylor polinomu, $\xi(x)$ sayısı x ile p arasında olmak üzere

$$f(x) = f(p) + f'(\xi(x))(x - p) = f'(\xi(x))(x - p)$$

şeklinde yazılabilir. $f \in C^1[a, b]$ olduğundan

$$\lim_{x \rightarrow p} f'(\xi(x)) = f' \left(\lim_{x \rightarrow p} \xi(x) \right) = f'(p) \neq 0$$

neticesi elde edilir. Diğer taraftan sıfırcı Taylor polinomunda $q = f' \circ \xi$ alınırsa

$$f(x) = (x - p)q(x)$$

sonucuna ulaşılır ki bu ise f fonksiyonunun p noktasında basit sıfırı olduğunu gösterir. \square

Aşağıdaki teorem, Teorem 2.4.7'nin bir genelleştirilmesi olarak verilmektedir.

Teorem 2.4.8. $f \in C^m[a, b]$ fonksiyonun bir $p \in (a, b)$ noktasında m -kath sıfır yeri olması için gerek ve yeter şart $f^{(m)}(p) \neq 0$ olmak üzere

$$0 = f(p) = f'(p) = f''(p) = \dots = f^{(m-1)}(p)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Teorem 2.4.7'ye göre eğer p noktası f 'nin basit sıfırı ise p 'nin civarındaki bir aralıkta Newton metodu kullanılarak elde edilen iterasyon her p_0 başlangıç yaklaşımı için p kök değerine kuadratik olarak yakınsar. Aşağıda sıfır yerinin basit olmaması durumunda kuadratik yakınsamanın sağlanamayabileceğine bir örnek verilmektedir.

Örnek 2.4.9. $f(x) = e^x - x - 1$ olsun. **(a)** $x = 0$ noktasının f fonksiyonunun 2-katlı sıfır yeri olduğunu gösteriniz. **(b)** $p_0 = 1$ olmak üzere Newton metodunun yakınsadığını fakat yakınsamanın kuadratik olmadığını gösteriniz.

Çözüm. **(a)** $f(x) = e^x - x - 1$, $f'(x) = e^x - 1$ ve $f''(x) = e^x$ için

$$f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0, \quad f'(0) = e^0 - 1 = 0 \quad \text{ve} \quad f''(0) = e^0 = 1 \neq 0$$

sağlandığından Teorem 2.4.8'e göre $x = 0$ noktası f fonksiyonunun 2-katlı sıfır yeridir.

(b) $p_0 = 1$ olmak üzere Newton metodunu f fonksiyonuna uygulamak suretiyle elde edilen ilk iki iterasyon değeri

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} = 1 - \frac{e - 2}{e - 1} \approx 0.58197671$$

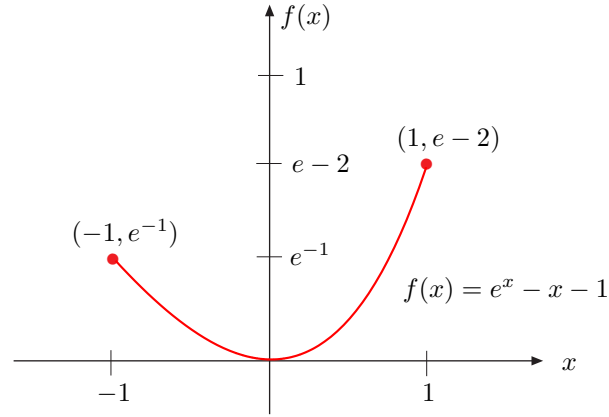
ve

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)} \approx 0.58197671 - \frac{0.20759569}{0.78957240} \approx 0.31905504$$

dır. Benzer şekilde hareket ederek elde edilen ilk 16 iterasyon değeri aşağıda gösterilmektedir:

n	p_n	n	p_n
0	1.00000000	9	0.00277501
1	0.58197671	10	0.00138815
2	0.31905504	11	0.00069424
3	0.16799617	12	0.00034716
4	0.08634887	13	0.00017359
5	0.04379570	14	0.00008680
6	0.02205769	15	0.00004340
7	0.01106939	16	0.00002170
8	0.00554490		

Görüldüğü üzere açıkça dizi sifıra yakınsıyor ama kuadratik olarak değil. f fonksiyonunun grafiği Şekil 2.13'de gösterilmektedir.



Şekil 2.13: $f(x) = e^x - x - 1$ fonksiyonunun grafiği

Örnek 2.4.10. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ ve $g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ fonksiyonları göz önüne alınsın. $f(1) = g(1) = 0$ olduğundan f ve g fonksiyonlarının bir kökü $p = 1$ noktasıdır. Ayrıca $p = 1$ noktası f fonksiyonunun 2-katılı sıfır yeri iken g fonksiyonunun basit sıfırındır. Gerçekten:

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5 \Rightarrow f'(1) = 0$$

$$f''(x) = 6x - 8 \Rightarrow f''(1) = -2 \neq 0$$

ve

$$g'(x) = 3x^2 - 12x + 11 \Rightarrow g'(1) = 2 \neq 0.$$

Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının kökü olan $p = 1$ noktasına $p_0 = 0.5$ ilk yaklaşımı ile Newton metodunu kullanarak $\varepsilon = 10^{-2}$ hassaslıkla bir yaklaşımda bulunursak aşağıdaki tablo elde edilir:

	$f(x)$ 2-katlı sıfır	$g(x)$ basit sıfır
n	p_n	p_n
0	0.5000	0.5000
1	0.7143	0.8261
2	0.8429	0.9677
3	0.9164	0.9985
4	0.9567	1.0000
5	0.9779	1.0000

Görüldüğü üzere Newton metodu ile yapılan yaklaşımlarda kök ne kadar yüksek katlı ise yakınsama o kadar yavaş gerçekleşir.

Çok katlı sıfır yerine sahip f fonksiyonunun kök değerine optimum şekilde bir yaklaşım yapmak için aşağıdaki yöntem izlenir:

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

olarak tanımlansın. Eğer p noktası $f(x) = (x - p)^m q(x)$ olmak üzere f fonksiyonunun m -katlı sıfır yeri ise

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \frac{(x - p)^m q(x)}{m(x - p)^{m-1} q(x) + (x - p)^m q'(x)} \\ &= (x - p) \frac{q(x)}{mq(x) + (x - p)q'(x)} \\ &= (x - p)q_*(x) \end{aligned}$$

fonksiyonunun da p noktasında sıfırı vardır. Ayrıca $q(p) \neq 0$ olduğu kullanılırsa

$$q_*(p) = \frac{q(p)}{mq(p) + (p - p)q'(p)} = \frac{1}{m} \neq 0$$

sonucuna ulaşılır ki bu da p noktasının $\mu(x)$ fonksiyonunun basit sıfır yeri olduğunu gösterir. Newton metodu $\mu(x)$ fonksiyonuna uygulanırsa

$$g(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{\frac{f(x)}{f'(x)}}{\frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}}$$

elde edilir ki bu ifade daha kısa bir şekilde

$$g(x) = x - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)} \quad (2.13)$$

olarak yazılabilir.

Eğer g fonksiyonu gerekli süreklilik koşulunu gerçeklerse f fonksiyonunun kaç katlı sıfır yeri olursa olsun, g 'ye uygulanacak fonksiyonel iterasyon kuadratik olarak yakınsayacaktır. (2.13) denklemi ile verilen ifadeye **değiştirilmiş Newton metodu** adı verilir. Teoride, bu metodun tek zorluğu $f''(x)$ türevinin de hesaba katılmasıdır. Pratikte ise, katlı sıfır yerine sahip bir fonksiyonun kök değerine yapılan bir yaklaşımda (2.13) formülü uygulandığında paydada yer alan her iki terimin de sıfıra yakın olması çok ciddi yuvarlama hatalarının ortaya çıkmasına neden olmaktadır.

Örnek 2.4.11. Örnek 2.4.9'da gösterildi ki $x = 0$ noktası $f(x) = e^x - x - 1$ fonksiyonunun 2-katlı sıfır yeridir ve $p_0 = 1$ ilk yaklaşımı ile Newton metodu kullanıldığında f fonksiyonu bu sıfır yerine kuadratik olmayan bir şekilde yakınsar. (2.13) denklemi ile verilen değiştirilmiş Newton metodunu kullanarak daha yüksek mertebeden bir yakınsama elde edilebileceğini gösteriniz.

Çözüm. Değiştirilmiş Newton metodu verilen fonksiyona uygulanırsa ilk adımda

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 - \frac{f(p_0)f'(p_0)}{[f'(p_0)]^2 - f(p_0)f''(p_0)} \\ &= 1 - \frac{(e-2)(e-1)}{(e-1)^2 - (e-2)e} \\ &= -2.3421061 \times 10^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu değer Newton metodu ile yapılan yaklaşımın ilk adımında bulunan 0.58197671 değerine göre oldukça iyi bir yaklaşımdır. Aşağıdaki tablo değiştirilmiş Newton metodu ile 2-katlı sıfır yeri olan 0 değerine yapılan yaklaşımları göstermektedir:

n	p_n
1	$-2.3421061 \times 10^{-1}$
2	$-8.4582788 \times 10^{-3}$
3	$-1.1889524 \times 10^{-5}$
4	$-6.8638230 \times 10^{-6}$
5	$-2.8085217 \times 10^{-7}$

Aşağıdaki örnek verilen fonksiyonun basit sıfır yeri olsa da değiştirilmiş Newton metodu ile yapılan bir yaklaşımın kuadratik yakınsayacağını ortaya koymaktadır.

Örnek 2.4.12. Örnek 2.1.1'de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ denkleminin bir kökünün $p = 1.36523001$ olduğu gösterilmişti. Şimdi hem Newton hem de değiştirilmiş Newton metodlarını kullanarak bu kök değerine yaklaşımlarda bulunalım:

(i) Newton metodu:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3 + 4p_{n-1}^2 - 10}{3p_{n-1}^2 + 8p_{n-1}},$$

(ii) Değiştirilmiş Newton metodu:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{(p_{n-1}^3 + 4p_{n-1}^2 - 10)(3p_{n-1}^2 + 8p_{n-1})}{(3p_{n-1}^2 + 8p_{n-1})^2 - (p_{n-1}^3 + 4p_{n-1}^2 - 10)(6p_{n-1} + 8)}.$$

$p_0 = 1.5$ için yukarıdaki formüller kullanılarak

n	Newton Metodu p_n	Değiştirilmiş Newton M. p_n
0	1.5	1.5
1	1.37333333	1.35689898
2	1.36526201	1.36519585
3	1.36523001	1.36523001

elde edilir. Buna göre her iki metot da sıfır yerine hızlı bir şekilde yakınsar ve bu sıfır yerine p_3 yaklaşımında ulaşılır.

2.5 Yakınsamaları Hızlandırmak

2.5.1 Aitken Δ^2 Metodu

$\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p limit değerine lineer olarak yakınsasın. Şimdi, p değerine $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsayacak bir $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin ne şekilde oluşturulacağını göstermek amacı ile $p_n - p$, $p_{n+1} - p$ ve $p_{n+2} - p$ aynı işaretli olmak üzere yeterince büyük n değerleri için

$$\frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} \approx \frac{p_{n+2} - p}{p_{n+1} - p}$$

yaklaşımı göz önüne alınsın. Buna göre

$$(p_{n+1} - p)^2 \approx (p_{n+2} - p)(p_n - p)$$

dolayısıyla

$$p_{n+1}^2 - 2p_{n+1}p + p^2 \approx p_{n+2}p_n - (p_n + p_{n+2})p + p^2$$

yani

$$(p_{n+2} + p_n - 2p_{n+1})p \approx p_{n+2}p_n - p_{n+1}^2$$

elde edilir. Son ifade p 'ye göre çözümlürse

$$p \approx \frac{p_{n+2}p_n - p_{n+1}^2}{p_{n+2} + p_n - 2p_{n+1}}$$

bulunur. Paya, p_n^2 ve $2p_n p_{n+1}$ değerleri eklenir ve çıkarılır ise gerekli parantezleme işlemleri ile

$$\begin{aligned}
p &\approx \frac{p_n p_{n+2} - 2p_n p_{n+1} + p_n^2 - p_{n+1}^2 + 2p_n p_{n+1} - p_n^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n} \\
&= \frac{p_n(p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n) - (p_{n+1}^2 + 2p_n p_{n+1} - p_n^2)}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n} \\
&= p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Aitken Δ^2 metodu

$$\hat{p}_n = p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n} \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlanan $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin p 'ye $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsadığı olgusuna dayanır.

Örnek 2.5.1. $p_n = \cos(1/n)$ olmak üzere $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $p = 1$ değerine lineer olarak yakınsar. Aitken Δ^2 metodu ile elde edilen dizinin ilk beş terimini yazınız.

Çözüm. Aitken Δ^2 metodu ile elde edilen dizinin \hat{p}_n terimlerini yazmak için orijinal dizinin p_n, p_{n+1} ve p_{n+2} terimlerini bilmek gerekir. Dolayısıyla \hat{p}_5 terimi için $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin ilk 7 terimini hesaplamak gerekir. Buna göre aşağıdaki tablo değerleri (2.14) eşitliği kullanılarak elde edilir:

n	p_n	\hat{p}_n
1	0.540302	0.961775
2	0.877583	0.982129
3	0.944957	0.989786
4	0.968912	0.993416
5	0.980067	0.995410
6	0.986143	
7	0.989813	

Bu teknikte Δ notasyonunun kullanılmasının asıl nedeni aşağıdaki tanıma dayanır:

Tanım 2.5.2. Verilen bir $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi için Δp_n **ileri farkı** $n \geq 0$ olmak üzere

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n$$

şeklinde tanımlanır. Δ operatörünün yüksek kuvvetleri ise rekürsif olarak $k \geq 2$ için

$$\Delta^k p_n = \Delta(\Delta^{k-1} p_n)$$

olarak ifade edilir.

Tanıma göre

$$\Delta^2 p_n = \Delta(p_{n+1} - p_n) = \Delta p_{n+1} - \Delta p_n = (p_{n+2} - p_{n+1}) - (p_{n+1} - p_n)$$

yani $\Delta^2 p_n = p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n$ olduğu \hat{p}_n için verilen (2.14) eşitliğinde kullanılırsa Aitken Δ^2 metodu

$$\hat{p}_n = p_n - \frac{(\Delta p_n)^2}{\Delta^2 p_n}, \quad n \geq 0 \quad (2.15)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Teorem 2.5.3. $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p limit değerine

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} < 1$$

eşitliği ile lineer olarak yakınsasın. $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$, Aitken Δ^2 metodu ile yaratılan bir dizi olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{p}_n - p}{p_n - p} = 0$$

eşitsizliği gerçekleşir. Yani, $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p 'ye $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ 'den hızlı yakınsar.

Kanıt. Teorem hipotezine göre

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|} = \lambda < 1$$

sağlanır. Farz edelim ki yeterince büyük k değerleri için $p_k - p$ farkı hep aynı işaretli olsun. Şimdi

$$\delta_n = \frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} - \lambda, \quad n \geq 0$$

dizisini tanımlayalım. Açıkça, $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ 'dır ve

$$\frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} = \delta_n + \lambda$$

olduğundan

$$p_{n+1} - p = (\delta_n + \lambda)(p_n - p)$$

sağlanır. Bu ise

$$\begin{aligned} p_2 - p &= (\delta_1 + \lambda)(p_1 - p) \\ p_3 - p &= (\delta_2 + \lambda)(p_2 - p) = (\delta_2 + \lambda)(\delta_1 + \lambda)(p_1 - p) \\ &\vdots \\ p_{n+1} - p &= (p_1 - p) \prod_{i=1}^n (\delta_i + \lambda) \end{aligned}$$

olduğu anlamına gelir. Diğer taraftan (2.15) ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{p}_n - p}{p_n - p} &= \frac{1}{p_n - p} \left(p_n - \frac{(\Delta p_n)^2}{\Delta^2 p_n} - p \right) \\
&= 1 - \frac{(\Delta p_n)^2}{(p_n - p)\Delta^2 p_n} \\
&= 1 - \frac{(p_{n+1} - p_n)}{(p_n - p)(p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n)} \\
&= 1 - \frac{((p_{n+1} - p) - (p_n - p))^2}{(p_n - p)((p_{n+2} - p) - 2(p_{n+1} - p) + (p_n - p))}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla yukarıda elde edilen rekürsif bağıntıdan gerekli işlemler yapıldığında

$$\frac{\hat{p}_n - p}{p_n - p} = 1 - \frac{(\delta_n + \lambda - 1)^2}{(\delta_{n+1} + \lambda)(\delta_n + \lambda) - 2(\delta_n + \lambda) + 1}$$

sonucuna ulaşılır ki buradan

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{p}_n - p}{p_n - p} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{(\delta_n + \lambda - 1)^2}{(\delta_{n+1} + \lambda)(\delta_n + \lambda) - 2(\delta_n + \lambda) + 1} \right) \\
&= 1 - \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda^2 - 2\lambda + 1} = 0
\end{aligned}$$

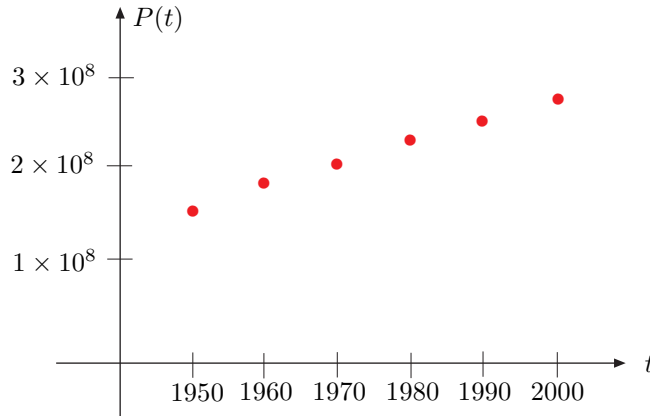
bulunur. □

3 İnterpolasyon ve Polinomsal Yaklaşımlar

3.0.2 Giriş

Amerika Birleşik Devletleri'nde her 10 yılda bir nüfus sayımı yapılmaktadır. Buna göre 1950 ile 2000 yılları arasında yapılan nüfus sayımı sonucu elde edilen veriler aşağıdaki tabloda ve grafikte gösterilmektedir:

Yıl	Nüfus
1950	151,326,000
1960	179,323,000
1970	203,302,000
1980	226,542,000
1990	249,633,000
2000	281,422,000



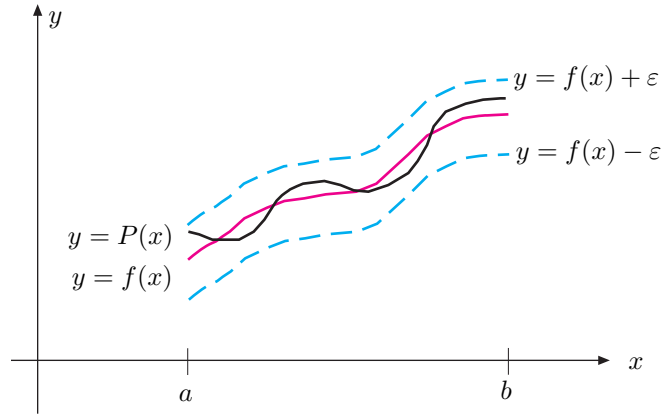
Verilen datalar ışığında 1975 ve hatta 2020 yılında oluşacak nüfus yoğunluğu hakkında bir yaklaşım yapılması istenebilir. Bu tip bir kestirim yapmak için söz konusu noktalardan geçen bir fonksiyon kullanılır. Bu prosese interpolasyon adı verilir.

3.1 Interpolasyon ve Lagrange Polinomu

Reel sayılar cümlesini kendi içine resmeden en kullanışlı ve iyi bilinen fonksiyonlar sınıfı, n negatif olmayan bir tamsayı ve a_0, \dots, a_n reel sabitler olmak üzere

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

formundaki *cebirsel polinom*lardır. Bu tip fonksiyonların önemi düzgün yaklaşık sürekli fonksiyonlar olmalarıdır. Yani, kapalı bir aralıkta tanımlı ve sürekli her fonksiyona istenildiği kadar *yakın* bir polinom vardır. Bu durum Weierstrass Yaklaşım Teoremi'nde açıkça ortaya koyulmaktadır (Bkz. Şekil 3.1).



Şekil 3.1: Polinom ile bir fonksiyona yaklaşma

Teorem 3.1.1. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $P(x)$ polinomu

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad x \in [a, b]$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde mevcuttur.

Bu teoremin ispatı herhangi bir reel analiz kitabında bulunabilir.

Fonksiyonlara polinomlarla yaklaşım yapılmasının bir diğer önemli nedeni ise türev ve integral değerlerinin kolayca hesaplanması ve sonuçta elde edilen fonksiyonun da yine bir polinom olmasıdır.

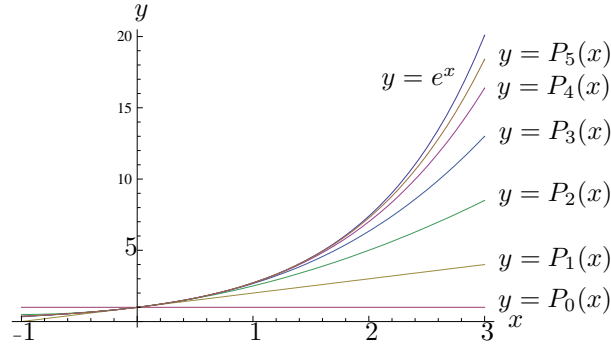
Bölüm 1.1'de Taylor polinomları incelenirken nümerik analiz temel unsurlarından biri olduğu vurgulanmıştı. Bu algıyla polinom yaklaşımında özellikle Taylor polinomlarının kullanılacağı gibi bir beklenti oluşabilir. Fakat, Taylor polinomları ile, etrafında açıldığı noktada tam, bu noktanın civarında yaklaşık ve noktadan uzaklaştıkça hassaslığı kötü yaklaşımlar elde edildiğinden polinom yaklaşımından bekleneni gerçeklemezler. Bunun yerine bir aralık boyunca istenen hassaslığı gerçekleyen bir polinom kullanmak gerekir. Örneğin, $f(x) = e^x$

fonksiyonunun $x_0 = 0$ civarındaki ilk altı Taylor polinomu göz önüne alınsın:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = 1 + x, P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}, P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \text{ ve } P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}.$$

Yukarıdaki polinomlara ait grafikler Şekil 3.2'de gösterilmektedir. Her ne kadar yüksek mertebeden polinomlar kullanılsa da sıfır noktasından uzaklaştıkça oluşan hata değeri daha da büyümektedir.



Şekil 3.2: $f(x) = e^x$ fonksiyonunun grafiği

$f(x) = e^x$ fonksiyonu için daha iyi yaklaşımlar yüksek mertebeden Taylor polinomları için elde edilmiş olsa da bu durum bütün sürekli fonksiyonlarda geçerli değildir. Ters örnek olarak, $f(x) = 1/x$ fonksiyonunun $x_0 = 1$ civarındaki Taylor polinomu kullanarak $f(3) = 1/3$ değerine yapılan yaklaşımı göz önüne alalım:

$$f(x) = x^{-1}, f'(x) = -x^{-2}, f''(x) = (-1)^2 2x^{-3}$$

ve en genel halde türev formülü

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k k! x^{-k-1}$$

olduğundan Taylor polinomları

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$$

formülünden elde edilir. Artan n değerleri için $P(3) = 1/3$ değerine yapılan yaklaşımda $P_n(x)$ polinomları kullanıldığında elde edilen sonuçlar aşağıda listelenmektedir. Buna göre n değeri büyüdükçe yaklaşımdan elde edilen sonuçlar kabul edilemez hale gelmekte, hata göz ardı edilebilir olmaktan çıkmaktadır.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$P_n(3)$	1	-1	3	-5	11	-21	43	-85

3.1.1 Lagrange Interpolasyon Polinomları

$f(x_0) = y_0$ ve $f(x_1) = y_1$ olsun. Yani f fonksiyonu (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarından geçsin. Şimdi bu noktalardan geçen, yani (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarında f fonksiyonunu kesen birinci dereceden **interpolasyon** polinomunun ne şekilde yazılabileceğini araştıralım. Zira bu polinom yardımı ile (x_0, x_1) aralığında yer alan değerler için verilen fonksiyona, elde edilen en fazla birinci dereceden interpolasyon polinomu ile yaklaşım yapılabilir.

Şimdi

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{ve} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarından geçen lineer **Lagrange interpolasyon polinomu**

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$L_0(x_0) = 1, \quad L_0(x_1) = 0, \quad L_1(x_0) = 0 \quad \text{ve} \quad L_1(x_1) = 1$$

olduğu kullanılarak

$$P(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0$$

ve

$$P(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1$$

elde edilir. Yani, yukarıdaki şekilde tanımlanan P fonksiyonu (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarından geçen derecesi en fazla 1 olan tek türlü belirli bir interpolasyon polinomudur.

Örnek 3.1.2. $(2, 4)$ ve $(5, 1)$ noktalarından geçen lineer Lagrange interpolasyon polinomunu yazınız.

Çözüm. $x_0 = 2, y_0 = 4, x_1 = 5$ ve $y_1 = 1$ olmak üzere

$$L_0(x) = \frac{x - 5}{2 - 5} = -\frac{1}{3}(x - 5) \quad \text{ve} \quad L_1(x) = \frac{x - 2}{5 - 2} = \frac{1}{3}(x - 2)$$

şeklinde elde edilir. Buna göre istenen lineer Lagrange polinomu

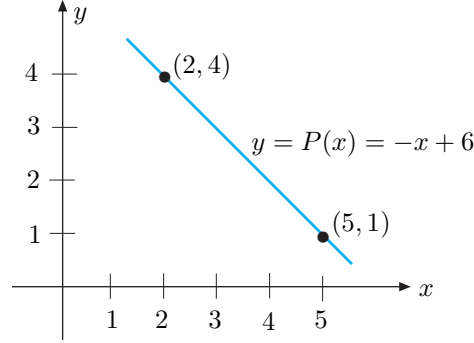
$$P(x) = -\frac{1}{3}(x - 5) \cdot 4 + \frac{1}{3}(x - 2) \cdot 1 = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = -x + 6$$

olarak elde edilir. $y = P(x)$ polinomunun grafiği Şekil 3.3'de gösterilmektedir.

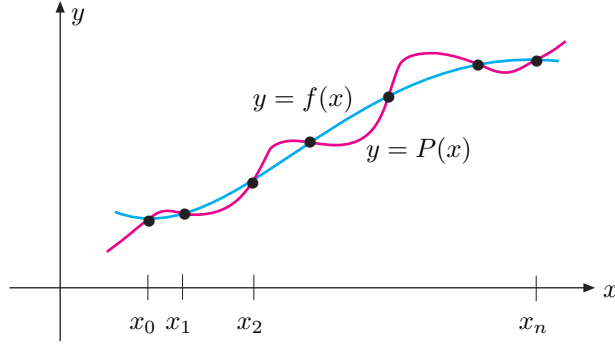
Lineer interpolasyon konseptini genelleştirmek için

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$$

gibi $n + 1$ farklı noktadan geçen en fazla n . dereceden bir polinom inşa etmeye çalışalım (Bkz. Şekil 3.4).



Şekil 3.3: $f(x) = -x + 6$ doğrusunun grafiği



Şekil 3.4: $n + 1$ noktadan geçen Lagrange interpolasyon polinomu

Öncelikle $k = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere $L_k(x_k) = 1$ ve $i \neq k$ için $L_k(x_i) = 0$ değerlerini alacak bir fonksiyon tanımlayalım. $i \neq k$ için $L_k(x_i) = 0$ eşitliğinin gerçekleşmesi için $L_k(x)$ 'in payının

$$(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$$

şeklinde bir terim içermesi gerekir. Diğer taraftan $L_k(x_k) = 1$ olması için ise paydanın yukarıda verilen eşitlikte $x = x_k$ alınmasıyla elde edilen ifadeye denk olması gerekir. Buna göre fonksiyonu

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

şeklinde tanımlarsak isteneni sağlamış oluruz.

Teorem 3.1.3. x_0, x_1, \dots, x_n , $n+1$ tane farklı nokta ve f , bu noktalarda aldığı değerler bilinen bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $k = 0, 1, 2, \dots, n$ için en

fazla n . mertebeden bir polinom

$$f(x_k) = P(x_k)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde mevcuttur. Bu polinom

$$\begin{aligned} L_k(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \\ &= \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x-x_i}{x_k-x_i}, \quad k=0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.1)$$

olmak üzere

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_k(x) \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır ve n . **Lagrange İnterpolasyon Polinomu** adını alır.

Örnek 3.1.4. (a) $x_0 = 2$, $x_1 = 2.75$ ve $x_2 = 4$ noktalarını kullanarak $f(x) = 1/x$ fonksiyonu için ikinci Lagrange interpolasyon polinomunu yazınız.

(b) Yukarıda elde edilen polinomu kullanarak $f(3) = 1/3$ değerine bir yaklaşımda bulununuz.

Çözüm.

(a) Öncelikle $L_0(x)$, $L_1(x)$ ve $L_2(x)$ katsayı polinomlarını tespit edelim:

$$L_0(x) = \frac{(x-2.75)(x-4)}{(2-2.75)(2-4)} = \frac{2}{3}(x-2.75)(x-4),$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.75-2)(2.75-4)} = -\frac{16}{15}(x-2)(x-4)$$

and

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2.75)}{(4-2)(4-2.75)} = \frac{2}{5}(x-2)(x-2.75).$$

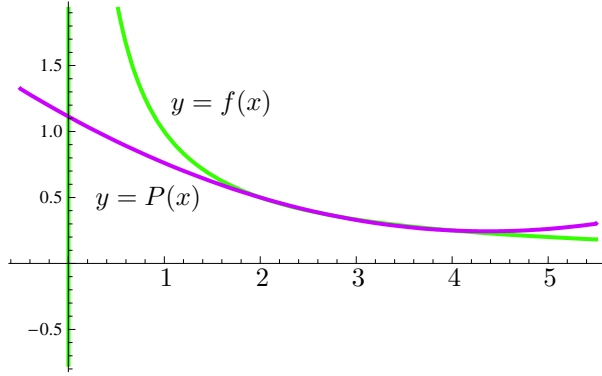
Diğer taraftan $f(x_0) = f(2) = 1/2$, $f(x_1) = f(2.75) = 4/11$ ve $f(x_2) = f(4) = 1/4$ değerleri

$$P(x) = \sum_{k=0}^2 f(x_k)L_k(x)$$

ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{3}(x-2.75)(x-4) - \frac{4}{11} \frac{16}{15}(x-2)(x-4) + \frac{1}{4} \frac{2}{5}(x-2)(x-2.75) \\ &= \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44} \end{aligned}$$

ikinci Lagrange interpolasyon polinomunu elde edilir (Bkz Şekil 3.5).



Şekil 3.5: $f(x) = 1/x$ ve $P(x) = \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}$ fonksiyonlarının grafikleri

(b) Yukarıda elde edilen polinom kullanılarak $f(3) = 1/3$ değerine bir yaklaşım

$$f(3) \approx P(3) = \frac{1}{22}3^2 - \frac{35}{88}3 + \frac{49}{44} = \frac{29}{88} \approx 0.32954$$

olarak elde edilir.

Görüldüğü üzere Lagrange interpolasyon polinomu kullanıldığında elde edilen bu yaklaşım, bölümün başında $x_0 = 1$ civarında $f(x) = 1/x$ fonksiyonunu çeşitli mertebelerden Taylor polinomuna açmak suretiyle elde edilen $f(3)$ yaklaşımlarına kıyasla çok çok daha iyidir.

Teorem 3.1.5. x_0, x_1, \dots, x_n birbirinden farklı $[a, b]$ aralığında $n + 1$ tane nokta ve $f \in C^{n+1}[a, b]$ olsun. Buna göre $P(x)$, (3.2) ile verilen interpolasyon polinomu olmak üzere her $x \in [a, b]$ için x_0, x_1, \dots, x_n arasında ve dolayısıyla (a, b) içinde

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \quad (3.3)$$

eşitliğini sağlayan bir $\xi(x)$ sayısı mevcuttur.

Kanıt. Herhangi bir $k = 0, 1, \dots, n$ için $x = x_k$ alınırsa ise $f(x_k) = P(x_k)$ olduğundan (a, b) aralığından seçilen herhangi bir $\xi(x_k)$ sayısı (3.3) eşitliğini gerçekler. Zira, bu durumda yukarıdaki şekilde tanımlanan polinom kullanılarak yapılan yaklaşım tam sonuç vereceğinden yaklaşımın hatası sıfır olacaktır.

Her $k = 0, 1, \dots, n$ için $x \neq x_k$ olsun. Şimdi $t \in [a, b]$ olmak üzere bir g fonksiyonu

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)] \frac{(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)} \\ &= f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)] \prod_{i=0}^n \frac{t-x_i}{x-x_i} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $f \in C^{n+1}[a, b]$ ve $P \in C^\infty[a, b]$ olduğundan $g \in C^{n+1}[a, b]$ 'dir. Eğer $t = x_k$ ise

$$g(x_k) = f(x_k) - P(x_k) - [f(x) - P(x)] \prod_{i=0}^n \frac{x_k - x_i}{x - x_i} = 0 - [f(x) - P(x)] \times 0 = 0$$

gerçeklenir. Ayrıca $t = x$ için

$$g(x) = f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)] \prod_{i=0}^n \frac{x - x_i}{x - x_i} = f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)] = 0$$

dır. Buna göre $g \in C^{n+1}[a, b]$ fonksiyonunun x, x_0, x_1, \dots, x_n gibi $n + 2$ tane farklı noktada sıfır yeri vardır. Dolayısıyla Genelleştirilmiş Rolle Teoremi'ne (Theorem 1.1.10) göre (a, b) aralığında bir ξ sayısı için $g^{(n+1)}(\xi) = 0$ eşitliği gerçekleşir. Buradan

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - P^{(n+1)}(\xi) - [f(x) - P(x)] \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left(\prod_{i=0}^n \frac{t - x_i}{x - x_i} \right)_{t=\xi} \quad (3.4)$$

sonucu elde edilir. Diğer taraftan $P(x)$, en fazla n . mertebeden bir polinom olduğundan $(n + 1)$. türev ifadesi $P^{(n+1)}(x)$, sıfıra denktir. Ayrıca $\prod_{i=0}^n \frac{t - x_i}{x - x_i}$ çarpım sonucu $(n + 1)$. dereceden bir polinom olacağından, bu polinom

$$\prod_{i=0}^n \frac{t - x_i}{x - x_i} = \left(\frac{1}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} \right) t^{n+1} + (t\text{'nin diğer daha düşük dereceden terimleri})$$

şeklinde yazılır ve $(n + 1)$. türevi alınır

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \prod_{i=0}^n \frac{t - x_i}{x - x_i} = \frac{(n + 1)!}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla (3.4) eşitliği

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - [f(x) - P(x)] \frac{(n + 1)!}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}$$

olarak ifade edilebilir. Son eşitlik $f(x)$ 'e göre yazılırsa

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

elde edilir. Bu ise doğruluğu gösterilmesi istenen ifadedir. \square

Theorem 3.1.5 ile verilen hata formülü nümerik diferansiyel ve integral formüllerinin elde edilmesinde Lagrange polinomlarının kullanılmasından dolayı büyük önem taşımaktadır. Daha sonra üzerinde durulacağı üzere, bu tekniklerde hata sınırı Lagrange hata formülü kullanılarak elde edilecektir.

Lagrange ve Taylor polinomlarının hata terimleri birbirlerine benzer. Bir x_0 civarında açılan n . Taylor polinomunun hata terimi

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

formundandır ve polinom sadece x_0 noktasında verilen bilgilerle oluşturulur. x_0, x_1, \dots, x_n gibi farklı noktalar için yazılan n . Lagrange polinomu ise tüm bu noktalarda verilen bilgiler ile yazılır ve hata terimi $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ şeklinde $n+1$ tane terimin çarpımını içerir:

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

Örnek 3.1.6. Örnek 3.1.4'de $[2, 4]$ aralığında $f(x) = 1/x$ fonksiyonu için $x_0 = 2$, $x_1 = 2.75$ ve $x_2 = 4$ noktaları kullanarak ikinci Lagrange polinomu elde edilmişti. Bu polinoma ait hatanın formunu belirleyiniz ve $x \in [2, 4]$ için $f(x)$ fonksiyonuna ikinci Lagrange polinomu kullanılarak yapılan yaklaşımlarda oluşacak hata için bir sınır tespit ediniz.

Çözüm. $f(x) = 1/x = x^{-1}$ olduğundan gerekli türevler

$$f'(x) = -x^{-2}, \quad f''(x) = 2x^{-3} \quad \text{ve} \quad f'''(x) = -6x^{-4}$$

şeklinde hesaplanır. Dolayısıyla $\xi \in (2, 4)$ olmak üzere ikinci Lagrange polinomunun hata terimi

$$\frac{f'''(\xi(x))}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = -(\xi(x))^{-4}(x-2)(x-2.75)(x-4)$$

olarak elde edilir. Şimdi bu hata için bir üst sınır belirleyelim: verilen $[2, 4]$ aralığında $(\xi(x))^{-4}$ ifadesinin alabileceği maksimum değer $2^{-4} = 1/16$ 'dır. Diğer taraftan

$$g(x) = (x-2)(x-2.75)(x-4) = x^3 - \frac{35}{4}x^2 + \frac{49}{2}x - 22$$

polinomunun türevi

$$D_x \left(x^3 - \frac{35}{4}x^2 + \frac{49}{2}x - 22 \right) = 3x^2 - \frac{35}{2}x + \frac{49}{2} = \frac{1}{2}(3x-7)(2x-7)$$

olduğundan kritik noktalar $x = 7/3$ ve $x = 7/2$ şeklinde tespit edilir. Bu noktalarda $g(x)$ fonksiyonunun aldığı değerler

$$g\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{25}{108} \approx 0.2314814815 \quad \text{ve} \quad g\left(\frac{7}{2}\right) = -\frac{9}{16} = -0.5625$$

dir. Dolayısıyla maksimum hata değeri

$$\left| \frac{f'''(\xi(x))}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \right| \leq \frac{1}{16} \left| -\frac{9}{16} \right| = \frac{9}{256} \approx 0.3515625 \times 10^{-1}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.1.7. $x \in [0, 1]$ olmak üzere $f(x) = e^x$ fonksiyonunun değerleri için bir tablo, her bir girdi $d \geq 8$ ondalık basamak kullanılarak ve birbirine komşu x değerleri arasındaki mesafe, adım uzunluğu, birbirine eşit ve h olacak şekilde hazırlanmış olsun. Buna göre hangi h adım uzunluğu için mutlak hatası en fazla 10^{-6} olan bir lineer interpolasyon polinomu yazılabilir?

Çözüm. f fonksiyonu x_0, x_1, \dots noktalarında hesaplanmış olsun ve $x \in [0, 1]$ için bir j indisi $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ eşitsizliğini sağlansın. (3.3) denklemi bir lineer interpolasyonda hatanın

$$|f(x) - P(x)| = \left| \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_j)(x - x_{j+1}) \right| = \frac{|f''(\xi)|}{2} |x - x_j| |x - x_{j+1}|$$

formunda olduğunu söyler. Adım aralığı h olduğundan $x_j = jh$ ve $x_{j+1} = (j+1)h$ 'dir ve buna göre

$$|f(x) - P(x)| = \frac{|f''(\xi)|}{2} |(x - jh)(x - (j+1)h)|$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} |f(x) - P(x)| &\leq \left(\max_{\xi \in [0,1]} \frac{e^\xi}{2} \right) \left(\max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |(x - jh)(x - (j+1)h)| \right) \\ &\leq \frac{e}{2} \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |(x - jh)(x - (j+1)h)| \end{aligned}$$

elde edilir. $jh \leq x \leq (j+1)h$ olmak üzere $g(x) = (x - jh)(x - (j+1)h)$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Şimdi bu fonksiyonun mutlak değerce maksimum yaptığı yeri bulalım. Biliyoruz ki verilen fonksiyonun maksimum ve minimum noktaları ya sınırlarda ya da türevinin sıfır olduğu yerlerde dir. Buna göre

$$g'(x) = (x - (j+1)h) + (x - jh) = 2 \left(x - jh - \frac{h}{2} \right)$$

olduğundan fonksiyonun aralık içerisindeki tek kritik noktası $x = jh + h/2$ 'dir. Bu noktada fonksiyonun aldığı değer $g(jh + h/2) = (h/2)^2 = h^2/4$ iken sınır noktalarda aldığı değerler $g(jh) = g((j+1)h) = 0$ olarak tespit edilir. Buna göre $|g(x)|$ fonksiyonu $[jh, (j+1)h]$ aralığında maksimum değerini kritik noktasında alır. Dolayısıyla

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{e}{2} \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |g(x)| \leq \frac{e}{2} \frac{h^2}{4} = \frac{eh^2}{8}$$

elde edilir. Bu lineer interpolasyon yaklaşımında oluşacak hata 10^{-6} ile sınırlı olduğundan

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{eh^2}{8} \leq 10^{-6}$$

eşitsizliğini gerçekleyen en küçük h değerinin seçilmesi gerekir. Buna göre

$$\frac{eh^2}{8} \leq 10^{-6} \Rightarrow h^2 \leq 10^{-6} \frac{8}{e} \Rightarrow h \leq \sqrt{10^{-6} \frac{8}{e}} \Rightarrow h \leq 1.71552777 \times 10^{-3}$$

olmalıdır. n alt aralık sayısı $n = \frac{1-0}{h}$ formülü ile hesaplanan bir tamsayı olduğundan adım uzunluğunu $h = 0.001$ şeklinde almak istenen hassaslığa ulaşılmasını garantiler.

Örnek 3.1.8. (a) $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ noktalarında $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ fonksiyonunu kesen ikinci Lagrange interpolasyon polinomu $P_2(x)$ 'i yazınız.

(b) $|f(x) - P_2(x)|$ değeri için bir sınır belirleyiniz.

Çözüm.

(a) Önce Lagrange katsayı fonksiyonlarını hesaplayalım:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{1}{2}(x^2-x), \\ L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = \frac{x^2-1}{-1} = 1-x^2, \\ L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{(x+1)x}{2} = \frac{1}{2}(x^2+x). \end{aligned}$$

Ayrıca $f(x_0) = f(-1) = \sin \frac{-\pi}{2} = -1$, $f(x_1) = f(0) = \sin 0 = 0$ ve $f(x_2) = f(1) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ olduğundan $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ noktalarında $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ fonksiyonunu kesen ikinci Lagrange interpolasyon polinomu

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \\ &= (-1)\frac{1}{2}(x^2-x) + 0(1-x^2) + (1)\frac{1}{2}(x^2+x) \\ &= \frac{1}{2}(-x^2+x+x^2+x) = \frac{1}{2}(2x) = x \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

(b) Gerekli türevler aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}, \quad f'(x) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}, \quad f''(x) = -\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi x}{2}, \quad f'''(x) = -\frac{\pi^3}{8} \cos \frac{\pi x}{2}.$$

İstenen mutlak değer, $\xi(x)$ sayısı -1 ile 1 arasında olmak üzere

$$|f(x) - P(x)| = \left| \frac{f'''(\xi(x))}{3!} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{-\frac{\pi^3}{8} \cos \frac{\pi\xi(x)}{2}}{3!} (x+1)(x-0)(x-1) \right| \\
&= \frac{\pi^3}{8 \cdot 3!} \underbrace{\left| \cos \frac{\pi\xi(x)}{2} \right|}_{\leq 1} |x^3 - x| \leq \frac{\pi^3}{48} |x^3 - x|
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $|x^3 - x|$ ifadesinin maksimum yaptığı noktayı bulalım. $g(x) = x^3 - x$ olarak göz önüne alınsın. Buna göre $g(-1) = g(1) = 0$ ve

$$g'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

için

$$\left| g\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \right| = \left| \left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \right| = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

olduğundan

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\pi^3}{48} |x^3 - x| \leq \frac{\pi^3}{48} \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^3 - x| = \frac{\pi^3}{48} \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}$$

elde edilir.

Örnek 3.1.9. $g(x)$ fonksiyonu x_0, x_1, \dots, x_{n-1} ve $h(x)$ fonksiyonu x_1, x_2, \dots, x_n noktalarında $f(x)$ fonksiyonunu interpolate ediyor ise

$$k(x) = g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0} (g(x) - h(x))$$

şeklinde tanımlanan $k(x)$ fonksiyonunun $f(x)$ 'i x_0, x_1, \dots, x_n noktalarında interpolate ettiğini gösteriniz.

Çözüm. $g(x)$ fonksiyonu x_0, x_1, \dots, x_{n-1} noktalarında $f(x)$ 'i interpolate ettiğinden

$$0 \leq i \leq (n-1) \text{ için } g(x_i) = f(x_i)$$

eşitliği sağlanır. Benzer şekilde $h(x)$ fonksiyonu x_1, x_2, \dots, x_n noktalarında $f(x)$ 'i interpolate ettiğinden

$$1 \leq i \leq n \text{ için } h(x_i) = f(x_i)$$

eşitliği gerçekleşir. Buna göre

$$1 \leq i \leq (n-1) \text{ için } g(x_i) = h(x_i)$$

dir. Şimdi

$$k(x) = g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0} (g(x) - h(x))$$

şeklinde tanımlanan $k(x)$ fonksiyonunun $f(x)$ 'i x_0, x_1, \dots, x_n noktalarında interpol ettiğini, yani

$$0 \leq i \leq n \text{ için } f(x_i) = k(x_i)$$

eşitliğinin sağlandığını göstermemiz gerekir.

x_0 için:

$$k(x_0) = g(x_0) + \underbrace{\frac{x_0 - x_0}{x_n - x_0}}_0 (g(x_0) - h(x_0)) = g(x_0) = f(x_0),$$

$1 \leq i \leq (n-1)$ olmak üzere x_i için:

$$k(x_i) = g(x_i) + \frac{x_0 - x_i}{x_n - x_0} \underbrace{(g(x_i) - h(x_i))}_0 = g(x_i) = f(x_i),$$

x_n için:

$$k(x_n) = g(x_n) + \underbrace{\frac{x_0 - x_n}{x_n - x_0}}_{-1} (g(x_n) - h(x_n)) = h(x_n) = f(x_n)$$

sağlandığından her

$$0 \leq i \leq n \text{ için } f(x_i) = k(x_i)$$

eşitliği gerçekleşir.

3.2 Veri Yaklaşımı ve Neville Metodu

Bir önceki bölümde Lagrange polinomlarının açık olarak nasıl ifade edildiğini ve verilen bir aralık üzerinde bir fonksiyon değerine bu polinomlar ile yapılan yaklaşımlarda oluşan hatanın formununun ne şekilde olduğunu öğrendik. Şimdi polinomun açık olarak değil de bazı noktalardaki değerlerinin verilmesi durumunda nasıl yaklaşım yapılabileceği olgusu üzerinde durulacaktır. Bu durumda fonksiyon belli olmadığından oluşacak hata için bir açık form belirlenemeyecektir. Aşağıdaki örnek göz önüne alınsın:

Örnek 3.2.1. Aşağıdaki tablo bazı noktalarda $f(x)$ fonksiyonunun aldığı değerleri göstermektedir:

x	$f(x)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

Farklı noktalar seçmek sureti ile yazılan Lagrange interpolasyon polinomlarını kullanarak $f(1.5)$ değerine yaklaşımlarda bulunalım ve bu yaklaşımların hassaslıklarını belirleyelim.

En yüksek hassaslığa sahip lineer yaklaşım, 1.5 değeri 1.3 ile 1.6 arasında olduğundan, $x_0 = 1.3$ ve $x_1 = 1.6$ seçmek sureti ile yazılan Lagrange polinomundan elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} P_1(1.5) &= \frac{1.5 - 1.6}{1.3 - 1.6} f(1.3) + \frac{1.5 - 1.3}{1.6 - 1.3} f(1.6) \\ &= \frac{1.5 - 1.6}{1.3 - 1.6} (0.6200860) + \frac{1.5 - 1.3}{1.6 - 1.3} (0.4554022) \\ &= 0.5102968 \end{aligned}$$

yaklaşımı bulunur.

İkinci dereceden bir polinom yazılmak istendiğinde iki farklı polinom üzerinden yaklaşımda bulunmak hassaslık açısından uygun olacaktır. Bunlardan ilki $x_0 = 1.3$, $x_1 = 1.6$ ve $x_2 = 1.9$ noktalarını kullanarak elde edilen

$$\begin{aligned} P_2(1.5) &= \frac{(1.5 - 1.6)(1.5 - 1.9)}{(1.3 - 1.6)(1.3 - 1.9)} (0.6200860) + \frac{(1.5 - 1.3)(1.5 - 1.9)}{(1.6 - 1.3)(1.6 - 1.9)} (0.4554022) \\ &\quad + \frac{(1.5 - 1.3)(1.5 - 1.6)}{(1.9 - 1.3)(1.9 - 1.6)} (0.2818186) \\ &= 0.5112857 \end{aligned}$$

yaklaşımı iken bir diğeri ise $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.3$ ve $x_2 = 1.6$ noktaları ile yapılan $\hat{P}_2(1.5) = 0.5124715$ yaklaşımıdır.

Üçüncü derece bir polinom ile yaklaşım yapılması durumunda kullanılabilir uygun iki tane polinom vardır. $x_0 = 1.3$, $x_1 = 1.6$, $x_2 = 1.9$ ve $x_3 = 2.2$ noktaları kullanılarak yazılan üçüncü Lagrange interpolasyon polinomu ile yapılan yaklaşımdan $P_3(1.5) = 0.5118302$ değeri elde edilirken, $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.3$, $x_2 = 1.6$ ve $x_3 = 1.9$ olması durumunda $\hat{P}_3(1.5) = 0.5118127$ yaklaşımına ulaşılır.

Son olarak $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.3$, $x_2 = 1.6$, $x_3 = 1.9$ ve $x_4 = 2.2$ noktaları kullanılarak yazılan tek dördüncü Lagrange interpolasyon polinomu ile $P_4(1.5) = 0.5118200$ yaklaşımı elde edilir.

$P_3(1.5)$, $\hat{P}_3(1.5)$ ve $P_4(1.5)$ yaklaşımları için

$$|P_3(1.5) - \hat{P}_3(1.5)| = |0.5118302 - 0.5118127| = 1.75 \times 10^{-5},$$

$$|P_3(1.5) - P_4(1.5)| = |0.5118302 - 0.5118200| = 1.20 \times 10^{-5}$$

ve

$$|\hat{P}_3(1.5) - P_4(1.5)| = |0.5118127 - 0.5118200| = 7.30 \times 10^{-6}$$

olduğundan bu yaklaşımların hassaslık derecelerinin en az 2×10^{-5} olması beklenir. Ayrıca, tüm bu yaklaşımlar içerisinde en iyi sonucun daha çok noktanın hesaba katılması ile oluşturulan P_4 polinomu ile yapılan yaklaşım olması gerekir.

Aslında, yaklaşım yapılan fonksiyon sıfır mertebeli birinci cins Bessel fonksiyonudur ve bu fonksiyonun 1.5 noktasında aldığı gerçek değer 0.5118277'dir. Buna göre her bir yaklaşımın gerçek hassaslığı aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} |P_1(1.5) - f(1.5)| &\approx 1.53 \times 10^{-3}, \\ |P_2(1.5) - f(1.5)| &\approx 5.42 \times 10^{-4}, \\ |\hat{P}_2(1.5) - f(1.5)| &\approx 6.44 \times 10^{-4}, \\ |P_3(1.5) - f(1.5)| &\approx 2.50 \times 10^{-6}, \\ |\hat{P}_3(1.5) - f(1.5)| &\approx 1.50 \times 10^{-5}, \\ |P_4(1.5) - f(1.5)| &\approx 7.7 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

Her ne kadar en iyi yaklaşım $P_3(1.5)$ olsa da, $f(1.5)$ 'in gerçek değerinin bilinmemesi durumunda en iyi yaklaşımın daha fazla nokta kullanılarak elde edilen $P_4(1.5)$ yaklaşımı olduğu düşünülmelidir. Teorem 3.1.5'de verilen Lagrange hata terimi, f fonksiyonunun türevleri bilinmediğinden burada uygulanamaz.

3.2.1 Neville Metodu

Lagrange interpolasyon polinomları ile işlem yapmanın zorluğu hata teriminden kaynaklanır. Fonksiyonun verilmemiş olması durumunda istenen hassaslığa sahip bir yaklaşımda bulunmak için kaçınılmaz dereceden bir polinomun kullanılmasının gerektiğini tüm hesabı yapmadan belirlemek mümkün değildir. Neville metodu ile çeşitli dereceden Lagrange polinomlarının kolay bir şekilde elde edilmesi için bir yöntem ortaya koymaktadır.

Tanım 3.2.2. f fonksiyonu x_0, x_1, \dots, x_n noktalarında tanımlanmış ve her i için $0 \leq m_i \leq n$ olmak üzere m_1, m_2, \dots, m_k , k tane farklı tamsayı olsun. $f(x)$ fonksiyonunu $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_k}$ gibi k noktada interpolate eden Lagrange polinomu $P_{m_1, m_2, \dots, m_k}(x)$ ile gösterilir.

Örnek 3.2.3. $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ ve $x_4 = 6$ olsun. $P_{1,2,4}(x)$ interpolasyon polinomunu yazınız ve bu polinomu kullanarak $f(5)$ değerini hesaplayınız.

Çözüm. $P_{1,2,4}(x)$ Lagrange interpolasyon polinomu, $f(x)$ fonksiyonunu $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ ve $x_4 = 6$ noktalarında kesen polinomdur ve aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$P_{1,2,4}(x) = \frac{(x-3)(x-6)}{(2-3)(2-6)}e^2 + \frac{(x-2)(x-6)}{(3-2)(3-6)}e^3 + \frac{(x-2)(x-3)}{(6-2)(6-3)}e^6.$$

Buna göre, istenen yaklaşım değeri

$$\begin{aligned} f(5) \approx P(5) &= \frac{(5-3)(5-6)}{(2-3)(2-6)}e^2 + \frac{(5-2)(5-6)}{(3-2)(3-6)}e^3 + \frac{(5-2)(5-3)}{(6-2)(6-3)}e^6 \\ &= -\frac{1}{2}e^2 + e^3 + \frac{1}{2}e^6 \\ &\approx 218.105 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu değer fonksiyonun verilen noktadaki gerçek değeri $f(5) = e^5 = 148.413$ ile karşılaştırıldığında yaklaşımın iyi olmadığı görülür.

Aşağıdaki teorem Lagrange polinom yaklaşımlarını rekürsif olarak oluşturmak için bir metot ortaya koymaktadır.

Teorem 3.2.4. *f fonksiyonu x_0, x_1, \dots, x_k noktalarında tanımlanmış olsun ve bu noktalardan iki farklı x_j ve x_i sayıları göz önüne alınsın. Buna göre*

$$P(x) = \frac{(x - x_j)P_{0,1,\dots,j-1,j+1,\dots,k}(x) - (x - x_i)P_{0,1,\dots,i-1,i+1,\dots,k}(x)}{(x_i - x_j)}$$

şeklinde tanımlanan polinom f fonksiyonunu x_0, x_1, \dots, x_k gibi $k+1$ tane noktada interpolate eden k . Lagrange polinomudur.

Kanıt. Notasyonu kolaylaştırmak için

$$\hat{Q} \equiv P_{0,1,\dots,j-1,j+1,\dots,k} \quad \text{ve} \quad Q \equiv P_{0,1,\dots,i-1,i+1,\dots,k}$$

olarak yeniden adlandırılınsın. $Q(x)$ ve $\hat{Q}(x)$ polinomları en fazla $(k-1)$. dereceden olduğundan $P(x)$ polinomunun derecesi en çok k 'dir.

$\hat{Q}(x_i) = f(x_i)$ olduğundan

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_j)\hat{Q}(x_i) - (x_i - x_i)Q(x_i)}{(x_i - x_j)} = \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} f(x_i) = f(x_i)$$

ve benzer şekilde $Q(x_j) = f(x_j)$ eşitliğinden $P(x_j) = f(x_j)$ ifadesi elde edilir.

Eğer $0 \leq r \leq k$ olmak üzere r sayısı ne i 'ye ne de j 'ye eşit değilse bu durumda $Q(x_r) = \hat{Q}(x_r) = f(x_r)$ sağlanır. Dolayısıyla

$$P(x_r) = \frac{(x_r - x_j)\hat{Q}(x_r) - (x_r - x_i)Q(x_r)}{(x_i - x_j)} = \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} f(x_r) = f(x_r)$$

olarak elde edilir. Tanıma göre $P_{0,1,\dots,k}(x)$ polinomu x_0, x_1, \dots, x_k noktalarında f 'yi kesen en fazla n . dereceden tek türlü belirli polinom olduğundan $P \equiv P_{0,1,\dots,k}$ sonucuna ulaşılır. \square

Teorem 3.2.4'e göre Lagrange polinomları rekürsif olarak aşağıdaki şekilde oluşturulabilir:

$$\begin{aligned} P_{0,1}(x) &= \frac{1}{x_1 - x_0} [(x - x_0)P_1 - (x - x_1)P_0], \\ P_{1,2}(x) &= \frac{1}{x_2 - x_1} [(x - x_1)P_2 - (x - x_2)P_1], \\ P_{0,1,2}(x) &= \frac{1}{x_2 - x_0} [(x - x_0)P_{1,2} - (x - x_2)P_{0,1}], \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bu metot ile elde edilen değerler aşağıdaki tabloda ifade edilmiştir. Burada her bir satır, kendinden önce gelen satır kullanılarak yazılmaktadır.

x_0	P_0				
x_1	P_1	$P_{0,1}$			
x_2	P_2	$P_{1,2}$	$P_{0,1,2}$		
x_3	P_3	$P_{2,3}$	$P_{1,2,3}$	$P_{0,1,2,3}$	
x_4	P_4	$P_{3,4}$	$P_{2,3,4}$	$P_{1,2,3,4}$	$P_{0,1,2,3,4}$

Teorem 3.2.4'de ifade edildiği şekilde elde edilen interpolasyon polinomları kullanarak yaklaşımda bulunma tekniğine **Neville metodu** adı verilir. Bu teknikte kullanılan P notasyonunda yer alan indis sayısı çok fazla olduğunda gösterilimde sıkıntı yaşanabilir. Bunun yerine sadece iki indis içeren bir ifade ile isteneni anlatmak mümkündür. İndislemei kolaylaştırmak için $0 \leq j \leq i$ olmak üzere $Q_{i,j}$ ile

$$Q_{i,j} = P_{i-j, i-j+1, \dots, i-1, i}$$

şeklinde $x_{i-j}, x_{i-j+1}, \dots, x_{i-1}, x_i$ gibi $j + 1$ noktada f 'yi kesen j . dereceden interpolasyon polinomu ifade edilsin. Bu notasyon ile yukarıdaki tablo

x_0	$P_0 = Q_{0,0}$				
x_1	$P_1 = Q_{1,0}$	$P_{0,1} = Q_{1,1}$			
x_2	$P_2 = Q_{2,0}$	$P_{1,2} = Q_{2,1}$	$P_{0,1,2} = Q_{2,2}$		
x_3	$P_3 = Q_{3,0}$	$P_{2,3} = Q_{3,1}$	$P_{1,2,3} = Q_{3,2}$	$P_{0,1,2,3} = Q_{3,3}$	
x_4	$P_4 = Q_{4,0}$	$P_{3,4} = Q_{4,1}$	$P_{2,3,4} = Q_{4,2}$	$P_{1,2,3,4} = Q_{4,3}$	$P_{0,1,2,3,4} = Q_{4,4}$

olarak tekrar yazılabilir. Metodu daha da anlaşılır kılmak için yaklaşımların

$$Q_{i,j}(x) = \frac{(x - x_{i-j})Q_{i,j-1}(x) - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}(x)}{x_i - x_{i-j}}$$

formülasyonu ile yapıldığını ve burada j ile polinomun mertebesinin, i ile de ardışık değerleri belirlemede kullanılan x 'lerin gösterildiğini vurgulayalım.

Örnek 3.2.5. Örnek 3.2.1'de verilenleri kullanarak Neville metodu ile $f(1.5)$ değerine bir yaklaşımda bulununuz. Her bir adımda elde edilen rekürsif çıkarımları bir tablo üzerinde özetleyiniz.

Çözüm. Örnek 3.2.1'de tablo değerleri

x	$f(x)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

olarak verilmişti. $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.3$, $x_2 = 1.6$, $x_3 = 1.9$ ve $x_4 = 2.2$ için sıfır mertebeli yaklaşım polinomları (sabitler) $Q_{0,0} = f(1.0) = 0.7651977$, $Q_{1,0} = f(1.3) = 0.6200860$, $Q_{2,0} = f(1.6) = 0.4554022$, $Q_{3,0} = f(1.9) = 0.2818186$ ve $Q_{4,0} = f(2.2) = 0.1103623$ olarak belirlenir.

$f(1.5)$ değerine yapılan $Q_{1,1}(1.5)$ birinci derece yaklaşım aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} Q_{1,1}(x) &= \frac{(x - x_0)Q_{1,0} - (x - x_1)Q_{0,0}}{x_1 - x_0} \Rightarrow \\ Q_{1,1}(1.5) &= \frac{(1.5 - 1.0)Q_{1,0} - (1.5 - 1.3)Q_{0,0}}{1.3 - 1.0} \\ &= \frac{0.5(0.6200860) - 0.2(0.7651977)}{0.3} \\ &= 0.5233449. \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} Q_{2,1}(x) &= \frac{(x - x_1)Q_{2,0} - (x - x_2)Q_{1,0}}{x_2 - x_1} \Rightarrow \\ Q_{2,1}(1.5) &= \frac{(1.5 - 1.3)Q_{2,0} - (1.5 - 1.6)Q_{1,0}}{1.6 - 1.3} \\ &= \frac{0.2(0.4554022) + 0.1(0.6200860)}{0.3} \\ &= 0.5102968 \end{aligned}$$

ve diğer birinci derece yaklaşımlar $Q_{3,1}(1.5) = 0.5132634$ ve $Q_{4,1}(1.5) = 0.5104270$ olarak elde edilir. $x = 1.5$ değeri $x_1 = 1.3$ ile $x_2 = 1.6$ arasında yer aldığından en iyi yaklaşımın $Q_{2,1}$ olması beklenir.

İkinci derece polinomlar kullanılarak yapılan yaklaşımlardan

$$\begin{aligned} Q_{2,2}(x) &= \frac{(x - x_0)Q_{2,1} - (x - x_2)Q_{1,1}}{x_2 - x_0} \Rightarrow \\ Q_{2,2}(1.5) &= \frac{(1.5 - 1.0)(0.5102968) - (1.5 - 1.6)(0.5233449)}{1.6 - 1.0} \\ &= 0.5124715 \end{aligned}$$

ve benzer tarzda hareket ederek $Q_{3,2}(1.5) = 0.5112857$ ve $Q_{4,2}(1.5) = 0.5137361$ elde edilir.

Daha yüksek mertebeden polinomlar kullanıldığında aşağıdaki tablo değerlerine ulaşılır.

1.0	0.7651977				
1.3	0.6200860	0.5233449			
1.6	0.4554022	0.5102968	0.5124715		
1.9	0.2818186	0.5132634	0.5112857	0.5118127	
2.2	0.1103623	0.5104270	0.5137361	0.5118302	0.5118200

Eğer en son elde edilen $Q_{4,4}$ yaklaşımı yeterli hassaslıkta değilse bir başka nokta, x_5 hesaba katılır. Dolayısıyla, yeni bir satır yukarıdaki tabloya eklenerek $Q_{5,0}$, $Q_{5,1}$, $Q_{5,2}$, $Q_{5,3}$, $Q_{5,4}$ ve $Q_{5,5}$ yaklaşımları elde edilir. Örneğin verilerin

elde edildiği sıfır merterbeli birinci cins Bessel fonksiyonunun $x_5 = 2.5$ noktasında aldığı değer -0.0483838 kullanılırsa yukarıdaki tabloya eklenecek yeni satır

$$2.5 \quad -0.0483838 \quad 0.4807699 \quad 0.5301984 \quad 0.5119070 \quad 0.5118430 \quad 0.5118277$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda $f(1.5) = 0.5118277$ değerine yedi ondalık basamakta $Q_{5,5}$ yaklaşımı ile ulaşılmış olur.

Örnek 3.2.6. $f(x) = \ln x$ fonksiyonunun dört ondalık basamak ile değerleri aşağıdaki tabloda verilmektedir:

i	x_i	$f(x_i)$
0	2.0	0.6931
1	2.2	0.7885
2	2.3	0.8329

$f(2.1) = \ln 2.1$ değerine Neville metodu ile 4-dijit yuvarlama aritmetiğini kullanarak bir yaklaşımda bulununuz. Bulduğunuz değerleri Neville tablosunda özetleyiniz.

Çözüm. $x = 2.1$ için $x - x_0 = 0.1$, $x - x_1 = -0.1$, $x - x_2 = -0.2$ ve $Q_{0,0} = 0.6931$, $Q_{1,0} = 0.7885$, $Q_{2,0} = 0.8329$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned} Q_{1,1}(2.1) &= \frac{(x - x_0)Q_{1,0} - (x - x_1)Q_{0,0}}{x_1 - x_0} = \frac{(0.1)0.7885 - (-0.1)0.6931}{2.2 - 2.0} \\ &= \frac{0.1482}{0.2} = 0.7410, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{2,1}(2.1) &= \frac{(x - x_1)Q_{2,0} - (x - x_2)Q_{1,0}}{x_2 - x_1} = \frac{(-0.1)0.8329 - (-0.2)0.7885}{0.1} \\ &= \frac{0.07441}{0.1} = 0.7441 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Q_{2,2}(2.1) &= \frac{(x - x_0)Q_{2,1} - (x - x_2)Q_{1,1}}{x_2 - x_0} = \frac{(0.1)0.7441 - (-0.2)0.7410}{2.3 - 2.0} \\ &= \frac{0.2276}{0.3} = 0.7420 \end{aligned}$$

yaklaşımları elde edilir. Buna göre istenen tablo

i	x_i	$x - x_i$	$Q_{i,0}$	$Q_{i,1}$	$Q_{i,2}$
0	2.0	0.1	0.6931		
1	2.2	-0.1	0.7885	0.7410	
2	2.3	-0.2	0.8329	0.7441	0.7420

şeklinde oluşturulur. 4-dijit ile $f(2.1) = \ln 2.1 = 0.7419$ olduğundan mutlak hata

$$|f(2.1) - P_2(2.1)| = |0.7419 - 0.7420| = 10^{-4}$$

dir. Bununla beraber $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$ ve $f'''(x) = 2/x^3$ olduğundan Teorem 3.1.5 ile verilen Lagrange hata terimi için bir sınır

$$\begin{aligned} |f(2.1) - P_2(2.1)| &= \left| \frac{f'''(\xi(2.1))}{3!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \right| \\ &= \left| \frac{1}{3(\xi(2.1))^3} (0.1)(-0.1)(-0.2) \right| \\ &\leq \frac{0.002}{3} \max_{2.0 \leq \xi \leq 2.3} \left| \frac{1}{(\xi(2.1))^3} \right| = \frac{0.002}{3} \frac{1}{2^3} = 8.3 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu örnekte, gerçek hata değerinin bulunan hata üst sınırından küçük olmasının nedeni sonlu-dijit aritmetiğinin kullanılmasının bir sonucudur.

Örnek 3.2.7. Neville metodunu kullanarak $f(0.5)$ değerini bulmak için yapılan hesaplamalar sonucunda $x_0 = 0$, $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.7$, $Q_{0,0} = 0$, $Q_{1,0} = 2.8$, $Q_{2,0} = \alpha$, $Q_{1,1} = 3.5$, $Q_{2,1} = \beta$, $Q_{2,2} = 27/7$ olarak belirlendiğine göre α ve β değerlerini tespit ediniz.

Çözüm. Önce Neville tablosunu oluşturalım:

x_i	$f(x_i) = Q_{i,0}$	$Q_{i,1}$	$Q_{i,2}$
$x_0 = 0.0$	$0.0 = Q_{0,0}$		
$x_1 = 0.4$	$2.8 = Q_{1,0}$	$3.5 = Q_{1,1}$	
$x_2 = 0.7$	$\alpha = Q_{2,0}$	$\beta = Q_{2,1}$	$27/7 = Q_{2,2}$

Buna göre

$$Q_{2,2}(0.5) = \frac{(0.5 - x_0)Q_{2,1} - (0.5 - x_2)Q_{1,1}}{x_2 - x_0} \Rightarrow \frac{27}{7} = \frac{(0.5 - 0)\beta - (0.5 - 0.7)3.5}{0.7 - 0}$$

olduğundan $Q_{2,1} = \beta = 4$ elde edilir. Ayrıca

$$Q_{2,1}(0.5) = \frac{(0.5 - x_1)Q_{2,0} - (0.5 - x_2)Q_{1,0}}{x_2 - x_1} \Rightarrow 4 = \frac{(0.5 - 0.4)\alpha - (0.5 - 0.7)2.8}{0.7 - 0.4}$$

ifadesinden $Q_{2,0} = \alpha = 6.4$ sonucuna ulaşılır.

3.3 Bölünmüş Farklar

x_0, x_1, \dots, x_n gibi $n + 1$ tane farklı noktada f fonksiyonunun interpolate eden n . Lagrange polinomu $P_n(x)$ ile gösterilsin. Her ne kadar bu polinom tek türlü belirli olsa da bazı durumlarda avantaj sağlaması bakımından farklı cebirsel gösterimleri kullanılabilir. f fonksiyonunun x_0, x_1, \dots, x_n noktalarına göre bölünmüş farkları a_0, a_1, \dots, a_n 'ler uygun sabitler olmak üzere

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad (3.5)$$

formundaki $P_n(x)$ polinomu ile ifade edilir. Öncelikle bu sabitleri tespit etmek için bir metot geliştirelim: (3.5) ifadesinde $x = x_0$ yazarsak sıfırdan farklı tek terim a_0 katsayısı olur. Buna göre

$$a_0 = P_n(x_0) = f(x_0)$$

dır. Şimdi, Bölüm 2.5'de kullanılan Aitken Δ^2 notasyonu ile ilişkili olarak bölünmüş fark notasyonunu tanımlayalım. x_i noktasına göre f fonksiyonunun *sıfırdan bölünmüş farkı* $f[x_i]$ ile gösterilir ve f 'nin x_i noktasındaki değeri

$$f[x_i] = f(x_i) \quad (3.6)$$

olarak tanımlanır.

Benzer şekilde $P_n(x)$ polinomu x_1 noktasında hesaplanırsa, $P(x_1)$ ifadesindeki sıfırdan farklı terimler için

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

olduğundan

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \quad (3.7)$$

elde edilir. Buna göre f fonksiyonunun x_i ve x_{i+1} noktalarına göre *birinci bölünmüş farkı* $f[x_i, x_{i+1}]$ ile gösterilir ve

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \quad (3.8)$$

olarak tanımlanır.

Rekürsif olarak *ikinci bölünmüş fark*, $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ şeklinde gösterilir ve

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

olarak tanımlanır.

$k - 1$ bölünmüş fark işlemi sonrasında

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}] \text{ ve } f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}]$$

terimleri elde edilmiş olur ve bunlara bağlı olarak f fonksiyonunun $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ noktalarına göre k . **bölünmüş farkı** $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]$, aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \quad (3.9)$$

Son olarak verilen f fonksiyonunun n . *bölünmüş farkı*

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

şeklinde tanımlanır. (3.7) ifadesinden $a_1 = f[x_0, x_1]$ ve $a_0 = f(x_0) = f[x_0]$ olarak yazılabildiğinden (3.5) ile verilen interpolasyon polinomu

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{n-1})$$

formunda bir gösterilime sahiptir. a_0 ve a_1 katsayılarının hesabından da sezildiği üzere aranan katsayılar $k = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere

$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k]$$

formundadır. Dolayısıyla f fonksiyonunun *Newton bölünmüş farkı* $P_n(x)$

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k](x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_{k-1}) \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilir. $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ değeri x_0, x_1, \dots, x_k sayılarının sırasına bağlı değildir.

Tabloda 3.1'de bölünmüş farkların ne şekilde hesaplandığı özetlenmektedir.

Tablo 3.1: Bölünmüş farklar tablosu

x	Birinci bölünmüş farklar	İkinci bölünmüş farklar	Üçüncü bölünmüş farklar
x_0	$f[x_0]$		
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$	$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$
x_4	$f[x_4]$	$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$	$f[x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_4, x_5] - f[x_3, x_4]}{x_5 - x_3}$
x_5	$f[x_5]$		
Dördüncü			
	bölünmüş farklar		Beşinci bölünmüş farklar
	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] - f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_0}$
	$f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_2, x_3, x_4, x_5] - f[x_1 - x_2 - x_3 - x_4]}{x_5 - x_1}$		

Örnek 3.3.1. Aşağıdaki tablo ile bazı noktalardaki değerleri verilen ve daha önceden Örnek 3.2.1'de incelenen değerler ile bölünmüş farklar tablosu oluşturunuz ve tüm bu verileri kullanarak bir interpolasyon polinomu inşa ediniz.

x	$f(x)$
$x_0 = 1.0$	0.7651977
$x_1 = 1.3$	0.6200860
$x_2 = 1.6$	0.4554022
$x_3 = 1.9$	0.2818186
$x_4 = 2.2$	0.1103623

Çözüm. x_0 ve x_1 'i içeren birinci bölünmüş fark

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{0.6200860 - 0.7651977}{1.3 - 1.0} = -0.4837057,$$

x_1 ve x_2 'yi içeren birinci bölünmüş fark

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{0.4554022 - 0.6200860}{1.6 - 1.3} = -0.5489460,$$

x_2 ve x_3 'ü içeren birinci bölünmüş fark

$$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{0.2818186 - 0.4554022}{1.9 - 1.6} = -0.5786120,$$

ve son olarak da x_3 ve x_4 'ü içeren birinci bölünmüş fark ise

$$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3} = \frac{0.1103623 - 0.2818186}{2.2 - 1.9} = -0.5715210$$

şeklinde elde edilir. Şimdi ikinci bölünmüş farkları sırası ile elde edelim:

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-0.5489460 - (-0.4837057)}{1.6 - 1.0} \\ &= -0.1087339, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f[x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{-0.5786120 - (-0.5489460)}{1.9 - 1.3} \\ &= -0.0494433, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f[x_2, x_3, x_4] &= \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2} = \frac{-0.5715210 - (-0.5786120)}{2.2 - 1.6} \\ &= 0.0118183. \end{aligned}$$

İkinci bölünmüş farkları kullanarak üçüncü bölünmüş farklar

$$\begin{aligned}
f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \\
&= \frac{-0.0494433 - (-0.1087339)}{1.9 - 1.0} = 0.0658784,
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
f[x_1, x_2, x_3, x_4] &= \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1} \\
&= \frac{0.0118183 - (-0.0494433)}{2.2 - 1.3} = 0.0680685
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Son olarak da dördüncü bölünmüş fark ise

$$\begin{aligned}
f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] &= \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0} \\
&= \frac{0.0680685 - 0.0658784}{2.2 - 1.0} = 0.0018251
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu değerler aşağıdaki tabloda gösterilmektedir:

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \dots, x_i]$	$f[x_{i-4}, x_i]$
0	1.0	0.7651977				
1	1.3	0.6200860	-0.4837057			
2	1.6	0.4554022	-0.5489460	-0.1087339		
3	1.9	0.2818186	-0.5786120	-0.0494433	0.0658784	
4	2.2	0.1103623	-0.5715210	0.0118183	0.0680685	0.0018251

Tabloda kalın font ile gösterilen değerler interpolasyon polinomunun *Newton ileri bölünmüş farklar* formunun katsayılarıdır. Buna göre polinom

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= 0.7651977 - 0.4837057(x - 1.0) - 0.1087339(x - 1.0)(x - 1.3) \\
&\quad + 0.0658784(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6) \\
&\quad + 0.0018251(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6)(x - 1.9)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Eğer bu polinom kullanılarak $x = 1.5$ değeri hesaplanırsa $P_4(1.5) = 0.5118200$ sonucuna ulaşılır. Buna göre $f(1.5) \approx P_4(1.5)$ 'dir. Aslında bu yaklaşım değeri Örnek 3.2.1 ve Örnek 3.2.5'de elde edilmişti. Bu durum her ne kadar formları farklı olsa da polinomun tek türlü belirli olmasından, yani aynı polinomun farklı formlarının göz önüne alınmasından kaynaklanmaktadır.

Örnek 3.3.2. (0, 2), (1, 3), (2, 12) ve (5, 147) değerleri verilsin. Üçüncü Newton bölünmüş fark formülünü kullanarak verilen noktalardan geçen, $P_3(x)$, Lagrange interpolasyon polinomunu Newton formunda yazınız ve $P_3(3)$ değerini hesaplayınız.

Çözüm. Newton bölünmüş farklar tablosu verilen değerler için aşağıdaki gibi elde edilir:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
$x_0 = 0$	$2 = a_0$			
		$1 = a_1$		
$x_1 = 1$	3		$4 = a_2$	
		9		$1 = a_3$
$x_2 = 2$	12		9	
		45		
$x_3 = 5$	147			

Buna göre

$$\begin{aligned}
 P_3(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
 &= 2 + 1(x - 0) + 4(x - 0)(x - 1) + 1(x - 0)(x - 1)(x - 2) \\
 &= 2 - x + x^2 + x^3
 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla istenen $P_3(3)$ değeri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$P_3(x) = 2 - 3 + 3^2 + 3^3 = 35.$$

Örnek 3.3.3. $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2$ ve $x_5 = 3$ olmak üzere Newton bölünmüş fark formülü x_0, x_1, x_2, x_3 noktaları için uygulandığında bu noktalardan geçen interpolasyon polinomu

$$P_3(x) = 4 - 2(x + 2) + \frac{1}{2}(x + 2)(x + 1) + \frac{1}{6}(x + 2)(x + 1)x$$

şeklinde elde ediliyor. Ayrıca

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = f[x_2, x_3, x_4, x_5] = -1/3$$

olduğu bilindiğine göre $P_5(x)$ interpolasyon polinomunu yazınız.

Çözüm. Dört noktadan geçen $P_3(x)$ Newton formunda Lagrange interpolasyon polinomu

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

olduğundan soruda verilen bilgiden $a_0 = 4, a_1 = -2, a_2 = 1/2$ ve $a_3 = 1/6$ olduğu görülür. Beşinci derece Lagrange interpolasyon polinomunu yazmak için bunlara ek olarak a_4 ve a_5 katsayıları tespit edilmelidir. $f[x_1, x_2, x_3, x_4] = f[x_2, x_3, x_4, x_5] = -1/3$ olarak verildiğine göre

...	Üçüncü bölünmüş farklar	Dördüncü bölünmüş farklar	Beşinci bölünmüş farklar
.	$a_3 = 1/6$		
.		$\frac{-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}{2-(-2)} = -\frac{1}{8} = a_4$	
.	$-1/3$		$\frac{0+\frac{1}{8}}{3-(-2)} = \frac{1}{40} = a_5$
.		$\frac{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{3-(-1)} = 0$	
.	$-1/3$		

olduğundan

$$P_5(x) = P_3(x) + a_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ + a_5(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

yani

$$P_5(x) = P_3(x) - \frac{1}{8}(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2) + \frac{1}{40}(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)(x-3)$$

şeklinde yazılır.

(3.8) eşitliğine Ortalama Değer Teoremi (Teorem 1.1.8), $i = 0$ için uygulanırsa

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

olduğundan f' türevinin mevcut olması durumunda x_0 ile x_1 arasındaki bir ξ sayısının $f'(\xi) = f[x_0, x_1]$ eşitliğini sağlayacak şekilde varlığını garantiler. Aşağıdaki teorem bu sonucun bir genelleştirilmesidir.

Teorem 3.3.4. $f \in C^n[a, b]$ ve x_0, x_1, \dots, x_n , $[a, b]$ aralığında birbirinden farklı sayılar olsun. Buna göre (a, b) aralığında

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

eşitliğini sağlayan bir ξ sayısı vardır.

Kanat.

$$g(x) = f(x) - P_n(x)$$

şeklinde tanımlansın. Her $i = 0, 1, \dots, n$ için $f(x_i) = P_n(x_i)$ olduğundan g fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında $n + 1$ farklı sıfırı vardır. Dolayısıyla Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi'ne (Teorem 1.1.10) göre (a, b) aralığında $g^{(n)}(\xi) = 0$ eşitliğini sağlayan bir ξ sayısı mevcuttur. Buna göre

$$0 = g^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - P_n^{(n)}(\xi) \Rightarrow f^{(n)}(\xi) = P_n^{(n)}(\xi)$$

yazılabilir. $P_n(x)$, katsayıları $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ şeklinde belirlenen n . dereceden bir polinom olduğundan n . türevi her x için

$$P_n^{(n)}(x) = n!f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

dir. Sonuç olarak

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{P_n^{(n)}(\xi)}{n!}$$

ifadesi elde edilir. \square

Newton bölünmüş fark formülü göz önüne alınan noktaların hepsinin eşit aralıklı olması durumunda daha basit bir formda ifade edilebilir. Bu durumda her $i = 0, 1, \dots, n-1$ için $h = x_{i+1} - x_i$ şeklinde tanımlansın ve $x = x_0 + sh$ olsun. Dolayısıyla $x - x_i$ farkı $x_i = x_0 + ih$ olduğu kullanılarak $x - x_i = (s-i)h$ şeklinde elde edilir. Dolayısıyla (3.10) formülü

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0 + sh) = f[x_0] + shf[x_0, x_1] + s(s-1)h^2f[x_0, x_1, x_2] \\ &\quad + \dots + s(s-1)\dots(s-n+1)h^n f[x_0, x_1, \dots, x_n] \\ &= f[x_0] + \sum_{k=1}^n s(s-1)\dots(s-k+1)h^k f[x_0, x_1, \dots, x_k] \end{aligned}$$

haline gelir.

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!}$$

olarak tanımlanan Binom katsayıları yukarıda elde edilen $P_n(x)$ ifadesinde kullanılırsa

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n \binom{s}{k} k! h^k f[x_0, x_1, \dots, x_k] \quad (3.11)$$

formülüne ulaşılır.

3.3.1 İleri Farklar

Newton ileri fark formülü, Δ^2 Aitken metodunda ifade edilen ileri fark formülü Δ kullanılarak da inşa edilebilir. Bu notasyon ile

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h}(f(x_1) - f(x_0)) = \frac{1}{h}\Delta f(x_0),$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2h} \left(\frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{h} \right) = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_0)$$

ve en genel halde

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{1}{k!h^k}\Delta^k f(x_0)$$

elde edilir. $f[x_0] = f(x_0)$ olduğu kullanılarak (3.11) eşitliği aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

Newton İleri Fark Formülü

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0). \quad (3.12)$$

3.3.2 Geri Farklar

Eğer interpolasyon noktaları sondan başa doğru x_n, x_{n-1}, \dots, x_0 şeklinde dizilir ise interpolasyon formülü

$$P_n(x) = f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) \\ + \dots + f[x_n, \dots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)$$

olarak elde edilir.

Eğer verilen noktalar $i = 1, 2, \dots, n$ için $x_i - x_{i-1} = h$ eşitliğini sağlıyorsa yani, noktaların hepsi eşit aralıklı ise $x = x_n + sh$ ve $x - x_i = (s + n - i)h$ olmak üzere

$$P_n(x) = P_n(x_n + sh) \\ = f[x_n] + shf[x_n, x_{n-1}] + s(s+1)h^2f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + \dots \\ + s(s+1) \dots (s+n-1)h^n f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0]$$

eşitliğini sağlayan **Newton geri fark formülü** elde edilir. Bu formülü daha kompakt hale getirmek için aşağıdaki tanıma ihtiyaç vardır:

Tanım 3.3.5. Verilen bir $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi için geri fark ∇p_n (*nabla* p_n olarak okunur)

$$\nabla p_n = p_n - p_{n-1}, \quad n \geq 1$$

olarak ve daha yüksek mertebeler rekürsif olarak

$$\nabla^k p_n = \nabla(\nabla^{k-1} p_n), \quad k \geq 2$$

şeklinde tanımlansın.

Tanım 3.3.5'e göre

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{1}{h} \nabla f(x_n), \quad f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{1}{2h^2} \nabla^2 f(x_n)$$

ve en genel halde

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}] = \frac{1}{k! h^k} \nabla^k f(x_n)$$

formülü elde edilir. Sonuç olarak

$$P_n(x) = f[x_n] + s \nabla f(x_n) + \frac{s(s+1)}{2!} \nabla^2 f(x_n) + \dots + \frac{s(s+1) \dots (s+n-1)}{n!} \nabla^n f(x_n)$$

eşitliğine ulaşılır. Binom katsayı notasyonunun s 'nin tüm reel sayı değerlerine genişletilmesi ile elde edilen

$$\binom{-s}{k} = \frac{-s(-s-1) \dots (-s-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{s(s+1) \dots (s+k-1)}{k!}$$

ifadesi kullanılarak

$$P_n(x) = f[x_n] + (-1)^1 \binom{-s}{1} \nabla f(x_n) + (-1)^2 \binom{-s}{2} \nabla^2 f(x_n) \\ + \dots + (-1)^n \binom{-s}{n} \nabla^n f(x_n)$$

formülü elde edilir.

Newton Geri Fark Formülü

$$P_n(x) = f(x_n) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n). \quad (3.13)$$

Örnek 3.3.6. Örnek 3.3.1'de verilen dataları kullanarak eşit aralıklı noktalar için Newton ileri fark tablosu aşağıdaki şekilde elde edilir:

i	x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
0	1.0	<u>0.7651977</u>				
1	1.3	0.6200860	<u>-0.1451117</u>			
2	1.6	0.4554022	-0.1646838	<u>-0.0195721</u>		
3	1.9	0.2818186	-0.1735836	-0.0088998	<u>0.0106723</u>	
4	2.2	<u>0.1103623</u>	-0.1714563	<u>0.0021273</u>	<u>0.0110271</u>	<u>0.0003548</u>
i	x_i	$f(x_i)$	$\nabla f(x_i)$	$\nabla^2 f(x_i)$	$\nabla^3 f(x_i)$	$\nabla^4 f(x_i)$

Her ne kadar Newton geri ve ileri fark formüllerinin kullanılma koşulu olan eşit aralıklı noktalar ile işlem yapma zorunluluğu bölünmüş fark formülünü kullanmak için bir gereklilik olmasa da ileride bir kıyaslama imkanı yaratmak için soruda noktalar eşit aralıklı olarak alınmıştır.

Yukarıdaki tablo göz önüne alınarak beş nokta kullanılarak farklı sayılarda 1., 2., 3. ve 4. dereceden interpolasyon polinomları yazılabilir. Biz burada interpolasyon polinomu ile yapılan yaklaşımın hassaslığı ile ilgili bir varsayımın bulunma imkanı sağlaması bakımından tektürlü belirli olduğu bilinen dördüncü derece polinom ile ilgileneceğiz.

Eğer $f(1.1)$ değerine bir yaklaşım yapılması istenirse daha önceden de vurgulandığı üzere $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.3$, $x_2 = 1.6$, $x_3 = 1.9$ ve $x_4 = 2.2$ şeklinde verilen tüm noktaları işleme katarak dördüncü bölünmüş fark ile hesap yapmak hassaslığın artırılması bakımından mantıklı olacaktır. Buna göre $h = 0.3$ ve $x = x_0 + sh$ olduğundan $1.1 = 1.0 + s(0.3)$ yani $s = \frac{1}{3}$ için Newton ileri bölünmüş fark formülü yukarıdaki tabloda düz alt çizgi ile ifade edilen katsayı

değerleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
P_4(1.1) &= P_4\left(1.0 + \frac{1}{3}(0.3)\right) = f(x_0) + \sum_{k=1}^4 \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0) \\
&= f(x_0) + \binom{s}{1} \Delta^1 f(x_0) + \binom{s}{2} \Delta^2 f(x_0) + \binom{s}{3} \Delta^3 f(x_0) + \binom{s}{4} \Delta^4 f(x_0) \\
&= f(x_0) + s \Delta f(x_0) + \frac{1}{2!} s(s-1) \Delta^2 f(x_0) + \frac{1}{3!} s(s-1)(s-2) \Delta^3 f(x_0) \\
&\quad + \frac{1}{4!} s(s-1)(s-2)(s-3) \Delta^4 f(x_0) \\
&= f(x_0) + \frac{1}{3} \Delta f(x_0) + \frac{1}{2!} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \Delta^2 f(x_0) + \frac{1}{3!} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 2\right) \Delta^3 f(x_0) \\
&\quad + \frac{1}{4!} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 2\right) \left(\frac{1}{3} - 3\right) \Delta^4 f(x_0) \\
&= 0.7651977 + \frac{1}{3}(-0.1451117) + \frac{1}{2!} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) (-0.0195721) \\
&\quad + \frac{1}{3!} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 2\right) 0.0106723 \\
&\quad + \frac{1}{4!} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 2\right) \left(\frac{1}{3} - 3\right) 0.0003548 \\
&= 0.7196460
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Yaklaşım yapılması istenen $f(x)$ değeri için x noktası verilen tablonun sonlarına doğru ise bu durumda Newton geri bölünmüş fark formülü kullanılır. Bu örnekte $f(2.0)$ değerine bir yaklaşım yapılması istenilirse $h = 0.3$ için $x = x_n + sh$ olduğundan $2.0 = 2.2 + s(0.3)$ yani $s = -\frac{2}{3}$ için Newton geri bölünmüş fark formülü yukarıdaki tabloda dalgalı alt çizgi ile ifade edilen katsayı değerleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
P_4(2.0) &= P_4\left(2.2 - \frac{2}{3}(0.3)\right) \\
&= f(x_n) + \sum_{k=1}^4 (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n) \\
&= f(x_n) + (-1)^1 \binom{-s}{1} \nabla^1 f(x_n) + (-1)^2 \binom{-s}{2} \nabla^2 f(x_n) \\
&\quad + (-1)^3 \binom{-s}{3} \nabla^3 f(x_n) + (-1)^4 \binom{-s}{4} \nabla^4 f(x_n) \\
&= f(x_n) + s \nabla f(x_n) + \frac{1}{2!} s(s+1) \nabla^2 f(x_n) + \frac{1}{3!} s(s+1)(s+2) \nabla^3 f(x_n) \\
&\quad + \frac{1}{4!} s(s+1)(s+2)(s+3) \nabla^4 f(x_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0.1103623 - \frac{2}{3}(-0.1714563) - \frac{1}{2!} \frac{2}{3} \left(-\frac{2}{3} + 1\right) 0.0021273 \\
&\quad - \frac{1}{3!} \frac{2}{3} \left(-\frac{2}{3} + 1\right) \left(-\frac{2}{3} + 2\right) 0.0110271 \\
&\quad - \frac{1}{4!} \frac{2}{3} \left(-\frac{2}{3} + 1\right) \left(-\frac{2}{3} + 2\right) \left(-\frac{2}{3} + 3\right) 0.0003548 \\
&= 0.2238754
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.3.7. $x_0 = 0$, $x_1 = 0.6$, $x_2 = 1.2$ ve $f(x) = \cos x^2$ olsun. Beş dijit yuvarlama artimetigi kullanarak Newton geri fark formülü ile verilen noktalarda $f(x)$ fonksiyonunu interpolate eden ikinci Lagrange polinomunu yardımıyla $f(1)$ değeri için bir yaklaşımda bulununuz. Bu yaklaşımda oluşan mutlak hatayı hesaplayınız.

Çözüm. $h = 0.6$ ve $x = 1$ için $s = \frac{x-x_2}{h} = \frac{x-x_1}{h} = \frac{1-1.2}{0.6} = -\frac{1}{3}$ dir. Newton geri fark tablosu aşağıdaki gibi elde edilir:

x_i	$f(x_i)$	$\nabla f(x_i)$	$\nabla^2 f(x_i)$
$x_2 = 1.2$	$0.13042 = f(x_2)$		
$x_1 = 0.6$	0.93590	$-0.80548 = \nabla f(x_2)$	
$x_0 = 0.0$	1.00000	-0.0641	$-0.74138 = \nabla^2 f(x_2)$

Buna göre

$$\begin{aligned}
f(1) &\approx P_2(1) = f(x_2) + s\nabla f(x_2) + \frac{s(s+1)}{2!} \nabla^2 f(x_2) \\
&\approx 0.13042 + \left(-\frac{1}{3}\right) (-0.80548) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{3} + 1\right) (-0.74138) \\
&\approx 0.48129
\end{aligned}$$

yaklaşımı elde edilir. $\cos 1^2 = 0.54030$ olduğundan bu yaklaşımda oluşan mutlak hata

$$|0.54030 - 0.48129| = 0.05901$$

şeklinde bulunur.

3.3.3 Merkezi Farklar

Newton ileri ve geri fark formülleri yaklaşım yapılması istenen $f(x)$ değeri için x noktasının verilen tablonun ortalarında yer alması durumunda kullanışlı değildir. Bu durum için kullanılacak pek çok bölünmüş fark formülü mevcut

olmakla birlikte biz Stirling metodu olarak bilinen **merkezi fark formülü** üzerinde duracağız.

Yaklaşım yapılması istenen noktaya yakın bir x_0 noktası seçelim ve bu noktanın altında yer alan noktaları x_1, x_2, \dots , üzerinde yer alan noktaları ise x_{-1}, x_{-2}, \dots olarak indisleyelim. Buna göre **Stirling formülü**, eğer $n = 2m + 1$ gibi bir tek sayı ise

$$\begin{aligned}
P_n(x) = P_{2m+1}(x) &= f(x_0) + \frac{sh}{2}(f[x_{-1}, x_0] + f[x_0, x_1]) + s^2 h^2 f[x_{-1}, x_0, x_1] \\
&+ \frac{s(s^2 - 1)h^3}{2} f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1] + f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2] \\
&+ \dots + s^2 (s^2 - 1)(s^2 - 4) \dots (s^2 - (m - 1)^2) h^{2m} f[x_{-m}, \dots, x_m] \\
&+ \frac{s(s^2 - 1) \dots (s^2 - m^2) h^{2m+1}}{2} (f[x_{-m-1}, \dots, x_m] + f[x_{-m}, \dots, x_{m+1}]),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$n = 2m$ gibi bir çift sayı ise yukarıdaki formülün son satırının silinmesi ile elde edilen ifade olarak verilir. Bu formülde kullanılan girdi değerleri aşağıdaki tabloda altı çizilerek ifade edilmiştir.

x	$f(x_i)$	Birinci bölünmüş fark	İkinci bölünmüş fark	Üçüncü bölünmüş fark	Dördüncü bölünmüş fark
x_{-2}	$f[x_{-2}]$				
		$f[x_{-2}, x_{-1}]$			
x_{-1}	$f[x_{-1}]$		$f[x_{-2}, x_{-1}, x_0]$		
		$f[x_{-1}, x_0]$		$f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1]$	
x_0	$f[x_0]$		$f[x_{-1}, x_0, x_1]$		$f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2]$
		$f[x_0, x_1]$		$f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2]$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f[x_2]$				

Örnek 3.3.8. Örnek 3.3.1 verilen tablo değerleri göz önüne alımsın. $x_0 = 1.6$ olmak üzere $f(1.5)$ değerine Stirling formülünü kullanarak bir yaklaşımda bulununuz.

Çözüm. Stirling formülünü uygulamak için aşağıdaki tabloda altı çizili olan değerleri ihtiyaç vardır:

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \dots, x_i]$	$f[x_{i-4}, x_i]$
0	1.0	0.7651977				
			-0.4837057			
1	1.3	0.6200860		-0.1087339		
			<u>-0.5489460</u>		<u>0.0658784</u>	
2	1.6	<u>0.4554022</u>		<u>-0.0494433</u>		<u>0.0018251</u>
			<u>-0.5786120</u>		<u>0.0680685</u>	
3	1.9	0.2818186		0.0118183		
			-0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

$h = 0.3$ ve $x_0 = 1.6$ olduğundan $x = x_0 + sh$ için $1.5 = 1.6 + s(0.3)$ yani $s = -\frac{1}{3}$ değeri elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned} f(1.5) &\approx P_4 \left(1.6 + \left(-\frac{1}{3} \right) (0.3) \right) \\ &= 0.4554020 + \left(-\frac{1}{3} \right) \left(\frac{0.3}{2} \right) ((-0.5489460) + (-0.5786120)) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 (0.3)^2 (-0.0494433) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \right) \left(\left(-\frac{1}{3} \right)^2 - 1 \right) (0.3)^3 (0.0658784 + 0.0680685) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \left(\left(-\frac{1}{3} \right)^2 - 1 \right) (0.3)^4 (0.0018251) \\ &= 0.5118200 \end{aligned}$$

yaklaşımına ulaşılır.

4 Nümerik İntegral ve Diferansiyel

4.1 Nümerik Diferansiyel

f fonksiyonunun, bir x_0 noktasındaki türevi aşağıdaki limitin varlığının garantisi altında

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ifadesi ile hesaplanır. Bu formül kullanılarak h 'nin yeterince küçük değerleri için

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

oranının $f'(x_0)$ türevine bir yaklaşım olduğunu söylemek mümkündür. Bununla beraber söz konusu yaklaşım, içerdiği hatanın büyüklüğünden ötürü iyi bir yaklaşım değildir.

Nümerik türev kavramını anlamak amacıyla önce en basit olarak iki nokta için türev formülünü elde edelim: $x_0 \in (a, b)$ verilsin ve $x_1 \in [a, b]$ olacak şekilde $x_1 = x_0 + h$ eşitliğini sağlayan $h \neq 0$ sayıları göz önüne alınsın. $f \in C^2[a, b]$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevini hesaplayalım. $\xi(x)$ sayısı x_0 ile x_1 arasında olmak üzere x_0 ve x_1 noktalarında f fonksiyonu kesen lineer Lagrange interpolasyon polinomu hata terimi ile beraber

$$f(x) = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + \frac{f''(\xi(x))}{2!} (x - x_0)(x - x_1)$$

şeklinde yazılır. $x_1 = x_0 + h$ ise $h = x_1 - x_0$ olduğundan yukarıdaki ifade kullanılarak

$$f(x) = \frac{f(x_0)(x - x_0 - h)}{-h} + \frac{f(x_0 + h)(x - x_0)}{h} + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2} f''(\xi(x))$$

eşitliğine ulaşılır. Bu ifadeden x 'e göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + D_x \left[\frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2} f''(\xi(x)) \right] \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{2(x - x_0) - h}{2} f''(\xi(x)) \\ &\quad + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2} D_x(f''(\xi(x))) \end{aligned}$$

bulunur. Eğer $\xi(x)$ 'i içeren hata terimleri ihmal edilirse

$$f'(x) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

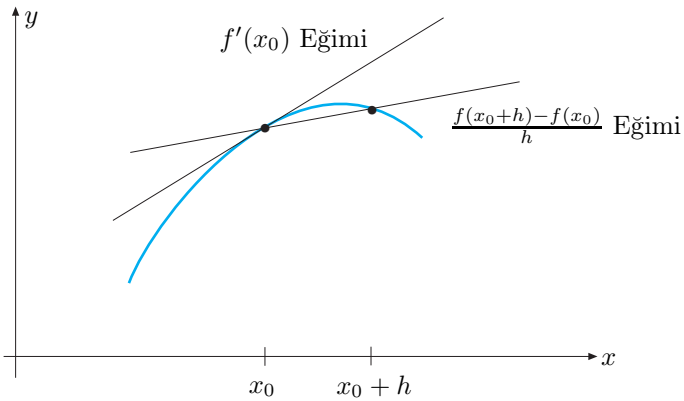
yaklaşımı elde edilir. $\xi(x)$ sayısı tam olarak tayin edilemediğinden $\xi(x)$ 'i içeren hata teriminin hesaplanması mümkün değildir. Bununla beraber eğer $x = x_0$ almır ise $D_x f''(\xi(x))$ teriminin katsayısı sıfır olacağından formül

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{2(x_0 - x_0) - h}{2} f''(\xi) + \frac{(x_0 - x_0)(x_0 - x_0 - h)}{2} D_x(f''(\xi))$$

yani, ξ sayısı x_0 ile $x_0 + h$ arasında olmak üzere

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi) \quad (4.1)$$

haline gelir. Dolayısıyla x_0 ve $x_0 + h$ aralığındaki tüm x değerleri için $|f''(x)| \leq M$ koşulu sağlanıyor ise $(f(x_0 + h) - f(x_0))/h$ oranının $f'(x_0)$ değerine $E = M|h|/2$ hata sınıma sabip bir yaklaşım olduğu sonucu elde edilir. (4.1) ifadesi $h > 0$ ise **ileri fark formülü** (Bkz. Şekil 4.1), $h < 0$ ise **geri fark formülü** olarak adlandırılır.



Şekil 4.1: Türev için ileri fark formülünün geometrik yorumu

Örnek 4.1.1. $h = 0.1$, $h = 0.05$ ve $h = 0.01$ alarak ileri farklar formülü yardımıyla $x_0 = 1.8$ noktasında $f(x) = \ln x$ fonksiyonunun türev değerine yaklaşımlarda bulununuz ve her bir h değeri için yaklaşımda oluşan hataya ait bir sınır belirleyiniz.

Çözüm. ileri fark formülü kullanılarak yapılacak bir yaklaşım

$$f(1.8) \approx \frac{f(1.8 + h) - f(1.8)}{h}$$

şeklinde olacağından farklı h adım uzunlukları için aşağıdaki değerler elde edilir:

- $h = 0.1$: $f(1.8) \approx \frac{f(1.8+0.1)-f(1.8)}{0.1} = \frac{\ln 1.9 - \ln 1.8}{0.1} = 0.5406722127$,
- $h = 0.05$: $f(1.8) \approx \frac{f(1.8+0.05)-f(1.8)}{0.05} = \frac{\ln 1.85 - \ln 1.8}{0.05} = 0.5479794838$,
- $h = 0.01$: $f(1.8) \approx \frac{f(1.8+0.01)-f(1.8)}{0.01} = \frac{\ln 1.81 - \ln 1.8}{0.01} = 0.5540180376$.

$f(x) = \ln x$ için $f'(x) = \frac{1}{x}$ ve $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ olduğundan ξ sayısı x_0 ile $x_0 + h$ yani 1.8 ile $1.8 + h$ arasında olmak üzere

$$|f''(\xi(x))| = \left| -\frac{1}{(\xi(x))^2} \right| \leq \max_{1.8 \leq \xi \leq 1.8+h} \frac{1}{(\xi(x))^2} = \frac{1}{(1.8)^2} = \frac{25}{81} = 0.3086419753 = M$$

elde edilir. Buna göre verilen h değerleri için yapılan yaklaşımda oluşan hatanın sınırı aşağıdaki şekilde elde edilir:

- $h = 0.1$: $E = M \frac{|h|}{2} = \frac{25}{81} \frac{0.1}{2} = \frac{5}{324} = 0.01543209877$,
- $h = 0.05$: $E = M \frac{|h|}{2} = \frac{25}{81} \frac{0.05}{2} = \frac{5}{648} = 0.007716049383$,
- $h = 0.01$: $E = M \frac{|h|}{2} = \frac{25}{81} \frac{0.01}{2} = \frac{1}{648} = 0.001543209877$.

Gerçekte $f'(x) = \frac{1}{x}$ için $f'(1.8) = \frac{1}{1.8} = \frac{5}{9} = 0.\bar{5}$ olduğundan yukarıda elde edilen değerlerin gerçek türev değerine yakın olduğu gözlemlenir.

Şimdi en genel halde x_0, x_1, \dots, x_n gibi $n + 1$ tane farklı nokta için türev yaklaşım formülünü elde edelim. Teorem 3.1.5'e göre x_0, x_1, \dots, x_n noktaları için f fonksiyonuna ait k . Lagrange katsayı polinomu $L_k(x)$ ve $\xi(x)$ sayısı verilen bir I reel sayı aralığında olmak üzere

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x) + \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))$$

eşitliği geçerlidir. Bu ifadeden türev alınırsa

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L'_k(x) + D_x \left[\frac{(x-x_0) \cdots (x-x_n)}{(n+1)!} \right] f^{(n+1)}(\xi(x)) \\ + \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_n)}{(n+1)!} D_x [f^{(n+1)}(\xi(x))]$$

elde edilir. Burada yine x sayısının x_j ($j = 0, 1, \dots, n$) noktalarından farklı olması durumunda oluşan kesme hatasının belirlenmesinde problem ortaya çıkmaktadır. Eğer $x = x_j$ ise $D_x [f^{(n+1)}(\xi(x))]$ terimini içeren ifade 0 olmakta, bu durumda yukarıdaki formül

$$f'(x_j) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L'_k(x_j) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x_j))}{(n+1)!} \prod_{k=0, k \neq j}^n (x_j - x_k) \quad (4.2)$$

haline dönüşür. (4.2) ifadesine $f'(x_j)$ türevi için $(n + 1)$ -nokta formülü adı verilir.

Genelde, (4.2) ifadesinde fazla nokta kullanılarak yapılan yaklaşımlarda daha iyi sonuçlar elde edilmektedir. Bununla beraber üç ve beş nokta üzerinden yapılan hesaplamalarda elde edilen formüller yaygın olarak kullanılır.

Şimdi üç-nokta formüllerini elde edelim: x_0, x_1 ve x_2 noktaları için Lagrange katsayı polinomları ve türevleri aşağıdaki şekilde tespit edilir:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, & L'_0(x) &= \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \\ L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, & L'_1(x) &= \frac{2x - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \\ L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}, & L'_2(x) &= \frac{2x - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \end{aligned}$$

Yukarıda elde edilen neticeler (4.2) formülünde kullanılırsa her $j = 0, 1, 2$ için

$$\begin{aligned} f'(x_j) &= f(x_0) \left[\frac{2x_j - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \right] + f(x_1) \left[\frac{2x_j - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \right] \\ &+ f(x_2) \left[\frac{2x_j - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \right] + \frac{1}{6} f^{(3)}(\xi_j) \prod_{k=0, k \neq j}^2 (x_j - x_k) \end{aligned} \quad (4.3)$$

sonucu elde edilir. Burada ξ_j notasyonu ile sayının x_j noktasına bağlı olduğunu ifade etmektedir.

4.1.1 Üç-Nokta Formülleri

(4.3) formülünde verilen noktaların aralıkları eşit ise, yani $h \neq 0$ olmak üzere

$$x_1 = x_0 + h \quad \text{ve} \quad x_2 = x_0 + 2h$$

sağlamıyor ise (4.3) ifadesinden $x_j = x_0$ için

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= f(x_0) \left[\frac{2x_0 - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \right] + f(x_1) \left[\frac{2x_0 - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \right] \\ &+ f(x_2) \left[\frac{2x_0 - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \right] + \frac{1}{6} f^{(3)}(\xi_0) \prod_{k=1}^2 (x_0 - x_k) \\ &= f(x_0) \frac{-3h}{2h^2} + f(x_1) \frac{2h}{h^2} + f(x_2) \frac{-h}{2h^2} + \frac{1}{6} f^{(3)}(\xi_0) 2h^2 \\ &= \frac{1}{h} \left[-\frac{3}{2} f(x_0) + 2f(x_1) - \frac{1}{2} f(x_2) \right] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_0) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde eğer $x_j = 1$ için

$$f'(x_1) = \frac{1}{h} \left[-\frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2} f(x_2) \right] - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_1)$$

ve $x_j = x_2$ için

$$f'(x_2) = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2}f(x_0) - 2f(x_1) + \frac{3}{2}f(x_2) \right] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2)$$

eşitliklerine ulaşılır. $x_1 = x_0 + h$ ve $x_2 = x_0 + 2h$ olduğu bu formüllerde kullanılırsa

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left[-\frac{3}{2}f(x_0) + 2f(x_0 + h) - \frac{1}{2}f(x_0 + 2h) \right] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0),$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{h} \left[-\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_0 + 2h) \right] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

ve

$$f'(x_2) = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2}f(x_0) - 2f(x_0 + h) + \frac{3}{2}f(x_0 + 2h) \right] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2)$$

elde edilir. Eğer ikinci ve üçüncü formülde $f'(x_0)$ türevini hesaplamak için gerekli indis değişiklikleri yapılırsa

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0),$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

ve

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2)$$

şeklinde bir x_0 noktasındaki türev değerini bulmak için kullanılabilecek üç formüle ulaşılmış olur. Aslında son ifade ilk formülde h yerine $-h$ almak sureti ile elde edilebileceğinden iki farklı formül söz konusudur:

Üç-Nokta Uç Nokta Formülü

ξ_0 sayısı x_0 ile $x_0 + 2h$ arasında olmak üzere

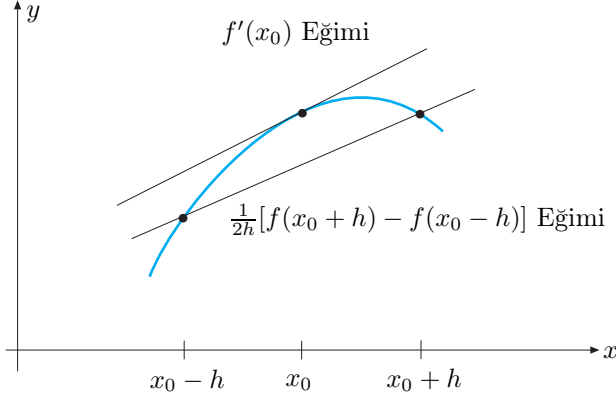
$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0). \quad (4.4)$$

Üç-Nokta Orta Nokta Formülü

ξ_1 sayısı $x_0 - h$ ile $x_0 + h$ arasında olmak üzere

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1). \quad (4.5)$$

Her ne kadar üç-nokta uç nokta ve üç-nokta orta nokta formüllerinin hatası $O(h^2)$ olsa da orta nokta formülü kullanılarak yapılan yaklaşımda oluşan hata, uç nokta formülü kullanılarak yapılan yaklaşımda oluşan hatanın yarısı kadardır. Bunun nedeni, (4.5) formülü kullanılarak yapılan yaklaşımda x_0 noktasının her iki tarafındaki veriler kullanılıyorken (4.4) formülünde sadece tek yöndeki dataların kullanılmasıdır. Üç-nokta uç nokta formülü f fonksiyonunun türevine verilen aralığın uç noktalarında bir yaklaşım yapılacak ise kullanılır. Ara noktalarda yapılacak yaklaşımlarda ise hatasının az olmasından ötürü üç-nokta orta nokta formülünü kullanmak mantıklıdır. Üç-nokta orta nokta formülü kullanılarak yapılan yaklaşım Şekil 4.2'de gösterilmektedir.



Şekil 4.2: Üç-nokta orta nokta formülünün geometrik yorumu

4.1.2 Beş-Nokta Formülleri

Üç nokta formüllerinde olduğu gibi hareket ederek birbirinden farklı, h adım uzunluklu $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, x_3 = x_0 + 3h$ ve $x_4 = x_0 + 4h$ noktaları için, $O(h^4)$ hatasına sahip beş nokta formülleri aşağıdaki şekilde verilir:

Beş-Nokta Orta Nokta Formülü

ξ sayısı $x_0 - 2h$ ile $x_0 + 2h$ arasında olmak üzere

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h} [f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi). \quad (4.6)$$

Beş-Nokta Uç Nokta Formülü

ξ sayısı x_0 ile $x_0 + 4h$ arasında olmak üzere

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h} [-25f(x_0) + 48f(x_0 + h) - 36f(x_0 + 2h) + 16f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 4h)] + \frac{h^4}{5} f^{(5)}(\xi). \quad (4.7)$$

Sol uç nokta için yapılacak yaklaşımlarda (4.7) ifadesi, sağ uç nokta için yapılacak yaklaşımlarda ise (4.7) eşitliğinde h yerine $-h$ yazmak sureti ile elde edilen formül kullanılır. Beş-nokta orta nokta formülü kullanarak yapılan yaklaşımda oluşan hatanın, beş-nokta uç nokta formülü kullanılarak yapılan yaklaşımda oluşan hatadan daha küçük olduğu hata terimleri karşılaştırıldığında kolayca görülür.

Örnek 4.1.2. $f(x) = xe^x$ fonksiyonunun bazı noktadaki değerleri aşağıda verilmiştir. Uygun üç-nokta ve beş-nokta formüllerini kullanarak $f'(2.0)$ değeri için bir yaklaşımda bulununuz ve mutlak hatayı hesaplayınız.

x	$f(x)$
1.8	10.889365
1.9	12.703199
2.0	14.778112
2.1	17.148957
2.2	19.855033

Çözüm. Verilen datalara göre üç-nokta formülleri kullanarak dört farklı yaklaşım yapılabilir: Uç nokta formülünde $h = 0.1$ ve $h = -0.1$ alınabilir veya $h = 0.1$ ve $h = 0.2$ için orta nokta formülü kullanılabilir. Tüm bu seçenekler içerisinde en iyi sonucu verecek olan yaklaşım, adım uzunluğunun en küçük olduğu $h = 0.1$ değeri seçilerek hatasının diğerlerinin yarısı kadar olduğunu bildiğimiz orta nokta formülünü kullanarak yapılacak yaklaşımdır.

$h = 0.1$ için (4.4) ifadesi ile verilen üç-nokta uç nokta formülü kullanılarak

$$f'(2.0) \approx \frac{1}{2(0.1)}[-3f(2.0) + 4f(2.1) - f(2.2)] = 22.032310$$

yaklaşımı elde edilir. Bu formül ile $h = -0.1$ değeri için yapılacak yaklaşımın sonucu ise 22.054525 olarak bulunur.

$h = 0.1$ için (4.5) ifadesi ile verilen üç-nokta orta nokta formülü kullanılarak

$$f'(2.0) \approx \frac{1}{2(0.1)}[f(2.1) - f(1.9)] = 22.228790$$

yaklaşımı elde edilir. Bu formül ile $h = 0.2$ değeri için yapılacak yaklaşımın sonucu ise 22.414163 olarak bulunur.

Verilen datalar göz önüne alındığında beş-nokta formüllerinden sadece orta nokta formülünün $h = 0.1$ için uygulanabileceği sonucuna ulaşılır.

$h = 0.1$ için (4.6) ifadesi ile verilen beş-nokta orta nokta formülü kullanılarak

$$f'(2.0) \approx \frac{1}{12(0.1)}[f(1.8) - 8f(1.9) + 8f(2.1) - f(2.2)] = 22.166999$$

yaklaşımı elde edilir.

Türev ifadesinin gerçek değeri $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$ olduğundan

$$f'(2.0) = e^{2.0}(1 + 2.0) = 22.167168$$

şeklide elde edilir. Buna göre yapılan yaklaşımlarda oluşan mutlak hatlar aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

Kullanılan Formül	Adım Uzunluğu	Mutlak Hata
Üç-nokta uç nokta	$h = 0.1$	1.35×10^{-1}
Üç-nokta uç nokta	$h = -0.1$	1.13×10^{-1}
Üç-nokta orta nokta	$h = 0.1$	6.16×10^{-2}
Üç-nokta orta nokta	$h = 0.2$	2.47×10^{-1}
Beş-nokta orta nokta	$h = 0.1$	1.69×10^{-4}

Örnek 4.1.3. Aşağıdaki tabloyu kullanarak $f'(0.10)$, $f'(0.35)$ ve $f'(0.60)$ değerleri için en uygun yaklaşımı yapınız.

x	0.10	0.15	0.20	0.30	0.35	0.55	0.60
$f(x)$	0.31	0.36	0.41	0.46	0.47	0.44	0.41

Çözüm.

- $f'(0.10)$ değerini hesaplamak için $h > 0$ olarak ele almak gerekir. Tablodaki verilere göre $h = 0.05$ ve $h = 0.10$ olarak alınabilir iken bunlardan uygun olanı, yaklaşımda daha iyi sonuç vereceğini bildiğimiz küçük olan değeri, yani $h = 0.05$ 'i alıp üç-nokta uç nokta formülünü kullanmaktır. Zira beş-nokta formülleri bu değerler için kullanılamaz. Buna göre

$$\begin{aligned} f'(0.10) &\approx \frac{1}{2h} [-3f(0.10) + 4f(0.15) - f(0.20)] \\ &\approx \frac{1}{2(0.05)} [-3(0.31) + 4(0.36) - 0.41] = 1 \end{aligned}$$

bulunur.

- $f'(0.35)$ değerini hesaplamak için $h = 0.20$ veya $h = 0.25$ alınarak üç-nokta orta nokta formülü kullanılabilir. Beş-nokta formülleri bu değerler için kullanılamaz. Mevcut iki seçenek arasından hatası diğerine göre daha düşük olan $h = 0.20$ alınarak üç-nokta orta nokta formülünü kullanmak en iyi yaklaşımı yapmamızı sağlar.

$$\begin{aligned} f'(0.35) &\approx \frac{1}{2(0.20)} [f(0.55) - f(0.15)] \\ &\approx \frac{1}{2(0.20)} [0.44 - 0.36] = 0.2 \end{aligned}$$

bulunur.

- $f'(0.60)$ değerini hesaplamak için $h < 0$ olarak ele almak gerekir. Tablodaki verilere göre uygun tek durum $h = -0.25$ alarak üç-nokta uç nokta formülünü kullanmaktır. Buna göre

$$\begin{aligned} f'(0.60) &\approx \frac{1}{2(0.25)} [3f(0.60) - 4f(0.35) + f(0.10)] \\ &\approx \frac{1}{2(0.25)} [3(0.41) - 4(0.47) + 0.31] = -0.68 \end{aligned}$$

bulunur.

4.1.3 İkinci Türev için Orta Nokta Formülü

f fonksiyonunu x_0 civarındaki üçüncü Taylor polinomu, $\hat{\xi}$ sayısı x ile x_0 arasında olmak üzere

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \frac{1}{4!}f^{(iv)}(\hat{\xi})(x - x_0)^4$$

ifadesi ile verilir. Bu açılımda x yerine sırası ile $x_0 + h$ ve $x_0 - h$ yazılırsa, $x_0 - h < \xi_{-1} < x_0 < \xi_1 < x_0 + h$ olmak üzere

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(iv)}(\xi_1)h^4$$

ve

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(iv)}(\xi_{-1})h^4$$

eşitlikleri elde edilir. Bu iki ifade taraf tarafa toplanırsa birinci ve üçüncü türevi içeren terimler sadeleşir ve

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + f''(x_0)h^2 + \frac{1}{24} [f^{(iv)}(\xi_1) + f^{(iv)}(\xi_{-1})] h^4$$

elde edilir. Son eşitlik ikinci türeve göre tekrar yazılırsa

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} [f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{24} [f^{(iv)}(\xi_1) + f^{(iv)}(\xi_{-1})] \quad (4.8)$$

sonucuna ulaşılır. $f^{(iv)}$ fonksiyonu $[x_0 - h, x_0 + h]$ aralığında sürekli olsun. $\frac{1}{2} [f^{(iv)}(\xi_1) + f^{(iv)}(\xi_{-1})]$ ifadesi $f^{(iv)}(\xi_1)$ ile $f^{(iv)}(\xi_{-1})$ değerleri arasında olduğundan Ortalama Değer Teoremi'ne göre ξ_1 ile ξ_{-1} arasında ve dolayısıyla $(x_0 - h, x_0 + h)$ içinde bir ξ sayısı için

$$f^{(iv)}(\xi) = \frac{1}{2} [f^{(iv)}(\xi_1) + f^{(iv)}(\xi_{-1})] \quad (4.9)$$

eşitliği sağlanır. (4.9) bağıntısı (4.8)'da yerine yazılırsa ξ sayısı $x_0 - h$ ile $x_0 + h$ arasında olmak üzere

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} [f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{12} f^{(iv)}(\xi) \quad (4.10)$$

eşitliği elde edilir. (4.10) formülüne **ikinci türev için orta nokta formülü** adı verilir. Görüldüğü üzere hata $O(h^2)$ 'dir.

Örnek 4.1.4. Örnek 4.1.2'de $f(x) = xe^x$ fonksiyonunun aşağıdaki tabloda verilen değerlerine karşılık çeşitli üç ve beş nokta formülleri farklı adım uzunlukları ile kullanılarak $f'(2.0)$ için yaklaşımların ne şekilde yapılabileceği gösterilmiştir. Şimdi (4.10) ile verilen ikinci türev formülünü kullanarak $f''(2.0)$ değerine bir yaklaşımda bulununuz ve bu yaklaşımda oluşan hatayı hesaplayınız.

x	$f(x)$
1.8	10.889365
1.9	12.703199
2.0	14.778112
2.1	17.148957
2.2	19.855033

Çözüm. Yukarıdaki data tablosuna göre $f''(2.0)$ değerine bir yakışalm $h = 0.1$ ve $h = 0.2$ alınarak yapılabilir. Eğer $h = 0.1$ alınır ise (4.10) formülünden

$$f''(2.0) \approx \frac{1}{(0.1)^2} [f(1.9) - 2f(2.0) + f(2.1)] = 29.593200,$$

benzer şekilde $h = 0.2$ alınır ise

$$f''(2.0) \approx \frac{1}{(0.2)^2} [f(1.8) - 2f(2.0) + f(2.2)] = 29.704275$$

değerleri elde edilir.

$$f''(x) = e^x(x+2) \text{ olduğundan türevin gerçek değeri}$$

$$f''(2.0) = e^{2.0}(2.0+2) = 29.556224$$

şeklinde bulunur. Buna göre $h = 0.1$ alındığında yaklaşımda oluşan mutlak hata değeri 3.6976×10^{-2} iken $h = 0.2$ alındığında oluşan mutlak hata 1.48051×10^{-1} olur. h değeri ne kadar küçük alınır ise yapılan yaklaşım gerçeğe o kadar yaklaşıcağından bulunan mutlak hata değerleri mantıklıdır.

Örnek 4.1.5. $f(x) = x \sin x$ ve $h = 0.1$ olmak üzere $f''(1)$ değeri için bir yaklaşımda bulununuz. Bu yaklaşımda oluşan mutlak hatayı hesaplayınız ve hata için bir üst sınır belirleyiniz.

Çözüm. $f(x) = x \sin x$, $x_0 = 1$ ve $h = 0.1$ için (4.10) formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} f''(1) &\approx \frac{1}{h^2} [f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)] \\ &\approx \frac{1}{(0.1)^2} [f(1.1) - 2f(1) + f(0.9)] \\ &\approx 0.23803 \end{aligned}$$

olarak bulunur. $f(x) = x \sin x$ ise $f'(x) = \sin x + x \cos x$ ve $f''(x) = 2 \cos x - x \sin x$ olduğundan fonksiyonun verilen noktadaki ikinci türev değeri

$$f''(1) = 2 \cos 1 - \sin 1 = 0.23913$$

şeklinde elde edilir. Buna göre oluşan mutlak hata

$$|0.23913 - 0.23803| = 1.1 \times 10^{-3}$$

değeri ile verilir. (4.10) formülünde hata terimi dördüncü türevi içerdiğinden $f'''(x) = -x \cos x - 3 \sin x$ ve $f^{(iv)}(x) = -4 \cos x + x \sin x$ olmak üzere yapılan yaklaşımda oluşan hata için bir üst sınır

$$E \leq \frac{h^2}{12} \max_{\xi \in [0.9, 1.1]} |f^{(iv)}(\xi)|$$

eşitsizliği ile verilir. Buna göre, $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının her x için birden küçük ve $[0.9, 1.1]$ aralığında $\sin x$ fonksiyonunun artan, $\cos x$ fonksiyonunun ise azalan olduğu göz önüne alındığında

$$E \leq \frac{(0.1)^2}{12} \max_{\xi \in [0.9, 1.1]} |-4 \cos \xi + \xi \sin \xi| = \frac{(0.1)^2}{12} |-4 \cos 0.9 + 0.9 \sin 0.9|$$

sonuçta

$$E \leq 1.4945 \times 10^{-3}$$

elde edilir.

4.1.4 Türev Hesabında Oluşan Yuvarlama Hataları

Türev değerine bir yaklaşım yapıldığında oluşan yuvarlama hatasına dikkat etmek gerekir. Bu durumu vurgulamak için (4.5) eşitliği ile verilen üç-nokta orta nokta formülü

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$

üzerinden bazı çıkarımlarda bulunabiliriz. Farz edelim ki, $f(x_0 + h)$ ve $f(x_0 - h)$ ifadeleri sırası ile $e(x_0 + h)$ ve $e(x_0 - h)$ yuvarlama hataları ile $\tilde{f}(x_0 + h)$ ve $\tilde{f}(x_0 - h)$ olarak hesaplınsın. Buna göre

$$f(x_0 + h) = \tilde{f}(x_0 + h) + e(x_0 + h) \quad \text{ve} \quad f(x_0 - h) = \tilde{f}(x_0 - h) + e(x_0 - h)$$

yazılabilir. Dolayısıyla, yaklaşımda kesme ve yuvarlamadan dolayı oluşan toplam hata

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{2h} [\tilde{f}(x_0 + h) + e(x_0 + h) - \tilde{f}(x_0 - h) - e(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi) \\ &= \frac{\tilde{f}(x_0 + h) - \tilde{f}(x_0 - h)}{2h} + \frac{e(x_0 + h) - e(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi) \end{aligned}$$

yani

$$f'(x_0) - \frac{\tilde{f}(x_0 + h) - \tilde{f}(x_0 - h)}{2h} = \frac{e(x_0 + h) - e(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$

şeklinde elde edilir. Eğer $e(x_0 \pm h)$ yuvarlama hatası bir $\varepsilon > 0$ sayısı ile, f fonksiyonunun üçüncü türevi bir M sayısı ile sınırlı ise

$$\left| f'(x_0) - \frac{\tilde{f}(x_0 + h) - \tilde{f}(x_0 - h)}{2h} \right| = \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6} M$$

elde edilir. $\frac{h^2}{6}M$ kesme hatasını minimize etmek için h uzunluğunu azaltmak gerekir. Fakat h değerinin azalması durumunda $\frac{\varepsilon}{h}$ ile verilen yuvarlama hatası değeri artacaktır. Dolayısıyla, pratikte, oluşan yuvarlama hatasının yaklaşıma etkisi göz önüne alındığında h değerinin çok küçük olması nadiren avantajlı bir durum olarak karşımıza çıkmaktadır.

Örnek 4.1.6. Tablo 1’de verilen noktalara karşılık $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun aldığı değerler, Tablo 2’de ise verilen h değerleri için $f'(0.900)$ türevine

$$f'(0.900) \approx \frac{f(0.900 + h) - f(0.900 - h)}{2h}$$

formülü kullanılarak yapılan yaklaşımlar ve bu yaklaşımlar sonucu $f'(0.900) = \cos 0.900 = 0.62161$ olduğu bilindiğine göre oluşan mutlak hatalar verilmektedir.

x	$\sin x$	x	$\sin x$	h	$f'(0.900)$ türevine yaklaşım	MutlakHata
0.800	0.71736	0.901	0.78395	0.001	0.62500	0.00339
0.850	0.75128	0.902	0.78457	0.002	0.62550	0.00089
0.880	0.77074	0.905	0.78643	0.005	0.62200	0.00039
0.890	0.77707	0.910	0.78950	0.010	0.62150	0.00011
0.895	0.78021	0.920	0.79560	0.020	0.62150	0.00011
0.898	0.78208	0.950	0.81342	0.050	0.62140	0.00021
0.899	0.78270	1.000	0.84147	0.100	0.62055	0.00106

Tablo 1

Tablo 2

Oluşan hatalar göz önüne alındığında türev değeri için en iyi yaklaşımların h 'nin 0.005 ile 0.05 arasındaki değerleri için olduğu görülmektedir. Diğer taraftan yapılan yaklaşımda oluşan kesme ve yuvarlama hatalarının $e(h) = \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M$ ifadesi ile verildiğini biliyoruz. Şimdi $e(h)$ fonksiyonunun minimum değerini aldığı noktayı bulalım:

$$e'(h) = -\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{h}{3}M = \frac{Mh^3 - 3\varepsilon}{3h^2} = 0 \Rightarrow Mh^3 - 3\varepsilon = 0$$

olduğundan $h = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}}$ noktası $e(h)$ fonksiyonunun ekstremum noktasıdır. Bununla birlikte

$$e''(h) = \frac{2\varepsilon}{h^3} + \frac{1}{3}M = \frac{6\varepsilon + Mh^3}{3h^3} \Rightarrow e''\left(\sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}}\right) > 0$$

sağlandığından ikinci türev teoremine göre $h = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}}$ noktasında $e(h)$ minimum değerini alır. Ayrıca M sayısı f fonksiyonunun üçüncü türevi için bir sınırdan olduğundan $f(x) = \sin x$ için $f'''(x) = \cos x$ 'dir ve buradan

$$M = \max_{x \in [0.8, 1.0]} |f'''(x)| = \max_{x \in [0.8, 1.0]} |\cos x| = \cos 0.8 = 0.69671$$

sonucuna ulaşılır. Yuvarlama aritmetiği ile k ondalık basamak kullanılarak yapılan bir yaklaşımda oluşacak hata için bir sınırlama $5 \times 10^{-k-1}$ şeklinde verildiğinden, 5 ondalık basamak kullanılarak hesaplanan f değerlerinin yuvarlama hatası için bir sınırlama $\varepsilon = 5 \times 10^{-6}$ olarak elde edilir.

Yukarıda hesaplanan M ve ε değerleri h ifadesinde yerine yazılırsa

$$h = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}} = \sqrt[3]{\frac{3(0.000005)}{0.69671}} \approx 0.028$$

elde edilir. Buna göre $h = 0.028$ seçilmesi durumunda en uygun yaklaşımın yapılacağı sonucuna ulaşılır.

Pratikte verilen fonksiyonun üçüncü türevini her zaman elde edemediğimizden yukarıda anlatıldığı gibi en uygun h değeri için bir tahminde bulunmayız. Fakat adım aralığının azaltılmasının yapılan yaklaşımı daha iyi hale her zaman getirmeyeceği olgusunu da bilmekte fayda vardır.

Yukarıdaki örnekte yuvarlama hatası, (4.5) ifadesi ile verilen üç-nokta orta nokta formülü üzerinden irdelenmiştir. Bununla beraber verilen tüm türev formüllerinde benzer zorluk ile karşılaşmaktadır. Bir yaklaşımda oluşan yuvarlama hatasının değerini hesaplarırken kullanılan formülde h adım uzunluğu paydada yer aldığından küçük bir sayı ile bölme işlemi kesirde büyük değerler üretmekte, dolayısıyla yuvarlama hatasının artmasına neden olmaktadır. Bu karakteristiğinden ötürü türeve yapılan yaklaşım metotları *güvenilmez* olarak isimlendirilirler.

4.2 Nümerik İntegrasyonun Temelleri

Nümerik integrasyon belirli integral hesabında anti-türev ifadesinin elde edilmesinin zor olduğu durumlarda integral değerine bir yaklaşımda bulunmak için kullanılır. $\int_a^b f(x)dx$ integral değerine yapılan en temel yaklaşım $\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$ toplamı ile elde edilen **nümerik alan hesabı** metodudur.

Nümerik alan hesabı metodu temel olarak Lagrange interpolasyon polinomu ile elde edilir: $[a, b]$ aralığında $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ gibi $n+1$ tane farklı nokta verilisin. Buna göre $f(x)$ fonksiyonunu bu $n+1$ noktada geçen n . Lagrange interpolasyon polinomu hata terimi ile $L_k(x)$ Lagrange bazı (ya da Lagrange katsayısı)

$$\begin{aligned} L_k(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \\ &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x-x_i}{x_k-x_i} \end{aligned}$$

olarak tanımlanmak üzere

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) + \prod_{i=0}^n (x-x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \quad (4.11)$$

ifadesi ile verilir. Buradan $\xi(x)$ sayısı $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ noktaları ve dolayısıyla $[a, b]$ aralığında yer alan x 'e bağlı bir sabittir. (4.11) ifadesinin her iki tarafının a 'dan b 'ye integrali alınırsa $i = 0, 1, \dots, n$ için $a_i = \int_a^b L_i(x) dx$ olarak tanımlanmak üzere

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) dx + \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} dx \\ &= \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x)) dx \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu integral hesabında oluşan hata

$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x)) dx$$

ihmal edildiğinde

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

yaklaşımı bulunmuş olur.

Genel halde integral formüllerine geçmeden önce eşit uzaklıklı noktalar için birinci ve ikinci mertebeden Lagrange interpolasyon polinomları kullanılarak elde edilen Yamuk ve Simpson kurallarını inceleyelim:

4.2.1 Yamuk Kuralı

$x_0 = a$ ve $x_1 = b$ olmak üzere $\int_a^b f(x) dx$ integrali göz önüne alınırsın. x_0 ve x_1 sayıları arasındaki uzaklık $h = x_1 - x_0 = b - a$ ve $\xi(x)$ sayısı x_0 ile x_1 arasında olmak üzere x_0 ve x_1 noktalarında $f(x)$ fonksiyonunu kesen birinci Lagrange polinomu hata terimi ile beraber

$$f(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1) + \frac{1}{2} f''(\xi(x)) (x - x_0) (x - x_1)$$

şeklinde yazılsın. Bu ifadenin her iki yanını $x_0 = a$ 'dan $x_1 = b$ 'ye integre edersek

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1) \right] dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x)) (x - x_0) (x - x_1) dx \end{aligned} \quad (4.12)$$

elde edilir. $\xi(x)$ sayısı x_0 ile x_1 arasında yer aldığından $(x - x_0)(x - x_1)$ çarpımının değeri her zaman negatiftir. Yani $[x_0, x_1]$ aralığında $(x - x_0)(x - x_1)$ ifadesi işaret değiştirmez. Dolayısıyla İntegraller için Ağırlıklı Ortalama Değer

Teoremi hata teriminde kullanılabilir. Buna göre $\xi \in [x_0, x_1]$ için $x_1 - x_0 = h$ olduğu da göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1) dx &= f''(\xi) \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1) dx \\
&= f''(\xi) \int_{x_0}^{x_1} (x^2 - x(x_0+x_1) + x_0x_1) dx \\
&= f''(\xi) \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}(x_0+x_1) + x_0x_1 \right]_{x_0}^{x_1} \\
&= -\frac{h^3}{6} f''(\xi)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade (4.12) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &= \left[\frac{(x-x_1)^2}{2(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)} f(x_1) \right]_{x_0}^{x_1} - \frac{h^3}{12} f''(\xi) \\
&= \frac{(x_1-x_0)}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. $h = x_1 - x_0$ olduğundan pozitif değerli f fonksiyonuna ait $\int_a^b f(x) dx$ integralini nümerik olarak hesaplamada kullanılan yamuk kuralı

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

şeklinde elde edilir. Hata terimi ihmal edildiğinde

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$$

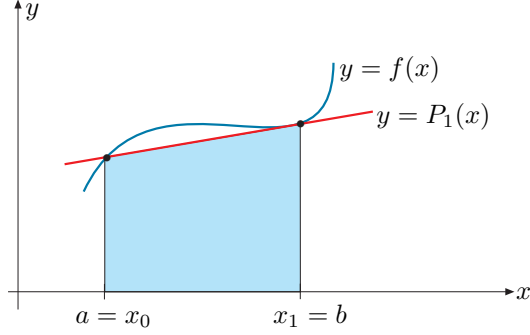
yaklaşımına ulaşılır. Bu metot adını $\frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$ ifadesinin Şekil 4.3'de gösterildiği üzere yamuğun alan formülü olmasından alır.

Yamuk kuralında hata terimi f'' ifadesini içerdiğinden integral değerine yaklaşımda bulunan $f(x)$ fonksiyonunun ikinci türevi sıfır ise, yani $f(x)$ en çok birinci dereceden bir polinom ise, yamuk kuralı integralin tam değerini verir. Bir başka deyişle yamuk kuralının hassaslık derecesi birdir.

Örnek 4.2.1. Yamuk kuralını kullanarak $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$ integral değeri için bir yaklaşımda bulununuz ve bu yaklaşımda oluşan hata için bir üst sınır belirleyiniz.

Çözüm. $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ dersek $a = x_0 = 0$, $b = x_1 = 1$ ve $h = b - a = 1 - 0 = 1$ olmak üzere istenen integral için yamuk kuralı kullanılarak yapılan yaklaşımdan

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] = \frac{1}{2} [f(0) + f(1)] = \frac{1}{2} [4 + 2] = 3$$



Şekil 4.3: Yamuk kuralı

elde edilir. Oluşan hata, ξ sayısı 0 ile 1 arasında olmak üzere

$$E = \left| \frac{h^3}{12} f''(\xi(x)) \right|$$

ifadesi ile verildiğinden

$$f(x) = \frac{4}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{8x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{8(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

bulunur. Eğer $g(x) = \frac{8(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$ dersek $g'(x) = -\frac{96x(x^2-1)}{(1+x^2)^4}$ bulunur. Buna göre $g(x)$ fonksiyonunun ekstremum noktaları 0, 1 ve -1 'dir. Biz bu noktalardan sadece verilen aralık üzerinde olan 0 ve 1 ile ilgileniriz.

$$|g(0)| = \left| \frac{8(0-1)}{(1+0)^3} \right| = 8 > 2 = \frac{8(3-1)}{(1+1)^3} = |g(1)|$$

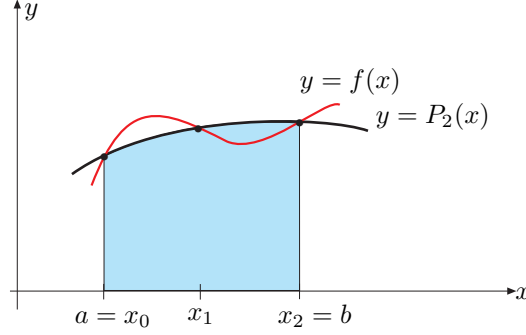
olduğundan $|g(x)|$ fonksiyonu maksimum değerini $x = 0$ noktasında alır. Bu olgu altında

$$E \leq \frac{h^3}{12} \max_{0 \leq \xi \leq 1} \left| \frac{8(3\xi^2-1)}{(1+\xi^2)^3} \right| = \frac{1}{12} \left| \frac{8(0-1)}{(1+0)^3} \right| = \frac{2}{3}$$

olarak elde edilir.

4.2.2 Simpson Kuralı

$x_0 = a$ ve $x_2 = b$ olmak üzere $\int_a^b f(x) dx$ integrali göz önüne alınsın. Adım aralığı $h = \frac{x_2-x_0}{2} = \frac{b-a}{2}$ olmak üzere $[a, b]$ aralığı tam orta noktasından iki alt aralığa bölünsün ve Şekil 4.4'de gösterildiği gibi $x_1 = x_0 + h$ şeklinde üçüncü bir nokta tanımlansın.



Şekil 4.4: Simpson kuralı

$\xi(x)$ sayısı x_0 ile x_2 arasında olmak üzere x_0 , x_1 ve x_2 noktalarından geçen $f(x)$ fonksiyonunun ikinci Lagrange polinomu hata terimi ile birlikte

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) \\ + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6}f'''(\xi(x))$$

olmak üzere bu ifadenin her iki yanının $x_0 = a$ 'dan $b = x_2$ 'ye integrali alınırsa

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) \right. \\ \left. + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2) \right] dx \\ + \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6}f'''(\xi(x))dx$$

elde edilir. Yamuk kuralındaki gibi devam ederek hata teriminin integrali alınırsa f''' türevi ile gelen ifadede $O(h^4)$ yakınsamasının olduğu görülür. Bununla beraber $f^{(iv)}$ türevini içeren ve daha hızlı 0'a yakınsayan hata terimine sahip bir ifade x_1 civarında f fonksiyonunun üçüncü Taylor polinomu kullanarak aşağıdaki şekilde elde edilir: $\xi(x) \in (x_0, x_2)$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun x_1 civarındaki üçüncü Taylor polinomu hata terimi ile beraber

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x-x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{3!}(x-x_1)^3 \\ + \frac{f^{(iv)}(\xi(x))}{4!}(x-x_1)^4$$

eşitliği ile verilir. Bu ifadenin her iki yanını $x_0 = a$ 'dan $x_2 = b$ 'ye integre edersek

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \left[f(x_1)(x) + \frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 + \frac{f'''(x_1)}{24}(x-x_1)^4 \right]_{x_0}^{x_2} + \frac{1}{24} \int_{x_0}^{x_2} f^{(iv)}(\xi(x))(x-x_1)^4 dx \quad (4.13)$$

elde edilir. $(x-x_1)^4$ terimi $[x_0, x_2]$ aralığında negatif olamayacağından verilen aralıkta işaret değişirmez. Buna göre İntegraller için Ağırlıklı Ortalama Değer Teoreminden, (x_0, x_2) aralığındaki bir ξ_1 sayısı için

$$\frac{1}{24} \int_{x_0}^{x_2} f^{(iv)}(\xi(x))(x-x_1)^4 dx = \frac{f^{(iv)}(\xi_1)}{24} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)^4 dx$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \frac{f^{(iv)}(\xi_1(x))}{24} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)^4 dx &= \frac{f^4(\xi_1(x))}{24} \frac{(x-x_1)^5}{5} \Big|_{x_0}^{x_2} \\ &= \frac{f^{(iv)}(\xi_1)}{120} (x-x_1)^5 \Big|_{x_0}^{x_2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

elde edilir. Diğer taraftan $h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$ için

$$(x_2 - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2 = 0$$

$$(x_2 - x_1)^4 - (x_0 - x_1)^4 = 0$$

$$(x_2 - x_1)^3 - (x_0 - x_1)^3 = 2h^3$$

ve

$$(x_2 - x_1)^5 - (x_0 - x_1)^5 = 2h^5$$

eşitlikleri (4.13) ve (4.14) ifadelerinde kullanılırsa

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3} f''(x_1) + \frac{f^{(iv)}(\xi_1)}{60} h^5 \quad (4.15)$$

elde edilir. (4.15) eşitliğinde (4.10) ile verilen

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2} [f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^2}{12} f^{(iv)}(\xi_2)$$

ikinci türev için orta nokta formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &= 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3} \left\{ \frac{1}{h^2} [f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^2}{12} f^{(iv)}(\xi_2) \right\} \\ &\quad + \frac{f^{(iv)}(\xi_1)}{60} h^5 \\ &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{12} \left[\frac{1}{3} f^{(iv)}(\xi_2) - \frac{1}{5} f^{(iv)}(\xi_1) \right]\end{aligned}$$

bulunur. Burada $z \in (x_0, x_2)$ için

$$f^{(iv)}(\xi) = \frac{5}{2} f^{(iv)}(\xi_2) - \frac{3}{2} f^{(iv)}(\xi_1)$$

olduğu kullanılırsa

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi)$$

ifadesi ile verilen Simpson kuralı elde edilir.

Simpson kuralı için hata terimi $f^{(iv)}$ türevini içerdiğinden integral değerine yaklaşımda bulunan $f(x)$ fonksiyonunun dördüncü türevi sıfır ise, yani $f(x)$ en çok üçüncü dereceden bir polinom ise bu formül kullanılarak yapılan yaklaşım tam integral değerini verir. Bir başka deyişle Simpson kuralının hassaslık derecesi üçtür.

Örnek 4.2.2. Aşağıda verilen $f(x)$ fonksiyonları için $\int_0^2 f(x) dx$ integraline yamuk ve Simpson kurallarını kullanarak yaklaşımda bulununuz ve yaklaşımları gerçek integral değeri ile kıyaslayınız.

(a) x^2 (b) x^4 (c) $(x+1)^{-1}$ (d) $\sqrt{1+x^2}$ (e) $\sin x$ (f) e^x

Çözüm. $[0, 2]$ aralığında yamuk ve Simpson kuralları sırası ile

$$\int_0^2 f(x) dx \approx f(0) + f(2)$$

ve

$$\int_0^2 f(x) dx \approx \frac{1}{3} [f(0) + 4f(1) + f(2)]$$

şeklinde yazılır. $f(x) = x^2$ olması durumunda yamuk kuralı ile yapılan yaklaşımdan

$$\int_0^2 x^2 dx \approx 0^2 + 2^2 = 4$$

ve Simpson kuralı kullanılarak yapılan yaklaşımdan ise

$$\int_0^2 x^2 dx \approx \frac{1}{3} [0^2 + 4 \cdot 1^2 + 2^2] = \frac{8}{3}$$

sonuçları elde edilirken integralin gerçek değeri

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

dir.

$f(x) = x^2$ fonksiyonunun integral değeri için bir yaklaşım Simpson kuralı ile yapıldığında sonucun gerçek integral değerine eşit olduğu görülür. Bunun nedeni Simpson kuralında hata teriminin f' 'in dördüncü türevini içermesidir. Daha açık olarak $f(x) = x^2$ fonksiyonunun dördüncü türevi sıfır olduğundan yaklaşımda oluşan hata sıfır, yani yaklaşım tam olur.

Diğer şıklar için hesap yapıldığında aşağıdaki tablo elde edilir. Yamuk ve Simpson kuralları kullanılarak yapılan yaklaşımlar, gerçek integral değeri ile karşılaştırıldığında Simpon kuralı ile elde edilen neticelerin yamuk kuralı ile bulunanlara göre çok daha iyi olduğu gözlemlenir.

$f(x)$	(a) x^2	(b) x^4	(c) $(x+1)^{-1}$	(d) $\sqrt{1+x^2}$	(e) $\sin x$	(f) e^x
Gerç. Değer	2.667	6.400	1.099	2.958	1.416	6.389
Yamuk	4.000	16.00	1.333	3.326	0.909	8.389
Simpson	2.667	6.667	1.111	2.964	1.425	6.421

Örnek 4.2.3. Simpson kuralını kullanarak $\int_{0.5}^{1.5} (x \ln x - \cos x) dx$ integral değeri için bir yaklaşımda bulununuz ve bu yaklaşımda oluşan hata için bir üst sınır belirleyiniz.

Çözüm. $f(x) = x \ln x - \cos x$ dersek $a = x_0 = 0.5$, $b = x_2 = 1.5$ ve $h = (b-a)/2 = (1.5-0.5)/2 = 0.5$ olmak üzere istenen integral için Simpson kuralı kullanılarak yapılan yaklaşımdan $x_1 = x_0 + h = 0.5 + 0.5 = 1.0$ değeri de kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_{0.5}^{1.5} (x \ln x - \cos x) dx &\approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] = \\ &\approx \frac{0.5}{3} [f(0.5) + 4f(1.0) + f(1.5)] \\ &\approx -0.47465 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu metod kullanılarak yapılan yaklaşımda oluşan hata ξ sayısı 0.5 ile 1.5 arasında olmak üzere

$$E = \left| \frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi) \right|$$

ifadesi ile verildiğinden

$$\begin{aligned} f(x) &= x \ln x - \cos x, f'(x) = 1 + \ln x + \sin x, f''(x) = x^{-1} + \cos x, \\ f'''(x) &= -x^{-2} - \sin x, f^{(iv)}(x) = 2x^{-3} - \cos x \end{aligned}$$

elde edilir. $g(x) = 2x^{-3} - \cos x$ dersek $g'(x) = -\frac{6}{x^4} + \sin x$ şeklinde bulunur. $0.5 \leq x \leq 1.5$ olmak üzere $\sin x$ fonksiyonunun aldığı değerler 0 ile 1 arasında iken $-\frac{6}{x^4}$ ifadesi her zaman -1 'den küçük olur. Yani $g'(x) < 0$ dır. Buna göre $|g(x)|$ fonksiyonu maksimum değerini sınırdadır.

$$|g(0.5)| = |2(0.5)^{-3} - \cos(0.5)| = 15.122 \geq 0.52186 = |2(1.5)^{-3} - \cos(1.5)| = |g(1.5)|$$

olduğundan $|g(x)|$ fonksiyonu $0.5 \leq x \leq 1.5$ aralığında maksimum değerini 0.5 noktasında alır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} E &\leq \frac{h^5}{90} \max_{0.5 \leq \xi \leq 1.5} |2(\xi(x))^{-3} - \cos(\xi(x))| = \frac{0.5^5}{90} |2(0.5)^{-3} - \cos(0.5)| \\ &\leq \frac{0.5^5}{90} 15.122 = 5.2507 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

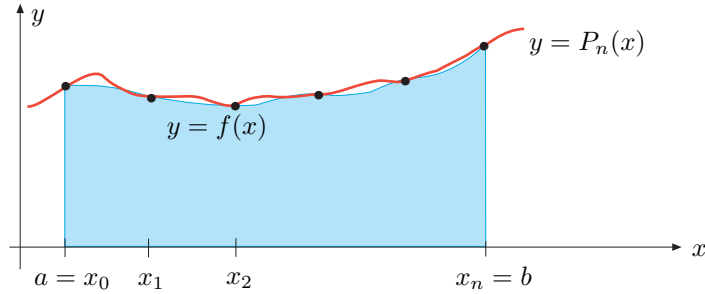
elde edilir.

4.2.3 Newton-Cotes Formülleri

Yamuk ve Simpson kuralları Newton-Cotes formülleri olarak bilinen nümerik integral hesaplama tekniklerinin özel halleridir. Newton-Cotes formüllerinin açık ve kapalı olmak üzere iki şekli vardır:

4.2.3.1 Kapalı Newton-Cotes Formülleri

$(n+1)$ -nokta Kapalı Newton-Cotes formülünde Şekil 4.5'de gösterildiği gibi $i = 0, 1, \dots, n$ için $x_0 = a$, $x_n = b$ ve $h = \frac{b-a}{n}$ olmak üzere $x_i = x_0 + ih$ şeklinde tanımlanan eşit aralıklı noktalar kullanılır.



Şekil 4.5: Kapalı Newton-Cotes formülü

Formül

$$a_i = \int_{x_0}^{x_n} L_i(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} dx$$

olmak üzere Lagrange interpolasyon polinomu ile yapılan

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

yaklaşımı kullanılarak elde edilir. Bu formüle kapalı denmesinin nedeni $[a, b]$ aralığının uç noktaları olan $x_0 = a$, $x_n = b$ sayılarının da formülde yer almasıdır.

Teorem 4.2.4 (IK, sayfa 313). $i = 0, 1, \dots, n$ için $x_0 = a$, $x_n = b$ ve $h = \frac{b-a}{n}$ olmak üzere $\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$ ifadesi ile $(n+1)$ -nokta Kapalı Newton-Cotes formülü gösterilsin. Bu durumda bir $\xi \in (a, b)$ sayısı aşağıdaki eşitlikleri sağlayacak şekilde mevcuttur:

n bir çift sayı ve $f \in C^{n+2}[a, b]$ ise

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\xi) \int_0^n t^2 (t-1)(t-2) \cdots (t-n) dt,$$

n bir tek sayı ve $f \in C^{n+1}[a, b]$ ise

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \int_0^n t (t-1)(t-2) \cdots (t-n) dt.$$

$(n+1)$ nokta için yazılabilecek en büyük dereceli interpolasyon polinomu n . derecedendir. Bununla beraber çift n sayısı için yapılan yaklaşım $n+1$ hassaslık derecesinde olmakla beraber n sayısının tek olması durumunda yaklaşımın hassaslık derecesinin n olduğu görülür.

En çok kullanılan kapalı Newton-Cotes formülleri hata terimleri ile birlikte aşağıda listelenmektedir:

$n = 1$: Yamuk Kuralı

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^2}{12} f''(\xi) \quad (\xi_0 \leq \xi \leq x_1). \quad (4.16)$$

$n = 2$: Simpson Kuralı

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{60} f^{(iv)}(\xi) \quad (x_0 \leq \xi \leq x_2). \quad (4.17)$$

$n = 3$: Simpson $\frac{3}{8}$ Kuralı

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{80} f^{(iv)}(\xi) \quad (x_0 \leq \xi \leq x_3). \quad (4.18)$$

$n = 4$:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) dx = \frac{2h}{45} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] - \frac{8h^7}{945} f^{(vi)}(\xi) \quad (x_0 \leq \xi \leq x_4). \quad (4.19)$$

4.2.3.2 Açık Newton-Cotes Formülleri

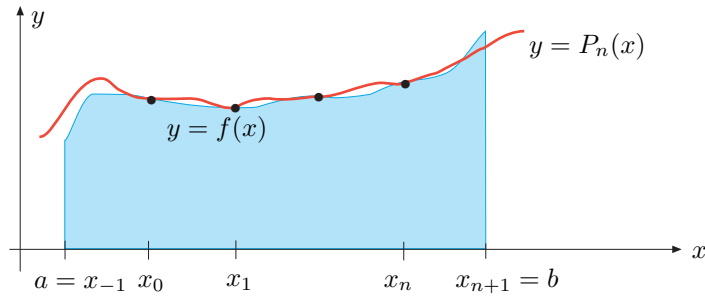
Kapalı Newton-Cotes formüllerinden farklı olarak açık Newton-Cotes formüllerinde $[a, b]$ aralığının uç noktaları yaklaşım hesabında göz ardı edilerek her $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $h = \frac{b-a}{n+2}$ ve $x_0 = a + h$ olmak üzere $x_i = x_0 + ih$ şeklinde tanımlanan noktalar kullanılır. Buna göre $x_n = b - h$ olduğundan uç noktalar için $x_{-1} = a$ ve $x_{n+1} = b$ notasyonu kullanılırsa (Bkz. Şekil 4.6) formül

$$a_i = \int_a^b L_i(x) dx$$

olmak üzere Lagrange interpolasyon polinomu kullanılarak yapılan

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

yaklaşımı kullanılarak elde edilir.



Şekil 4.6: Açık Newton-Cotes formülü

Teorem 4.2.5 (İK, sayfa 314). $x_{-1} = a$ ve $x_{n+1} = b$ ve $h = \frac{b-a}{n+2}$ olmak üzere $\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$ açık Newton-Cotes Formülünü gösterebilir. Bu durumda bir $\xi \in (a, b)$ sayısı aşağıdaki eşitlikleri sağlayacak şekilde mevcuttur:

n bir çift sayı ve $f \in C^{n+2}[a, b]$ ise

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\xi(x)) \int_{-1}^{n+1} t(t-1)(t-2)\cdots(t-n) dt,$$

n bir tek sayı ve $f \in C^{n+1}[a, b]$ ise

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x)) \int_{-1}^{n+1} t^2(t-1)(t-2)\cdots(t-n) dt.$$

Kapalı metotda olduğu gibi açık Newton-Cotes formüllerinde de çift n adım aralığını için daha yüksek hassaslık derecesi elde edilir.

En çok kullanılan açık Newton-Cotes formülleri hata terimleri ile birlikte aşağıda listelenmektedir:

$n = 0$: Orta Nokta Kuralı

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x) dx = 2hf(x_0) + \frac{h^3}{3} f''(\xi(x)) \quad (x_{-1} < \xi < x_1). \quad (4.20)$$

$n = 1$:

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x) dx = \frac{3h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi(x)) \quad (x_{-1} < \xi < x_2). \quad (4.21)$$

$n = 2$:

$$\int_{x_{-1}}^{x_3} f(x) dx = \frac{4h}{3} [2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)] + \frac{14h^5}{45} f^{(iv)}(\xi(x)) \quad (x_{-1} < \xi < x_3). \quad (4.22)$$

$n = 3$:

$$\int_{x_{-1}}^{x_4} f(x) dx = \frac{5h}{24} [11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)] + \frac{95h^5}{144} f^{(iv)}(\xi(x)) \quad (x_{-1} < \xi < x_4). \quad (4.23)$$

Örnek 4.2.6. (4.16)-(4.19) eşitlikleri ile verilen kapalı Newton-Cotes formüllerini ve (4.20)-(4.23) ifadeleri ile verilen açık Newton-Cotes formüllerini kullanarak

$$\int_0^{\pi/4} \sin x dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.29289322$$

integrali için yaklaşımlarda bulununuz.

Çözüm. Kapalı Newton-Cotes formülleri ile

$$n = 1 : \frac{(\pi/4)}{2} \left[\sin 0 + \sin \frac{\pi}{4} \right] \approx 0.27768018,$$

$$n = 2 : \frac{(\pi/8)}{3} [\sin 0 + 4\sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{4}] \approx 0.29293264,$$

$$n = 3 : \frac{3(\pi/12)}{8} [\sin 0 + 3\sin \frac{\pi}{12} + 3\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4}] \approx 0.29291070,$$

$$n = 4 : \frac{2(\pi/16)}{45} [7\sin 0 + 32\sin \frac{\pi}{16} + 12\sin \frac{\pi}{8} + 32\sin \frac{3\pi}{16} + 7\sin \frac{\pi}{4}] \approx 0.29289318$$

ve açık Newton-Cotes formülleri ile

$$n = 0 : 2(\pi/8) [\sin \frac{\pi}{8}] \approx 0.30055887,$$

$$n = 1 : \frac{3(\pi/12)}{2} [\sin \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{6}] \approx 0.29798754,$$

$$n = 2 : \frac{4(\pi/16)}{3} [2\sin \frac{\pi}{16} - \sin \frac{\pi}{8} + 2\sin \frac{3\pi}{16}] \approx 0.29285866,$$

$$n = 3 : \frac{5(\pi/20)}{24} [11\sin \frac{\pi}{20} + \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{3\pi}{20} + 11\sin \frac{\pi}{5}] \approx 0.29286923$$

yaklaşımları elde edilir. Bu sonuçlar aşağıdaki tabloda özetlenmektedir.

n	0	1	2	3	4
Kap. Formül		0.27768018	0.29293264	0.29291070	0.29289318
Hata		0.01521303	0.00003942	0.00001748	0.00000004
Açık Formül	0.30055887	0.29798754	0.29285866	0.29286923	
Hata	0.00766565	0.00509432	0.00003456	0.00002399	

Örnek 4.2.7. $n = 3$ olmak üzere Açık Newton-Cotes formülünü kullanarak

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

integrali için bir yaklaşımda bulununuz.

Çözüm. $x_{-1} = a = -1$ ve $x_4 = b = 1$ olduğundan $n = 3$ için

$$h = \frac{b-a}{n+2} = \frac{1-(-1)}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

elde edilir. Buna göre

$$x_{-1} = a = -1, x_0 = x_{-1} + h = -0.6, x_1 = x_{-1} + 2h = -0.2,$$

$$x_2 = x_{-1} + 3h = 0.2, x_3 = x_{-1} + 4h = 0.6, x_4 = b = 1$$

ve

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}$$

olmak üzere Açık Newton-Cotes formülü kullanılarak istenen integral değerini hesaplamak için yapılacak yaklaşım

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx &\approx \frac{5}{24} \frac{2}{5} [11f(-0.6) + f(-0.2) + f(0.2) + 11f(0.6)] \\ &\approx 2.0581 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

4.3 Bileşik Nümerik İntegrasyon

İntegrasyon aralığı çok geniş olduğunda Newton-Cotes formülleri kullanarak yapılan yaklaşım genellikle kullanışlı değildir. Çünkü Newton-Cotes formülleri kullanılarak geniş adım uzunluğuna sahip bir integral yaklaşımında yüksek dereceden formüller kullanılır ve bu formüllerdeki katsayı değerlerinin hesaplanması zordur. Bu bölümde düşük mertebeden Newton Cotes formüllerini verilen integrasyon aralığını eşit parçalara bölerek uygulamak suretiyle integral değerine yapılan yaklaşımlar üzerinde duracağız.

Örnek 4.3.1. Simpson kuralı kullanılarak $\int_0^4 e^x dx$ integraline yapılan yaklaşım değerini yine Simpson kuralı ile $\int_0^2 e^x dx$ ve $\int_2^4 e^x dx$ integral yaklaşım değerlerini toplamak sureti ile elde edilen sonuç ile kıyaslayalım. Benzer şekilde $\int_0^1 e^x dx$, $\int_1^2 e^x dx$, $\int_2^3 e^x dx$ ve $\int_3^4 e^x dx$ integralleri için ayrı ayrı Simpson kuralını uygulayıp toplayarak elde edilen yaklaşım değeri ile daha önceden elde edilen sonuçları karşılaştırırız.

Çözüm. $h = \frac{x_2 - x_0}{2} = \frac{4 - 0}{2} = 2$ olmak üzere $x_0 = 0$, $x_1 = x_0 + h = 2$ ve $x_2 = 4$ için Simpson kuralı kullanılarak

$$\int_0^4 e^x dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] = \frac{2}{3} [e^0 + 4e^2 + e^4] = 56.76958$$

yaklaşımı elde edilir. Diğer taraftan verilen integralin gerçek değeri

$$\int_0^4 e^x dx \approx e^4 - e^0 = 53.59815$$

olduğundan bu yaklaşımda oluşan mutlak hata

$$\text{Mutlak Hata} = |53.59815 - 56.76958| = 3.17143$$

şeklinde elde edilir. Şimdi

$$\int_0^4 e^x dx = \int_0^2 e^x dx + \int_2^4 e^x dx$$

olduğu kullanılarak $[0, 2]$ ve $[2, 4]$ aralıkları için $h = 1$ alınarak eşitliğin sağında bulunan integrallere ayrı ayrı Simpson kuralı uygulansın. Buna göre

$$\begin{aligned} \int_0^4 e^x dx &\approx \frac{1}{3} [f(0) + 4f(1) + f(2)] + \frac{1}{3} [f(2) + 4f(3) + f(4)] \\ &\approx \frac{1}{3} (e^0 + 4e + e^2) + \frac{1}{3} (e^2 + 4e^3 + e^4) \\ &\approx \frac{1}{3} (e^0 + 4e + 2e^2 + 4e^3 + e^4) = 53.86385 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu yaklaşımda oluşan mutlak hata

$$\text{Mutlak Hata} = |53.59815 - 53.86385| = 0.26570$$

olarak elde edilir. Bu ise bize $[0, 4]$ aralığını eşit iki alt aralığa bölerek yapılan yaklaşımın, ilk adımda yapılan yaklaşımdan daha iyi olduğu sonucunu gösterir. Benzer şekilde

$$\int_0^4 e^x dx = \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 e^x dx + \int_2^3 e^x dx + \int_3^4 e^x dx$$

olduğu kullanılarak $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ ve $[3, 4]$ aralıkları için $h = 1/2$ alınarak eşitliğin sağında bulunan integrallere ayrı ayrı Simpson kuralı uygulansın. Buna göre

$$\begin{aligned} \int_0^4 e^x dx &\approx \frac{1}{6} \left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right) + \frac{1}{6} \left(f(1) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(f(2) + 4f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3) \right) + \frac{1}{6} \left(f(3) + 4f\left(\frac{7}{2}\right) + f(4) \right) \\ &\approx \frac{1}{6} (e^0 + 4e^{1/2} + e) + \frac{1}{6} (e + 4e^{3/2} + e^2) \\ &\quad + \frac{1}{6} (e^2 + 4e^{5/2} + e^3) + \frac{1}{6} (e^3 + 4e^{7/2} + e^4) = 53.61622 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu yaklaşımda oluşan mutlak hata

$$\text{Mutlak Hata} = |53.59815 - 53.61622| = 0.01807$$

olarak elde edilir. Buradan, verilen aralığı daha fazla alt aralıklara ayırarak her bir aralığa Simpson kuralı uygulamak sureti ile yapılan yaklaşımların, aralık sayısının küçülmesine bağlı olarak daha iyi hale geldiği sonucu gözlemlenir. Benzer olgu alt aralıklara Simpson yerine daha önceden verilen yamuk ve orta-nokta kuralı uygulanması durumunda da geçerlidir.

Genel olarak $\int_a^b f(x) dx$ integral değerine bir yaklaşımda bulunmak için $[a, b]$ aralığını, n çift sayı olmak üzere, n alt aralığa bölüp, her bir aralıkta Simpson kuralı uygulanırsa bileşik Simpson kuralı elde edilmiş olur.

Teorem 4.3.2 (Qua, sayfa 384). $f \in C^4[a, b]$, n bir çift sayı olmak üzere, $h = \frac{b-a}{n}$ ve her $j = 0, 1, \dots, n$ için $x_j = a + jh$ olarak verilsin. $\xi \in (a, b)$ olmak üzere **bileşik Simpson kuralı** n alt aralık için hata terimi ile birlikte

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{h}{3} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b) \right] \\ &\quad - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(iv)}(\xi(x)) \end{aligned}$$

ifadesi ile verilir.

Bileşik Simpson kuralının hata terimi $O(h^4)$, standart Simpson kuralının hata terimi ise $O(h^5)$ 'dir. Bununla beraber bu iki sonuç karşılaştırılabilir değildir. Çünkü, bileşik Simpson kuralında h adım uzunluğu n bir çift tamsayı olmak üzere $h = \frac{b-a}{n}$ iken, standart Simpson kuralında $h = \frac{b-a}{n}$ gibi bir sabittir. Bileşik Simpson kuralı bize h adım uzunluğunu istediğimiz ölçüde kısıtlama olanağı verir.

Daha önceden de vurgulandığı üzere verilen aralığı alt aralıklara ayırıp her bir alt aralığa Newton-Cotes formüllerinden herhangi bir tanesini uygulamak suretiyle farklı bileşik integral kuralları elde edilebilir. Biz burada yukarıda izah edilen prosedüre uygun olarak sırası ile (4.16) ve (4.20) eşitlikleri ile verilen yamuk ve orta nokta kurallarını kullanılarak elde edilen formülleri kullanacağız.

Teorem 4.3.3 (Qua, sayfa 384). $f \in C^2[a, b]$, $h = \frac{b-a}{n}$ ve her $j = 0, 1, \dots, n$ için $x_j = a + jh$ olarak verilsin. $\xi \in (a, b)$ olmak üzere **bileşik yamuk kuralı** n alt aralık için hata terimi ile birlikte

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b) \right] - \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi(x))$$

ifadesi ile verilir.

Teorem 4.3.4 (Qua, sayfa 384). $f \in C^2[a, b]$, n bir çift sayı olmak üzere $h = \frac{b-a}{n+2}$ ve $j = -1, 0, 1, \dots, n+1$ için $x_j = a + (j+1)h$ olarak verilsin. $\xi \in (a, b)$ olmak üzere **bileşik orta nokta kuralı** $(n+2)$ alt aralık için hata terimi ile birlikte

$$\int_a^b f(x) dx = 2h \sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j}) + \frac{b-a}{6} h^2 f''(\xi(x))$$

ifadesi ile elde verilir.

Bileşik Simpson ve bileşik orta nokta kuralını kullanabilmemiz için alt aralık sayısının çift olması gerekir. Diğer taraftan bileşik yamuk kuralı kullanılarak yapılan yaklaşımlarda alt aralıkların çift ya da tek sayıda olması zorunluluğu bulunmamaktadır.

Örnek 4.3.5. (a) Bileşik yamuk ve (b) bileşik Simpson kurallarını kullanarak $\int_0^\pi \sin x$ integraline 0.00002 veya daha fazla bir hassaslıkta yaklaşımda bulunmak için alınması gereken h değerini tayin ediniz.

Çözüm.

(a) $[0, \pi]$ aralığında $f(x) = \sin x$ fonksiyonuna bileşik yamuk kuralı uygulandığında oluşacak hata

$$\left| \frac{\pi h^2}{12} f''(\xi) \right| = \left| \frac{\pi h^2}{12} (-\sin \xi) \right| = \frac{\pi h^2}{12} |\sin \xi|$$

formundadır. Verilen hassaslık ile bir yaklaşım yapılması istendiğinden

$$\frac{\pi h^2}{12} \underbrace{|\sin \xi|}_{\leq 1} \leq \frac{\pi h^2}{12} < 0.00002$$

eşitsizliğini sağlayan h değeri, daha doğrusu $h = \frac{\pi}{n}$ olduğu kullanılarak

$$\frac{\pi^3}{12n^2} < 0.00002$$

ifadesini gerçekleyen n değeri bulunmalıdır. Bu ise

$$n > \left(\frac{\pi^3}{12(0.00002)} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 359.44$$

olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla bileşik yamuk kuralı kullanılarak istenilen hassaslıkta bir yaklaşım yapabilmek için alınması gereken aralık sayısı $n \geq 360$ 'dır. Bu aralık sayısına karşılık $h = \frac{\pi}{360}$ adım uzunluğu elde edilir.

(b) $[0, \pi]$ aralığında $f(x) = \sin x$ fonksiyonuna bileşik Simpson kuralı uygulandığında oluşacak hata

$$\left| \frac{\pi h^4}{180} f^{(iv)}(\xi) \right| = \left| \frac{\pi h^4}{180} \sin \xi \right| = \frac{\pi h^4}{180} |\sin \xi|$$

formundadır. Verilen hassaslık ile bir yaklaşım yapılması istendiğinden

$$\frac{\pi h^4}{180} < 0.00002$$

eşitsizliğini sağlayan h değeri, daha doğrusu $h = \frac{\pi}{n}$ olduğu kullanılarak

$$\frac{\pi^5}{180n^4} < 0.00002$$

ifadesini gerçekleyen n değeri bulunmalıdır. Bu ise

$$n > \left(\frac{\pi^5}{180(0.00002)} \right)^{\frac{1}{4}} \approx 17.07$$

olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla bileşik Simpson kuralı kullanılarak istenilen hassaslıkta bir yaklaşım yapabilmek için alınması gereken aralık sayısı bileşik yamuk yöntemindekinden çok daha az olarak $n \geq 18$ şeklinde elde edilir. Burada bulunan aralık sayısının çift olması gerektiğine dikkat çekmek gerekir. Bu aralık sayısına karşılık adım uzunluğu $h = \frac{\pi}{18}$ şeklinde bulunur.

$n = 18$ için bileşik Simpson kuralı uygulandığında

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \approx \frac{\pi}{54} \left[2 \sum_{j=1}^8 \sin \left(\frac{j\pi}{9} \right) + 4 \sum_{j=1}^9 \sin \left(\frac{(2j-1)\pi}{18} \right) \right] = 2.0000104$$

sonucu elde edilir. Gerçek integral değeri

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2$$

olduğundan yapılan yaklaşım aslında 10^{-5} hassaslıktadır.

Örnek 4.3.5'den görüldüğü üzere Simpson kuralını kullanarak bir yaklaşımda bulunmak verilen diğer metotlara göre daha az işlem yükü gerektirir. Bileşik Simson ve bileşik yamuk kurallarını karşılaştırmak bakımından yukarıdaki örneğe bileşik yamuk kuralı $h = \frac{\pi}{18}$ için uygulanırsa

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \approx \frac{\pi}{36} \left[2 \sum_{j=1}^{17} \sin \left(\frac{j\pi}{18} \right) + \sin 0 + \sin \pi \right] = 1.9949205$$

elde edilir. Bileşik yamuk kuralının işlem yükü bileşik Simpson metodu ile aynı olmasına karşın yapılan yaklaşımın bu metotta sadece 5×10^{-3} hassaslıkta olduğu sonucu görülür.

Örnek 4.3.6. $h = 1$ olmak üzere uygun bir bileşik integral kuralını kullanarak

$$\int_0^3 (5 + \cos x) dx$$

integrali için bir yaklaşımda bulununuz. Bu yaklaşımda oluşan bağıl hatayı hesaplayınız.

Çözüm. $h = 1$ olduğundan $x_0 = a = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ ve $x_3 = b = 3$, dolayısıyla $n = 3$ 'tür. n sayısı tek olduğundan kullanılacak tek kural bileşik yamuk kuralı'dır. Buna göre $f(x) = 5 + \cos x$ dersek

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x) dx &= \int_0^3 (5 + \cos x) dx \approx \frac{1}{2} [f(0) + 2(f(1) + f(2)) + f(3)] \\ &\approx \frac{1}{2} [5 + \cos 0 + 2((5 + \cos 1) + (5 + \cos 2)) \\ &\quad + 5 + \cos 3] \\ &\approx 15.129 \end{aligned}$$

elde edilir. İntegralin gerçek değeri

$$\int_0^3 (5 + \cos x) dx = (5x + \sin x) \Big|_0^3 = 15.141$$

olduğundan bu yaklaşımdan oluşan bağıl hata

$$\frac{|15.141 - 15.129|}{|15.141|} = \frac{4}{5047} = 7.9255 \times 10^{-4}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 4.3.7.

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

integrali bileşik orta nokta kuralı kullanılarak hesaplanmış ve oluşan hata için bir sınırmın 10^{-5} olduğu görülmüştür. Buna göre h kaç olmalıdır.

Çözüm. Bileşik orta nokta kuralı kullanılarak yapılan bir yaklaşımda oluşan hata $a = 1$, $b = 2$, $h = \frac{b-a}{n+2}$, $1 \leq \xi(x) \leq 2$ ve $f(x) = x^{-1}$ olmak üzere $\frac{b-a}{6}h^2 f''(\xi(x))$ ifadesi ile verilir. Buna göre $f(x) = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2}$, $f''(x) = 2x^{-3}$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned} \left| \frac{b-a}{6} h^2 f''(\xi(x)) \right| &= \left| \frac{2-1}{6} \left(\frac{2-1}{n+2} \right)^2 2(\xi(x))^{-3} \right| \\ &\leq \frac{1}{3(n+2)^2} \max_{1 \leq \xi \leq 2} |(\xi(x))^{-3}| = \frac{1}{3(n+2)^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Soruda

$$\frac{1}{3(n+2)^2} \leq 10^{-5}$$

olarak verildiğinden, yukarıdaki ifadeyi sağlayan n değerleri $180.57419 \leq n$ şeklinde bulunur. Bu metod n 'nin çift olmasını gerektirdiğinden $n \geq 182$, dolayısıyla

$$h = \frac{2-1}{182+2} = \frac{1}{184}$$

sonucuna ulaşılır.

4.3.1 Bileşik İntegral Hesabında Oluşan Yuvarlama Hataları

$\int_0^\pi \sin x dx$ integraline 2×10^{-5} yakınsaklıkta bir yaklaşımda bulunmak için bileşik yamuk kuralı kullanıldığında 360 alt aralık, bileşik Simpson kullanıldığında sadece 18 alt aralık gerektiği Örnek 4.3.5'den görülmektedir. Bileşik Simpson kuralında daha az işlem yapılması bu metod kullanılarak yapılan bir yaklaşımda oluşacak yuvarlama hatasının, bileşik yamuk kuralı kullanılarak yapılan yaklaşıma göre daha az olacağı kanısı uyanabilir. Bununla beraber tüm bileşik integral kuralları kullanılarak yapılan yaklaşımlarda yuvarlama hatasının büyüklüğü yapılan işlem sayısı ile kıyaslanamaz.

Yukarıda anlatılan olguyu ortaya koymak için $[a, b]$ aralığında f fonksiyonuna n alt aralık için bileşik Simpson kuralını uygulayalım ve yuvarlama hatası için bir üst sınır belirleyelim: $i = 0, 1, \dots, n$ için $f(x_i)$ değeri e_i yuvarlama hatası ile $\tilde{f}(x_i)$ şeklinde hesaplanmış olsun. Bu durumda her $i = 0, 1, \dots, n$ için

$$f(x_i) = \tilde{f}(x_i) + e_i$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla bileşik Simpson kuralı uygulanarak yapılan bir yaklaşımda oluşacak toplam $e(h)$ yuvarlama hatası için

$$\begin{aligned}
e(h) &= \left| \frac{h}{3} \left[e_0 + 2 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} e_{2j} + 4 \sum_{j=1}^{(n/2)} e_{2j-1} + e_n \right] \right| \\
&\leq \frac{h}{3} \left[|e_0| + \sum_{j=1}^{(n/2)-1} |e_{2j}| + 4 \sum_{j=1}^{(n/2)} |e_{2j-1}| + |e_n| \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer her $i = 0, 1, \dots, n$ için $|e_i| < \varepsilon$ ise

$$e(h) \leq \frac{h}{3} \left[\varepsilon + 2 \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \varepsilon + 4 \left(\frac{n}{2} \right) \varepsilon + \varepsilon \right] = \frac{h}{3} 3n\varepsilon = nh\varepsilon$$

olduğu görülür. Diğer taraftan $n = \frac{b-a}{h}$ yani $nh = b - a$ olduğu yukarıdaki eşitsizlikte kullanılırsa

$$e(h) \leq (b - a)\varepsilon$$

ifadesi elde edilir. Yani hata sınırı h değerinden dolayısıyla alınan alt aralık sayısı n 'den bağımsızdır. Dolayısıyla, her ne kadar yakınsaklığı arttırmak için verilen aralığı mümkün olduğunca çok alt aralığa bölerek bileşik integral kuralını uygulamak gerekse de yapılan bu çok sayıda işlem, oluşacak yuvarlama hatasının artmasına sebep olmaz. Bu durum daha önceden anlatılan nümerik türev prosedürlerinde geçerli değildir.

- İşaretili tam sayı, 18
İşaretsiz tam sayı, 18
İki tabanlı makine sayıları, 18
İkiye bölme metodu, 33
 iterasyon sayısı, 38
 mutlak hata sınırı, 38
 yakınsama hızı, 38
İntegral
 integaller için ağırlıklı ortalama
 değer teoremi, 12
 integraller için ortalama değer
 teoremi, 12
 Riemann integrali, 12
İteratif metotlarda hata analizi, 61

Aitken Δ^2 metodu, 71, 72
 ileri fark, 72
Anlamlı basamak, 23
Ara değer teoremi, 11
Asimtotik hata sabiti, 61

Bilgisayar aritmetiği, 18

Denklem çözümleri, 33
Diferansiyellenebilme, 8
 türev, 8

Ekstremum değer teoremi, 10

Fonksiyonel iterasyon, 44

Hassaslık, 34
Hata
 bağlı hata, 21
 mutlak hata, 21

Karakteristik, 19
Katl kök, 66

Kayan nokta aritmetiği, 19
 IEEE754 standardı, 19
 normalize edilmiş ondalık ka-
 yan nokta formu, 20
 kesme aritmetiği, 20
 yuvarlama aritmetiği, 20
Kesme hatası, 14, 18

Limit, 7

Mantis, 19

Newton (-Raphson) metodu, 51
 değiştirilmiş Newton metodu,
 70
 geometrik yorumu, 52
 yakınsama, 54

Ondalık makine sayıları, 20
Ortalama değer teoremi, 9

Regula Falsi metodu, 59
 geometrik yorum, 59
Rolle teoremi, 9
 genelleştirilmiş Rolle teoremi,
 10

Süreklilik, 7
Sabit nokta iterasyonu, 39, 44
 mutlak hata sınırı, 47
 sabit nokta teoremi, 46
 sabit nokta, 39
Secant metodu, 56
 geometrik yorum, 57

Taylor polinomu, 13
 kalan terim, 13
 kesme hatası, 13

Maclaurin polinomu, 14
Taylor teoremi, 13
Taylor serisi, 14
Maclaurin serisi, 14
Yakınsama, 25
 üstel yakınsama, 25
 kararsız yaklaşım, 25
 hızı, 29, 30
 lineer yakınsama, 25
 kararlı yaklaşım, 25
Yakınsamaları hızlandırmak, 71
Yakınsamanın mertebesi, 61
 lineer (doğrusal) yakınsama, 61
 kuadratik yakınsama, 61
Yuvarlama hatası, 18