DİFERANSİYEL DENKLEMLER
I. KISIM

Shepley L. Ross

Çeviren
Mehmet Can

28 Aralık 2004

YAZARIN ÖNSÖZÜNDEN

Bu kitap diferansiyel denklemlerin temel yöntemlerine, teorisine ve uygulamalarına bir giriş mahiyetindedir. Bu kitabı okumak isteyeceklerin birinci sınıf üniversite matematiğini bildikleri kabul edilmektedir.

Konu okuyucuya ayrıntılı şekilde sunulmuştur. Önemli kavramlar dikkatle yazılmış tanımlar halinde verilmiş, önemli sonuçlar da teoremler olarak ifade edilmiştir. çözüm yöntemlerinin de etraflıca anlatımına özen gösterilmiştir. Tanımlar, teoremler ve çözüm yöntemleri çeşitli örneklerle daha anlaşılır hale getirilmiştir. En yararlı ve uygulama alanı geniş çözüm yöntemleri birden fazla baştan sona çözülmüş örnekle aydınlatılmıştır. Temel teoremlerin birçoğunun ayrıntılı ve dikkatle yapılmış ispatları da metinde yer almıştır. Aslında ispatlardaki ayrıntı zenginliği ve açıklayıcı örnekler, iyi anlatımın temel özelliklerindendir.

Kitap iki ana kısma ayırılmıştır. 1. Bölüm'den 7.'ye kadar olan birinci kısım en temel kavramlarla, teoremlerle, yöntemlerle ve konunun uygulamaları ile ilgilidir. İkinci kısım okuyucuyu bazı uzmanlık alanlarına götürür, daha gelişmiş yöntemlerle karşı karşıya getirir ve temel teoriye sistematik bir giriş sağlar.

1. Bölüm, çözümün anlamı ve ek koşullu problemler üzerinde durarak diferansiyel denklemlerin en temel kavramlarını tanıtır. 2. Bölüm en tanınmış birinci basamak denklem tiplerinin geleneksel hale gelmiş çözüm yöntemlerini verir. Bölüm, fazla önemli olmayan tipler kısaca geçilebilecek ya da kolayca atlanabilecek şekilde düzenlenmiştir. 3. Bölüm okuyucuya birinci basamaktan denklemlerin bazı temel uygulama alanlarını tanıtır. Daha yüksek basamaktan önemli lineer diferansiyel denklemler ilk defa 4. Bölüm'de boy gösterirler. Temel kavramlar ve teoremler ilk defa burada tanıtılır ve örneklerle açıklanır ama çoğunun ispatı 11. Bölüm'e bırakılır. Bölümün büyük bir kısmı sabit katsayılı lineer denklemlere ayırılmıştır. 5. Bölüm, 4. Bölüm'ün yöntemlerini, titreşimlerdeki ve elektrik devrelerindeki problemlere uygular. Seri şeklindeki çözümler, Bessel denklemlerine ve Bessel fonksiyonlarına kısa bir giriş yapan 6. Bölüm'ün konusudur. Lineer sistemler 7. Bölüm'de tanıtılmış ve uygulamaları anlatılmıştır.

Kitabın ikinci kısmına geçersek, 8. Bölüm sayısal yöntemlere ağırlık tanıyarak, birinci basamak denklemleri çözmeğe yarayan bazı yaklaşık çözüm yöntemleri anlatır. 9. Bölüm'de Laplace Dönüşümü ile ilgili temel kavramlar ve sonuçlar geliştirilmiş ve sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. Adî diferansiyel denklemler konusunun temel teorisi 10. ve 11. Bölüm'lerin konusu olmuştur. 10. Bölüm daha ziyade birinci basamaktan başlangıç değer problemleri için temel varlık teoreminin ifadesi ve ispatı ile meşguldür. Buradan 11. Bölüm'e geçilince, daha yüksek basamaktan denklemler üzerine temel teoremlerin tam ifadelerine ve ispatlarına rastlanır. Burada yer alan önemli konular arasında Wronski teorisi, eş denklem ve klasik Sturm teorisi bulunur. Bundan sonra 12. Bölüm Sturm-Liouville sınır değer problemlerine bir girişle açılır ve trigonometrik Fourier serisinin incelemesine geçer. 13. Bölüm önemi ve ilgilenenleri günden güne hızla artan, lineer olmayan diferansiyel denklemler konusuna girer. Burada işlenen konular arasında kritik noktalar, limit çevrimler ve Kryloff-Bogoliuboff yöntemi de vardır. Son bölüm olan 14. Bölüm, kısmî diferansiyel denklemlerin incelenmesinde de kullanılacak olan bir adî diferansiyel denklem sistemi çeşidinin incelenmesine ayırılmıştır.

Kitap çeşitli dersler için ders kitabı olabilecek niteliktedir. Bu derslerden biri bir yarıyıllık giriş mahiyetinde bir derstir. Basit uygulamalar da incelenecekse böyle bir ders 1.'den 7.'ye kadar bölümleri kapsamalıdır. Eğer uygulama bölümlerinden vazgeçip, sayısal yöntemler ve Laplace dönüşümü yöntemi anlatılmak isteniyorsa, o zaman 1, 2, 4, 6, 7, 8 ve 9. Bölüm'lerden bir proğram yapılmalıdır. Kısmî diferansiyel denklemlere mümkün olduğu kadar hızlı hazırlayan bir giriş dersi yapılacaksa; 1, 2 (kısmen), 4, 6, 12 ve 14. (kısmen) Bölüm'ler anlatılmalıdır. 1, 4, 6 ve 2, 3, 5, 7, 8, ve 9. Bölüm'lerin bazı kısımlarından da yukarıdakilerden farklı bir proğram yapılabilir.

Bu kitaptan diferansiyel denklemler üzerine ilk dersi almış ileri sınıf öğrencileri için daha ileri yöntemlere ağırlık veren bir ders; 8, 9, 12, ve 14. Bölüm'lerden, diferansiyel denklemlerin temel teorisine giriş yapacak orta düzeyde bir ders de 10, 11, 12, 13 ve 14. Bölüm'lerden hazırlanabilir.

Kitapta bir yıl sürecek bir ders için de yeterli malzeme bulunmaktadır. Bu durumda kitap baştan sona, istenilen bölümlere daha fazla ağırlık verilerek okutulabilir.

Shepley L. Ross

ÇEVİRENİN ÖNSÖZÜ

Bu kitap aslında İstanbul Teknik Üniversitesi'nde verdiğim matematik IV ve adî diferansiyel denklemler derslerine ders kitabı olması için S.L. Ross'un "Differential Equations" adlı kitabı esas alınarak ve C.R. Wylie ile L.C. Barret'in "Advanced Engineering Mathematics" adlı kitaplarından da yararlanılarak hazırlanmıştır.

Biz kitabı iki kısım halinde yayınlamayı uygun bulduk. Bu elinizdeki birinci kısım, kitabın ilk yedi bölümü ile 9. Bölüm'ünün çevirisidir ve bütün mühendislik bölümlerinde matematik IV dersi içindeki diferansiyel denklemler konusunun işlenmesi sırasında olduğu kadar fen ve fen- edebiyat fakülteleri ile eğitim fakültelerinin diferansiyel denklemler konusundaki ilk derslerinde ders kitabı olarak kullanılabilecek şekilde kaleme alınmıştır.

Yakın gelecekte tamamlamayı düşündüğümüz ikinci kısımın çevirisi de, mühendislik fakültelerinin yüksek lisans proğramlarındaki mühendislik matematiği dersleri ile, fen, fen-edebiyat ve eğitim fakültelerinin diferansiyel denklemler konusundaki daha ileri lisans derslerinde yararlı olacaktır.

S.L. Ross'un kitabını Türkiye'deki temel bilimler, mühendislik ve eğitim bilimleri öğrencilerinin yararlanabileceği şekilde çevirip yeniden düzenlerken, İ.T.Ü'de diferansiyel denklemler dersinin uygulama saatlerine giden bir asistan olduğum sırada hazırladığım çözülmüş problemlere, yıllar yılı sorulmuş sınav sorularına ve herbiri Türkiye'nin geleceği için bir kıymet olan öğrencilerimin çözdüğü ödev problemlerine zaman zaman yer verdim.

Mehmet Can 1992

İçindekiler

BİRİNCİ KISIM

Temel Yöntemler Ve Uygulamalar

Bölüm 1

Denklemler ve Çözümler

Diferansiyel denklemler konusu, modern matematik dediğimiz yakın çağ matematiğinin geniş ve çok önemli bir kısmını oluşturur. Diferansiyel ve integral hesabın 16. yüzyıla kadar inen çocukluk yıllarından beri bu dal, geniş teorik araştırmalara ve insanın bu dünyadaki hayatını kolaylaştıran önemli uygulamalara sahne olmuştur, bugün de böyle olmaya devam etmektedir. Bunlar söylenince karşı tarafta şöyle soruların uyanması doğal olacaktır: diferansiyel denklem nedir, ne gösterir? Diferansiyel denklemler nereden ve nasıl çıkar, ne işe yararlar? Bir diferansiyel denklemle karşılaşıldığında ne yapılır, nasıl yapılır ve böyle bir çabanın meyvesi nedir? Bu sorular diferansiyel denklemler konusunun üç yönünü ortaya çıkarıyor, teori, yöntem ve uygulama. Bölümün amacı da okuyucuyu konunun bu temel yönleriyle tanıştırmak ve aynı zamanda bu yönleri kısaca gözden geçirmektir. Bu bölümde yukarıdaki sorulara da cevap vereceğiz ama bu cevaplar diğer bölümler incelendikçe daha anlamlı hale gelecek.

1.1 Fonksiyonlar ve Denklemler

Mühendisler ve bilimin diğer alanlarında çalışanlar uzun zamandır problemlerini matematik yardımıyla daha iyi anlatabileceklerini ve daha kolayca inceleyebileceklerini anlamış bulunuyorlar. Ancak bunun için incelenen olayın iyice tanınmış ve davranışını yöneten yasaların tam olarak ifade edilmiş olması gerekiyor. Bütün anlatımlarda denklemler ve fonksiyonlar bulunur.

Bir f fonksiyonunun tanım bölgesindeki her x için aldığı değer $f(x)$ ile gösterilir. x değişkeni bir sayı, ya da başka birşey olabilir.

Bu zamana kadar matematikte, çözümlerini bulacağımız;

$$x^2 + 3x + 2 = 0, \quad \tan\theta = \frac{2}{3}, \quad t = e^{-t}, \quad \{v = u^2, 8u = v^2\}$$

gibi bir ya da daha fazla bilinmeyenli denklemlerle karşılaşmışızdır. şimdi bir ya da daha fazla bilinmeyen fonksiyonu ve onların türevlerini bulunduran diferansiyel denklemleri ele alacağız.

$$\frac{dy}{dx} = e^x + \sin x \tag{1.1}$$

$$y'' - 2y' + y = \cos x \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$3x^2 dx + 2y dy = 0 \tag{1.4}$$

Fonksiyonların değerlerini gösteren değişkenlere *bağlı değişkenler* denir. Bu durumda (1.1) ve (1.2)'de y bağlı, x bağımsız değişken; (1.3)'te u bağlı, t, x ve y bağımsız değişkenlerdir. (1.4)'te ise x ya da y'den biri bağlı değişken olarak alınabilir, geri kalan da bağımsız değişkendir.

A. Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

TANIM. Bir ya da daha çok bağlı değişkenin, bir ya da daha çok serbest değişkene göre türevlerini ya da diferansiyellerini bulunduran denklemlere, diferansiyel denklem denir.

Örnek 1.1. Aşağıdakileri diferansiyel denklem örneği olarak verebiliriz:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \tag{1.5}$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}+3x=v \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{1.8}$$

Diğer taraftan, temel tanıma uysalar da

$$\frac{d}{dx}(e^{ax})=ae^{ax}, \qquad \frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx} \tag{1.9}$$

şeklindeki denklemler, diferansiyel denklem sayılmazlar.

Diferansiyel denklemleri sınıflandırmak için çeşitli özellikleri kullanılabilir. *Adî* ve *kısmî* diferansiyel denklemler, bağımsız değişkenlerinin sayısına, bulundurdukları türevlerin çeşidine göre sınıflandırılabilirler.

TANIM. Diferansiyel denklemde bulunan türevler, bir ya da daha çok bağlı değişkenin bir tek serbest değişkene göre adî türevi ise, bu diferansiyel denklem bir *adî diferansiyel denklem*'dir.

Buna göre (1.5) ve (1.6)'daki örnekler adî diferansiyel denklemlerdir.

TANIM. Bir ya da daha çok bağlı değişkenin en az bir serbest değişkene göre kısmî türevlerini bulunduran diferansiyel denkleme *kısmî diferansiyel denklem* denir.

(1.7) ve (1.8)'deki denklemler, kısmî diferansiyel denklemlerdir.

Diferansiyel denklemler basamaklarına göre de sınıflandırılırlar.

TANIM. Bir diferansiyel denklemin *mertebe*si, denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin mertebesidir.

Örneklerde (1.7) birinci, (1.5) ve (1.8) ikinci, (1.6) da üçüncü basamaktan denklemlerdir.

Başka önemli bir sınıflandırma şekli de bağlı değişkenle türevlerinin denklem içinde yer alışlarına göredir.

TANIM. Denklemde bulunan bir bağlı değişkenler kümesinin bir elemanını ya da onun bir türevini bulunduran her terim, bu değişkene ve türevlerine göre birinci dereceden ise, bu diferansiyel denklem bu bağlı değişken kümesine göre *lineer*'dir. Bir bağlı değişkene göre lineer olmayan denkleme, bu bağlı değişkene göre *lineer olmayan diferansiyel denklem* denir.

(1.6), (1.7), (1.8) denklemleri lineer, (1.5) ise lineer olmayan bir diferansiyel denklemdir.

Lineer diferansiyel denklemler ayrıca bağlı değişkenin ve türevlerinin katsayılarına göre de *sabit katsayılı* ve *değişken katsayılı* olmak üzere ikiye ayrılırlar. Buna göre (1.6), (1.7), (1.8) denklemleri sabit katsayılı,

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5t^3\frac{d^2x}{dt^2} + 3\cos tx = \sin t$$

denklemi de değişken katsayılı bir diferansiyel denklemdir.

B. Diferansiyel Denklemlerin çıkış Yerleri ve Uygulamaları

Diferansiyel denklemleri çeşitli yönlerine göre sınıflandırdıktan sonra, bu gibi denklemlerin nereden ve nasıl çıktığını kısaca göreceğiz. Bu sayede diferansiyel denklemlerin teori ve yöntemlerinin ne kadar geniş bir uygulama alanı olduğunu anlamağa başlayacağız.

Diferansiyel denklemler fen ve mühendislik bilimlerinin çok çeşitli ana dallarında pek çok sayıda problemle ilintili olarak ortaya çıkarlar. Bu problemlerin aslında sayfalarca tutacak olan listesinden bir iki satır verelim:

(1) Füze, roket, uydu ve gezegen hareketlerinin belirlenmesi,
(2) Elektrik devrelerinde yük ya da akımın bulunması ,
(3) Çubukta ve levhalarda ısı yayılması problemi,
(4) Telin ya da levhanın titreşimleri,
(5) Radyoaktif cismin bozunması veya bir canlı topluluğunun nüfus artışı problemi,
(6) Kimyasal reaksiyonların incelenmesi,
(7) Belli geometrik özelliklere sahip eğrilerin bulunması .

Yukarıdaki gibi problemlerin matemaatik dilindeki ifadeleri, diferansiyel denklemler verir. Peki bu diferansiyel denklemler nasıl bulunur? Bu örneklere konu olan cisimler, kendileriyle ilgili bazı bilimsel yasalara uygun davranırlar. Bu kanunlar bir ya da daha çok varlığın değişim hızlarının, diğer varlıkların değişim hızlarıyla ilintilerini içerirler. Bu değişim hızlarının matematik dilinde türevlerle ifade edildiklerine dikkat edelim. Bu yüzden değişim oranları çeşitli türevler ile ifade edilince, varlıkların uyduğu yasalar, diferansiyel denklem haline gelirler.

Varlıkların davranışları hakkında bilimin bulabildiği yasaların, içlerinde birçok basitleştirme bulunan varsayımlara dayandığını hatırladıktan sonra, matematik modellerin kurulması sırasında elde edilecek diferansiyel denklemlerin ele avuca gelir şeyler olması için de bir dizi basitleştirici varsayım yapıldığını itiraf etmeliyiz. Bu varsayımlar, bilim felsefesi ile ya da modelleme ile ilgili olmayanların gözlerinden uzakta bir yerlerde durur. Varlıkların gerçek davranışlarından bu şartlar altında elde edilen diferansiyel denklem, aslında gerçekte olmayan o idealleştirilmiş duruma ait olduğu halde, sokaktaki adam kadar, bu modelleri kullanan bilim adamları tarafından da konudan uzak oluşla orantılı olarak artan bir taassupla gerçeğin tahtına oturtulur. Aslında bunun sebebi, bu insanların daha güvenilir bir gerece sahip olmamalarıdır. Bütün bu kabullere bağlılığa rağmen, bir diferansiyel denklemden elde edilen bilginin, reddedilemez bir uygulama değeri vardır.

Şimdi, yukarıdaki şartlar altında elde edilmiş bir diferansiyel denklemden, derde deva bir bilginin nasıl çıkarılabileceği sorulacaktır. Bunun cevabı şudur: eğer mümkün oluyorsa diferansiyel denklem, çözüm elde etmek üzere çözülür. Eğer çözmek mümkün değilse, diferansiyel denklemler teorisi kullanılarak *çözüm hakkında bilgi* elde etmeğe uğraşılır. Bu cevabın anlamını kavramak için, diferansiyel denklemin çözümünden ne anladığımızı tartışmalıyız. Bunu gelecek kısımda yapacağız.

PROBLEMLER

Aşağıdaki diferansiyel denklemleri sınıflandırınız.

1. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = e^x$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \phi(x, y, z)$
3. $y'' + 3y' + 2y = x^4$
4. $\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial y} = v\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$
5. $\frac{d(xy')}{dx} + xy = 0$
6. $y'' + (a + b\cos 2x)y = 0$
7. $y^{iv} + xy'' + y^2 = 0$
8. $(x + y)dy = (x - y)dx$
9. $a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$
10. $\frac{\partial^2(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$
11. $\frac{\partial u}{\partial t} + xu = \frac{d^2 x}{dt^2}$
12. $\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial y} = v\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$

1.2 Diferansiyel Denklemlerde Çözüm

Bir x değişkenine bağlı cebirsel ya da transandant bir denklemin çözümü, bu denklemi sağlayan bir sayıdır. Halbuki diferansiyel denklemlerin çözümleri sayılar değil, bu denklemleri sağlayan fonksiyonlardır.

Örnek 1.2. $y'' + k^2 = 0$ diferansiyel denklemini gözönüne alalım. $f(x) = \sin kx$ fonksiyonu, $y' = k \cos kx$ ve $y'' = -k^2 \sin kx$ olacağından denklemi her x için sağlar. Aynı şekilde $g(x) = \cos kx$ fonksiyonu da aynı denklemin $(-\infty, \infty)$ aralığında çözümüdür.

A. Çözümlerin Tabiatı

şimdi n. basamaktan adî diferansiyel denklemin çözümü kavramını ele alacağız.

TANIM. n. basamaktan

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \tag{1.10}$$

adî diferansiyel denklemini ele alalım. Burada F, $n+2$ tane olan

$$x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}$$

argümanları cinsinden gerçel bir fonksiyondur.

(1). f, gerçel I aralığında tanımlı ve $\forall x \in I$ için n. basamaktan türevi olan (daha aşağı basamaktan bütün türevleri de bunun sonucu olarak mevcuttur) gerçel bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa, (1.10)'daki diferansiyel denklemin I aralığı üzerinde bir *eksplisit çözümüdür*:

(A)
$$F\left(x, f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right)$$

$\forall x \in I$ için tanımlıdır ve $\forall x \in I$ için

(B)
$$F\left(x, f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right) = 0$$

olur. Yani $f(x)$'i ve çeşitli türevlerini, y ve türevlerinin (1.10)'daki yerlerine koyarsak, bu denklem I üzerinde bir özdeşliğe dönüşür.

(2). $g(x, y) = 0$ bağıntısı, I aralığı üzerinde (1.10) denkleminin bir eksplisit çözümü olan en az bir f fonksiyonu tanımlıyorsa, bu bağıntıya (1.10) denkleminin bir *implisit çözümü* denir.

(3). Explisit ve implisit çözümlerin ikisine birden bu kitapta sadece *çözüm* denilecektir.

(1.10) denkleminin eksplisit ya da implisit olsun herhangi bir çözümü kısaca x ile y arasında, türev bulundurmayan ve (1.10)'u özdeş olarak sağlayan bir bağıntıdır.

Örnek 1.3. Her x için

$$f(x) = 2\sin x + 3\cos x \tag{1.11}$$

ile tanımlı f fonksiyonu, her x için

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \tag{1.12}$$

denkleminin bir eksplisit çözümüdür. önce f'nin her x için tanımlı ve ikinci türeve sahip olduğuna dikkat ediniz. Sonra

$$f'(x) = 2\cos x - 3\sin x$$

$$f''(x) = -2\sin x - 3\cos x$$

olduğunu görünüz. (1.12)'de $\frac{d^2y}{dx^2}$ yerine $f''(x)$, y yerine de $f(x)$ koyarsak onu, her x için doğru olan

$$(-2\sin x - 3\cos x) + (2\sin x + 3\cos x) = 0$$

özdeşliği haline getiririz. Böylece (1.11) ile tanımlı f fonksiyonu her x için (1.12) denkleminin bir eksplisit çözümüdür.

Örnek 1.4.

$$x^2 + y^2 = 25 \tag{1.13}$$

bağıntısı, $-5 < x < 5$ ile tanımlı I aralığında

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.14}$$

denkleminin bir implisit çözümüdür. çünkü (1.13) bağıntısı $\forall x \in I$ için

$$f_1(x) = \sqrt{25 - x^2} \quad \text{ve} \quad f_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$$

ile verilen $f_1,\ f_2$ gibi iki gerçel fonksiyon tanımlar ve bunlar (1.14) denkleminin I aralığı üzerinde tanımlı eksplisit çözümleridirler.

Bu durumu f_1 fonksiyonu için gösterelim.

$$f_1(x) = \sqrt{25 - x^2} \quad \rightarrow \quad f_1'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}, \quad \forall x \in I$$

bulunur. (1.14)'te y yerine $f_1(x)$'i, $\frac{dy}{dx}$ yerine de $f_1'(x)$'i koyarsak, $\forall x \in I$ için doğru olan

$$x + \sqrt{25 - x^2}\left(\frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}\right) = 0 \quad \text{veya} \quad x - x = 0$$

özdeşliğini elde ederiz. Böylece f_1 fonksiyonu I aralığında (1.14) denkleminin bir implisit çözümüdür.

şimdi

$$x^2 + y^2 = -25 \tag{1.15}$$

bağıntısını ele alalım. Bu da (1.14) denkleminin bir implisit çözümü müdür? (1.15)'i x'e göre kapalı olarak türetelim. O zaman

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} \quad \text{veya} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

buluruz. Bunu (1.14)'te yerine koyarsak

$$x + y\left(-\frac{x}{y}\right) = 0$$

biçimsel özdeşliğini elde ederiz. Böylece (1.15) bağıntısı (1.14) diferansiyel denklemini biçimsel olarak sağlar. Tek başına bu sonuçtan, (1.15)'in (1.14) diferansiyel denkleminin bir implisit çözümü olduğunu söyleyebilir miyiz? Bu sorunun cevabı "hayır"'dır. (1.15) bağıntısının, herhangi bir gerçel I aralığında, (1.14) denkleminin bir eksplisit çözümü olacak bir fonksiyon tanımladığına dair hiçbir garantimiz yoktur. Bütün bildiğimiz (1.15)'in x ile y arasında, implisit türetme ve yerine koyma ile (1.14) denklemini *biçimsel* olarak bir *biçimsel* özdeşliğe çevirdiğidir. Buna *biçimsel* çözüm denir. çözüm görünümündedir ve bu aşamada bütün bildiğimiz budur.

Bir adım daha atıp (1.15)'i y'ye göre çözersek,

$$y = \mp\sqrt{-25 - x^2}$$

elde ederiz. Bu ifade x'in her değeri için gerçel olmayan değerler verdiğinden, (1.15) bağıntısının hiçbir gerçel aralıkta hiç bir gerçel fonksiyon tanımlamadığı sonucuna varırız. Böylece (1.15) gerçekten bir implisit çözüm değil, (1.14) denkleminin sadece bir biçimsel çözümüdür.

Bundan sonraki bölümlerin yöntemlerini uygularken sık sık, en azından biçimsel çözüm olduklarını kolayca gösterebileceğimiz bağıntılar elde edeceğiz. Amacımız yöntemlere alışmak olacak ve elimizde bunların gerçek implisit çözümler olduklarına dair hiç bir garanti bulunmadığı halde, bu suretle elde edilen ifadelere "çözüm" deyip geçeceğiz. Durumu daha titiz incelemek gerekince, bu bağıntıların eksplisit çözümler tanımlayan gerçek implisit çözümler olup olmadıkları araştırılmalıdır.

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{1.16}$$

birinci basamak diferansiyel denklemini ele alalım. Bütün gerçel x'ler için $f_0(x) = x^2$ ile tanımlı f_0 fonksiyonu (1.16) denkleminin bir çözümüdür. Sırası ile

$$f_1(x) = x^2 + 1, \quad f_2(x) = x^2 + 2, \quad f_3(x) = x^2 + 3$$

ile tanımlı f_1, f_2, f_3 fonksiyonları da öyledir. Aslında bütün gerçel x'ler için

$$f(x) = x^2 + c \tag{1.17}$$

ile tanımlı f fonksiyonu, *her* gerçel ve sabit c için (1.16) denkleminin bir çözümüdür. Bu sebepten (1.17)'deki c sabitini bir *keyfî sabit* olarak görürüz ve (1.16) *birinci basamak* diferansiyel denkleminin *bir keyfî sabit* içeren çözümü bulunduğunu söyleyebiliriz. Bu f çözümüne (1.16) denkleminin *genel çözüm*'ü, ve bundan c'ye özel değerler vermekle elde edilen çözümlere de (1.16) denkleminin *özel çözüm*'leri denir.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \tag{1.18}$$

ikinci basamaktan diferansiyel denklemi ile devam edeceğiz ve her x için

$$f(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x \tag{1.19}$$

ile tanımlanan f fonksiyonunu ele alacağız. Bu f fonksiyonunun, c_1 ve c_2 sabitlerinin *her* gerçel değeri için (1.18) denkleminin çözümü olduğunu kolayca gösterebiliriz. Bu sebepten (1.19)'daki c_1 ve c_2 sabitlerini *keyfî sabitler* olarak görürüz ve (1.18) *ikinci basamak* diferansiyel denkleminin *iki keyfî sabit* içeren çözümü bulunduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca (1.19)'daki c_1 ve c_2 sabitleri, aynı genelliği koruyarak *bir tek* keyfî sabitle değiştirememememiz açısından da *temel özellik*'tir. (1.19) çözümüne (1.18) denkleminin *genel çözüm*'ü, ve bundan c_1 ve c_2'den birine veya ikisine birden özel değerler vermekle elde edilen çözümlere de (1.18) denkleminin özel çözümleri denir. Mesela her x için

$$g(x) = 5\sin x - 6\cos x$$

ile tanımlı g fonksiyonu (1.18)'in bir özel çözümüdür.

Burada verilen örnekler ışığında, n. basamaktan bir adî diferansiyel denklemin bir çözümü n tane esaslı keyfî sabit bulunduruyorsa, buna genel çözüm demek uygun düşüyor. Neticede genel çözümün tanımını böyle yapacağız ama, önce bu *esaslı* keyfî sabitler kavramına biraz daha temkinle yaklaşmak iyi olacak. Aynı genelliği korumak üzere daha az sayıda keyfî sabitle değiştirilemiyorlarsa, bir ifadedeki keyfî sabitlere, *esaslı keyfî sabitler* denir. Aynı genellik derecesi kavramını daha ayrıntılı olarak incelemeye kalkışmayacağız. Onun yerine kavramı bizim amaçlarımız için yeteri kadar açık hale getirecek iki basit örnek vereceğiz.

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

bağıntısındaki c_1 ve c_2 keyfî sabitlerine bakalım. Bunlar esaslı keyfî sabitlerdir. Genellikten bir şey kaybetmeden bunları bir tek keyfî sabitle değiştiremeyiz. öte yandan

$$y = (c_1 + c_2)e^x \tag{1.20}$$

bağıntısındaki c_1 ve c_2 keyfî sabitlerini bir tek c_3 keyfî sabiti ile değiştirip

$$y = c_3e^x \tag{1.21}$$

yazarız ve (1.21) çözümü hala (1.20) kadar geneldir. c_1 ve c_2'ye değerler vermek, c_3'e belli bir değer vermekle aynı şeydir. Böylece (1.21)'deki sabitler esaslı değildir. şimdi genel çözüm tanımına dönelim.

TANIM.
$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \tag{1.22}$$
n. basamaktan bir adî diferansiyel denklem olsun.

(1) (1.22) denkleminin n tane esaslı keyfî sabit bulunduran çözümüne (1.22)'nin bir *genel çözüm*'ü denir.

(2) (1.22)'nin bir genel çözümünden, n tane esaslı keyfî sabitin en az birine özel değerler vererek elde edilen çözüme, (1.22)'nin bir *özel çözüm*'ü denir.

(3) (1.22)'nin, n tane keyfî sabitin hiçbir seçimi için elde edilemeyen çözümüne (1.22)'nin bir *tekil çözüm*'ü denir.

Örnek 1.5.
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \tag{1.23}$$
ikinci basamak diferansiyel denklemini ve $\forall x \in \mathcal{R}$ için
$$f(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \tag{1.24}$$
ile tanımlı f fonksiyonunu gözönüne alalım. (1.24) fonksiyonunun, c_1, c_2'nin her seçimi için (1.23) denkleminin bir çözümü olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece (1.24) fonksiyonu (1.23) denkleminin c_1, c_2 gibi *iki* keyfî sabite bağlı bir çözümü olur ve bu sabitler yukarıda anlattığımız gibi *esaslı* keyfî sabitlerdir. Demek ki (1.24) fonksiyonu (1.23) denkleminin bir *genel çözümü*'dür.

(1.23) denkleminin bazı özel çözümleri mesela:
$$f_1(x) = 5e^x + 6e^{2x},$$
$$f_2(x) = \frac{1}{2}e^x - 3e^{2x},$$
ve mesela a_0 sizin yaşınız ve w_0 da ağırlığınız olmak üzere
$$f_3(x) = a_0 e^x + w_0 e^{2x},$$
olarak alınabilir. (1.23) denkleminin hiç tekil çözümü olmadığı kanıtlanabilir.

Örnek 1.6. $\forall x \in \mathcal{R}$ için

$$f(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \sin x + c_4 \cos x \tag{1.25}$$

ile tanımlı f fonksiyonun $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4$'ün her seçimi için

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - y = 0 \tag{1.26}$$

dördüncü basamak diferansiyel denkleminin bir çözümü olduğu gösterilebilir. Bu dört sabit, aynı genelliği sağlamak üzere daha az sayıda sabitle değiştirilemez. Bu yüzden (1.25) fonksiyonu *dördüncü* basamaktan (1.26) denkleminin $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4$ gibi *dört* keyfî sabitli çözümü olur ve böylece denklemin bir *genel çözümü*'dür.

(1.26) denkleminin bazı *özel çözüm*'leri:

$$f_1(x) = e^x + 2e^{-x} + 5 \sin x - 3 \cos x,$$

$$f_2(x) = -e^x + \frac{1}{2} e^{-x} + 4 \sin x + \pi \cos x,$$

$$f_3(x) = \sin x,$$

olarak alınabilir. (1.26) denklemi de tekil çözümü olmayan denklemlerdendir.

Örnek 1.7. $\forall x \in \mathcal{R}$ için

$$f(x) = (x + c)^2 \tag{1.27}$$

ile tanımlı f fonksiyonunun

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4y = 0 \tag{1.28}$$

lineer olmayan diferansiyel denkleminin bir çözümü olduğu gösterilebilir. Bu denklem *birinci* basamaktan olduğundan ve (1.27) fonksiyonunda *bir* tane keyfi sabit bulunduğundan, (1.27) fonksiyonunun (1.26) denkleminin bir *genel çözümü* olduğunu söyleyebiliriz.

(1.28) denkleminin bazı *özel çözüm*'leri:

$$f_1(x) = x^2,$$

$$f_2(x) = (x+5)^2,$$

$$f_3(x) = (x - \frac{1}{3})^2,$$

olarak alınabilir. Kuşkusuz bu çözümler c keyfi sabitine sırasıyla $0, 5$ ve $-\frac{1}{3}$ değerleri verilerek (1.27)'den elde edilmişlerdir. şimdi $\forall x \in \mathcal{R}$ için

$$g(x) \equiv 0 \tag{1.29}$$

ile tanımlı g fonksiyonunun (1.28) denkleminin bir çözümü olduğunu görüyoruz. Bu çözümü (1.27)'deki c'ye uygun değer vererek elde edemeyiz. Böylece (1.29) fonksiyonu (1.28) denkleminin bir *tekil çözüm*'üdür.

B. Diferansiyel Denklemlerin ve Çözümlerinin Analitik ve Geometrik Yorumları

Analiz diliyle konuşursak diferansiyel denklemin asıl söylediği şey nedir? Bu soruya cevap vermek için, gerçel değişkenli fonksiyonları ifade ederken ne türlü ifadeler kullandığımıza bakalım. Herkesin bildiği sinüs fonksiyonunu ele alalım. Sinüs fonksiyonu denilen fonksiyonun değerlerini çoğu kere $f(x) = \sin x$ kapalı gösterimiyle ifade ederiz. Aynı değerleri sonsuz seri ile:

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

veya $f(x) = \int_0^x \cos t dt$ integral temsili ile de ifade edebiliriz.

Şimdi diferansiyel denklemlere geri dönelim ve

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

basit diferansiyel denklemini ele alalım. Bu denklemin genel çözümü c keyfî bir sabit olmak üzere $\forall x \in \mathcal{R}$ için $f(x) = \sin x + c$ ile tanımlı fonksiyondur. $x = 0$'da $y = 0$ şartını sağlayan özel çözüm $f_1(x) =$

$\sin x$ olmak üzere $y = f_1(x)$ ile verilen çözümdür. Daha sonra bu özel çözümün, bu şartı sağlayan yegane çözüm olduğunu göreceğiz. Böylece $\frac{dy}{dx} = \cos x$ diferansiyel denkleminin ve $x = 0$'da $y = 0$ olma şartının birlikte, değerleri $f_1(x) = \sin x$ olan $f_1(x)$ fonksiyonunu tanımladığını söyleyebiliriz. Ayrıca $\frac{dy}{dx} = \cos x$ diferansiyel denklemi, değerleri $f_c(x) = \sin x + c$ olan $f_c(x)$ fonksiyonlarını tanımlamak için de bir gereçtir.

Bu basit örnek, bu kısmın başında sorduğumuz bir soruya cevap verme imkanı sağlıyor. Yaptığımız gözlemleri genelleştirerek diferansiyel denklemlerin sadece, çözümleri olan fonksiyonları tanımlamakta kullanılan bir gereç olduğunu söyleyebiliriz. Aslında bugün bildiğimiz fonksiyonların çoğu, ilk defa kendilerini tanımlayan diferansiyel denklemler olarak ortaya çıkmışlardır.

Şimdi diferansiyel denklemin geometri dilindeki anlamını ve çözümlerinin geometrik önemini araştıralım. önce F gibi bir gerçel değerli fonksiyonun xy-düzleminde bir $y = F(x)$ eğrisi ile temsil edilebileceğini ve F'nin x noktasındaki $F'(x)$ türevinin, $y = F(x)$ eğrisinin x noktasındaki teğetinin eğimi olarak alınabileceğini hatırlatalım. Böylece f bir gerçel fonksiyon olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.30}$$

genel birinci basamak diferansiyel denklemi geometrik olarak, f fonksiyonunun tanımlı olduğu her (x, y) noktasında $f(x, y)$ eğimini tanımlayan bir bağıntı olarak yorumlanabilir. (1.30) denkleminin genel çözümünün, c bir keyfî sabit olmak üzere

$$y = F(x, c) \tag{1.31}$$

şeklinde yazılabildiğini varsayalım. (1.31) denklemi geometrik olarak, xy-düzleminde bir-parametreli eğri ailesi denilen ve her noktasındaki teğetinin eğimi, (1.30) diferansiyel denkleminden hesaplanan eğrilerle temsil edilen, bir fonksiyon ailesi tanımlar. (1.30) diferansiyel denkleminin çözümlerinin grafikleri olan bu eğrilere, (1.30) diferansiyel denkleminin *integral eğrileri* denir.

Bir integral eğrisinin belli bir (x_0, y_0) noktasından geçmesi istenirse, bu nokta (1.31) denklemini sağlamalı, yani $y_0 = F(x_0, c)$ olmalıdır. Bu eşitlikten c belli bir c_0 sabiti olarak bulunur ve denklemi $y = F(x, c_0)$ olan belirli bir integral eğrisi verir. Bu şekilde elde edilen F fonksiyonu (1.30) diferansiyel denkleminin, grafiği (x_0, y_0) noktasından geçen özel çözümüdür.

Basit bir örnek olarak daha önce incelediğimiz $\frac{dy}{dx} = \cos x$ diferansiyel denklemini yeniden ele alacağız. Genel çözümü $y = \sin x + c$ olarak yazılabilir ve xy-düzleminde, ailenin herhangi bir eğrisinin, verilen bir (x, y) noktasındaki eğimi $\cos x$ ile hesaplanan bir parametreye bağlı bir eğri ailesi tanımlar. Değerleri $y = \sin x + c$ ile verilen bu "sinüs eğrileri", $\frac{dy}{dx} = \cos x$ diferansiyel denkleminin integral eğrileridir.

Bu incelemeyi sürdürerek, n. basamaktan bir diferansiyel denklemi, xy-düzleminde n parametreli eğri ailesi tanımlayan bir bağıntı olarak yorumlayabiliriz.

C. Çözüm Yöntemleri

Bir diferansiyel denklemi çözeceğiz dediğimiz zaman, bu denkleme bir ya da daha çok çözüm bulacağımızı söylemiş oluyoruz. Bu nasıl yapılır ve gerçek anlamı nedir? Bu kitabın büyük kısmı diferansiyel denklemleri çözmeğe yarayan çeşitli yöntemlerin incelenmesine ayırılmıştır. Uygulanacak yöntem, incelenen denklemin tipine bağlıdır ve burada özel yöntemlerin incelenmesine girişmeyeceğiz.

Bununla birlikte, çeşitli yöntemlerden biriyle bir diferansiyel denklemi çözdüğümüzü varsayalım. Acaba bu zorunlu olarak, bilinen elemanter fonksiyonların bir sonlu toplamıile kapalı ifade dediğimiz türde yazılmış bir f eksplisit çözümü bulduğumuz anlamına mı gelir? Yani kabaca söylersek, diferansiyel denklemi çözdük diyebilmemiz için, çözümü ifade eden bir "formül" bulmuş olmamız zorunlu mudur? Bu sorunun cevabı "hayır"dır. Çözümleri bu şekilde ifade edilen diferansiyel denklemlerin sayısı nisbeten çok azdır. Aslında *kapalı çözüm*, diferansiyel denklemler alanında bir lükstür. 2. ve 4. Bölüm'lerde kapalı çözümleri bulunan diferansiyel denklemleri ele alacağız ve böyle çözümleri bulmak için kullanılabilecek tam çözüm yöntemlerini inceleyeceğiz. Ancak az önce de söylediğimiz gibi böyle denklemler küçük bir azınlıktır ve tam çözümleri bulunamayan denklemleri "çözmek"ten ne anladığımızı açıkça ortaya koymalıyız. Böyle denklemler, bazıları 6, 9 ve 13. Bölüm'lerde incelenecek olan çeşitli yöntemlerle yaklaşık olarak çözülür. Bu *yaklaşık çözümler*'in gerçekte bize sağladıkları şey nedir? Bu sorunun cevabı uygulanan yönteme bağlıdır.

Seri çözüm yöntemleri, çözümleri sonsuz seriler şeklinde ifade ederken, sayısal yöntemler çözüm fonksiyonlarının, serbest değişkenin seçilmiş değerlerinde alacağı değerleri yaklaşık olarak verir. Grafik yöntemler ise integral eğrilerinin grafiklerini yaklaşık olarak sağlarlar. Bu yöntemler, verdikleri sonuçlar yaklaşık olduğundan kapalı çözümler kadar itibar görmezler. Ancak tam çözüm verecek yöntemler uygulanamıyorsa, yaklaşık çözümlere dönmekten başka yapılacak bir şey yoktur. Günümüzde bilim ve mühendislikten gelen problemler, tam çözüm yöntemlerinin uygulanmasına imkan vermeyen diferansiyel denklemler üretmeye devam ediyor ve yaklaşık çözümler gittikçe daha fazla önem kazanıyor.

D. Diğer Örnekler

Örnek 1.8. $y = cx + 2c^2$ fonksiyonunun $y = xy' + 2(y')^2$ diferansiyel denkleminin bir genel çözümü olduğu bellidir. $y_1 = -\frac{x^2}{8}$ ise aynı denklemin bir başka çözümüdür ve verilen genel çözümden c'nin uygun belirlenmesi suretiyle elde edilemez. O halde bu, genel çözüme nazaran bir tekil çözümdür.

n. basamaktan bir diferansiyel denklemin

$$y^{(i)}(x_0) = k_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

koşullarını sağlayan çözümlerini bulma problemine **başlangıç değer problemi** denir. Bu koşullara da **başlangıç koşulları** adı verilir.

Örnek 1.9. $y'' = \frac{1}{x} + 2x\cos x^2$ diferansiyel denkleminin $(0, \infty)$ aralığında $y(1) = 0$ ve $y'(1) = 1 + \sin 1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü bulunuz.

Verilen diferansiyel denklemin bir genel çözümü iki kere integre etmekle $y' = \ln x + \sin x^2 + c$ ve $y = x\ln x + \int_1^x \sin t^2 dt + (c-1)x + b$ olarak bulunur. $y'(1) = 1 + \sin 1$ başlangıç koşulunu kullanarak $c = 1$ ve $y(1) = 0$'dan da $b = 0$ buluruz. O halde verilen başlangıç değer probleminin çözümü $y = x\ln x + \int_1^x \sin t^2 dt$ olarak elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıda verilen fonksiyonların a ve b nin her değeri için, verilen diferansiyel denklemin çözümü olduğunu gösteriniz.

1. $y'' + 4y = 0$	$y = a\cos 2x + b\sin 2x$
2. $y'' - 4y = 0$	$y = ae^{2x} + be^{-2x}$
3. $y'' + 3y' + 2y = 12e^{2x}$	$y = ae^{-x} + be^{-2x} + e^{2x}$
4. $y'' - 6y' + 9y = 0$	$y = ae^{3x} + bxe^{3x}$
5. $(\cos 2x)y' + 2(\sin 2x)y = 2$	$y = a\cos 2x + \sin 2x$
6. $y'' + (y')^2 + 1 = 0$	$y = \ln\cos(x-a) + b$
7. $2xydy = (y^2 - x)dx$	$y^2 = ax - x\ln x$
8. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$	$y = ae^{-9t}\cos(3x+b)$
9. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	$y = af(x+2t) + bg(x-2t)$, f, g keyfi

Aşağıdaki denklemlerin tam çözümlerini bulunuz.

1. $y' = 1 - 2\sin 2x$	2. $y' = \frac{2}{x(2-x)}$
3. $y'' = 1 + \tan^2 x$	4. $y'' = e^{-x} + 9\cos 3x$
5. $y''' = \frac{2}{x^3} + \sec x(1 + \tan^2 x)$	6. $y^{iv} = \sinh\frac{x}{2}$

Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözünüz.

1. $y' = xe^{3x}, \quad y(0) = 0$
2. $(\sin x)dx - (\cos x)dy = 0 \quad , y(0) = 1$
3. $y' = 2arctan\ x, \quad y(0) = 0$
4. $y'' = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$
5. $y'' = 9\cos x\sin 2x, \quad y(\pi) = 2, y'(\pi) = 6$
6. $y''' = 48\cos x, \quad y(0) = 2, y'(0) = -6, y''(0) = 0$

Aşağıda birinci sütunda verilen fonksiyonların, x ekseni üzerindeki her $a < x < b$ aralığında, ikinci sütunda verilen diferansiyel denklemlerin çözümü olduğunu gösteriniz.

1. $f(x) = x + 3e^{-x}$	$y' + y = x + 1$
2. $f(x) = 2e^{3x} - 5e^{4x}$	$y'' - 7y' + 12y = 0$
3. $f(x) = e^x + 2x^2 + 6x + 7$	$y'' - 3y' + 2y = 4x^2$
4. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$(1 + x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0$

Aşağıdaki problemleri çözünüz.

1. $x^3 + 3xy^2 = 1$ bağıntısının $2xyy' + x^2 + y^2 = 0$ diferansiyel denkleminin $0 < x < 1$ aralığında bir implisit çözümü olduğunu gösteriniz.

2. $5x^2y^2 - 2x^3y^2 = 1$ bağıntısının $xy' + y = x^3y^3$ diferansiyel denkleminin $0 < x < 5/2$ aralığında bir implisit çözümü olduğunu gösteriniz.

3. c_1, c_2 keyfî sabitler olmak üzere $f(x) = c_1e^{4x} + c_2e^{-2x}$ ile tanımlı f fonksiyonunun $y'' - 2y' - 8y = 0$ diferansiyel denkleminin bir genel çözümü olduğunu gösteriniz.

4. c_1, c_2, c_3 keyfî sabitler olmak üzere $g(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3e^{-2x}$ ile tanımlı g fonksiyonunun $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$ diferansiyel denkleminin bir genel çözümü olduğunu gösteriniz.

5. m sabitinin bazı değerleri için $f(x) = e^{mx}$ ile tanımlı f fonksiyonu $y''' - 3y'' - 4y' + 12y = 0$ diferansiyel denkleminin çözümüdür. Bu m değerlerini bulunuz.

6. n sabitinin bazı değerleri için $g(x) = x^n$ ile tanımlı g fonksiyonu $x^3y''' + 2x^2y'' - 10xy' - 8y = 0$ diferansiyel denkleminin çözümüdür. Bu n değerlerini bulunuz.

7. $f(x) = 3e^{2x} - 2xe^{2x} - \cos 2x$ ile tanımlı f fonksiyonunun $y'' - 4y' + 4y = -8 \sin 2x$ diferansiyel denklemini ve $f(0) = 2$, $f'(0) = 4$ şartlarını sağladığını gösteriniz.

1.3 B.D.P., S.D.P. ve Çözümlerin Varliği

A. Başlangıç ve Sınır Değer Problemleri

Bu kısıma oldukça basit bir problemle başlayacağız.

Problem.

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{1.32}$$

diferansiyel denklemininin $x = 1$'de 4 değerini alan bir f çözümünü bulunuz.

Çözüm. Önce problemi anladığımızdan emin olalım. Aşağıdaki özellikleri gösteren bir f gerçel fonksiyonu arıyoruz:

(1) f fonksiyonu (1.32) diferansiyel denklemini sağlamalıdır. Yani, bir I aralığındaki her gerçel x için $f'(x) = 2x$ olmalıdır.

(2) f fonksiyonu $x = 1$'de 4 değerini almalıdır. Yani, $f(1) = 4$ özelliğini göstermelidir.

Daha önce (1.32) denkleminin genel çözümünün c bir keyfî sabit olmak üzere

$$f(x) = x^2 + c, \tag{1.33}$$

ile verildiğini görmüştük. şimdi c sabitini, (1.33)'ün (2) şartını sağlamasına imkan verecek şekilde bulmağa çalışalım. $4 = c + 1$, ve böylece $c = 3$ olmalıdır.

$$f(x) = x^2 + 3$$

ile tanımlı f özel çözümü, (1.32) diferansiyel denkleminin $x = 1$'de 4 değerini alan çözümüdür. Başka bir deyimle $f(x) = x^2+3$ ile tanımlı f fonksiyonu, problemde konulan iki şartı da sağlar.

Bu tip problemler ve çözümüleri için kısaltılmış gösterim. (1.32) diferansiyel denklemi ve çözümün $x = 1$'de 4 değerini alma şartı, bir bakıma kısaltılmış olarak

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilebilir. $y(1) = 4$ yazımı çözümün $x = 1$'de 4 değerini alması hakkındaki ek şartı temsil ediyor. Yine problemin çözümü olan ve $f(x) = x^2 + 3$ ile tanımlanan f fonksiyonu da

$$y = x^2 + 3$$

gösterimi ile kısaltılabilir. $y(1) = 4$ ve $y = x^2 + 1$ gösterimleri bazı bakımlardan arzu edilmeyen ifadelerdir. Ancak geleneksel oldukları ve kolaylık sağladıkları için üstünlükleri vardır. Bu gösterim bu özellikleri sebebiyle bundan sonra bu kitapta da kullanılacaktır.

Diferansiyel denklemlerin uygulamalarında çok sık karşılaşılan problemler, *hem* diferansiyel denklem ve *hem de* diferansiyel denklemin çözümünün sağlaması istenen bir, ya da daha fazla ek şart (ya da yan şart) bulundurmaları bakımından yukarıdaki ilk probleme benzerlik gösterirler. Yan şartların hepsi de bir tek x değerine aitse probleme *başlangıç değer problemi* (ya da bir nokta sınır değer problemi), bu şartlar iki farklı x değerini birbirine bağlıyorsa probleme *iki nokta sınır değer problemi* (ya da kısaca sınır değer problemi) denir. Bu kavramları örneklerle gösterecek ve bu tür problemlerden birini ayrıntısı ile ele alacağız.

Örnek 1.10.

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \\ y(1) = 3 \\ y'(1) = -4 \end{cases}$$

Bu problem,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

diferansiyel denkleminin $x = 1$'de 3 değerini alan ve birinci türevi $x = 1$ de -4 olan çözümünü bulma işinden oluşmaktadır. Bu şartlardan ikisi de x'in aynı bir değeri ile, yani $x = 1$ ile ilgilidir. Böylece bu bir başlangıç değer problemidir. Daha sonra bu problemin bir tek çözümü olduğunu göreceğiz.

Örnek 1.11.

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 \end{cases}$$

Bu problemde aynı diferansiyel denklemin çözümünü arıyoruz. Ancak bu sefer çözüm, $x = 0$'da 1, $x = \frac{\pi}{2}$'da 5 değerini almalıdır. Yani şartlar iki farklı x değerini, 0 ile $\frac{\pi}{2}$'yi birbirine bağlamaktadır. Bu, iki noktalı sınır değer problemidir. Bu problemin de tek çözümü vardır. Ancak

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(\pi) = 5 \end{cases} .$$

sınır değer probleminin hiç çözümü yoktur. Bu basit örnek, sınır değer problemlerinin hafife alınmaması gerektiğini göstermektedir.

Şimdi birinci basamaktan diferansiyel denklemlerin başlangıç değer problemlerini daha ayrıntılı olarak inceleyeceğiz.

TANIM. f, xy-düzleminin D gibi bir bölgesinde[1] x ve y'nin sürekli bir fonksiyonu olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.34}$$

birinci basamaktan diferansiyel denklemini ele alalım. $(x_0, y_0) \in D$ olsun. (1.34)'e ait başlangıç değer problemi , (1.34) denkleminin, x_0'ı içinde bulunduran bir aralıkta tanımlı ve

$$\phi(x_0) = y_0$$

başlangıç şartını sağlayan ϕ çözümünü bulma problemidir.

Adet olmuş kısa gösterim ile bu başlangıç değer problemi

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

olarak yazılabilir.

Bu problemi çözmek için, sadece (1.34) denklemini sağlamakla kalmayıp, $x = x_0$ olduğunda y_0 değerini alan bir ϕ fonksiyonu bulmalıyız.

[1] Bölge, açık irtibatlı bir kümedir. Bu tür kavramlara aşina olmayanlar bölgeyi, düzlemde basit kapalı bir eğrinin iç tarafı olarak düşünebilirler.

Geometri diliyle konuşursak, (1.34)'ün, (x_0, y_0) noktasından geçen integral eğrisini bulmak istiyoruz. Bunun için önce diferansiyel denklemin

$$g(x, y, c) = 0 \tag{1.35}$$

genel çözümü bulunur. (x_0, y_0) noktası bunu sağlayacağından

$$g(x_0, y_0, c) = 0$$

elde edilir. Bu denklemden c'yi çözersek, c_0 gibi bir değer buluruz. Şimdi (1.35) eşitliğindeki c keyfî sabitini c_0 ile değiştirerek $g(x, y, c_0) = 0$ özel çözümünü elde ederiz. Daha sonra bu eşitlikten problemin şartlarını sağlayan eksplisit çözüm üretilir.

Örnek 1.12.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \tag{1.36}$$

$$y(3) = 4 \tag{1.37}$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

(1.36) diferansiyel denkleminin genel çözümünün

$$x^2 + y^2 = c^2 \tag{1.38}$$

olduğu bilinmektedir. (1.37) şartı, (1.36) denkleminin $x = 3$'te $y = 4$ değerini alan çözümünü arayacağımızı söylemektedir. Böylece $(3, 4)$ sayı çifti (1.38) bağıntısını sağlamalıdır. (1.38)'de $x = 3$ ve $y = 4$ koyarak

$$9 + 16 = c^2 \quad \text{veya} \quad c^2 = 25$$

buluruz. Şimdi c^2'nin bu değerini (1.38)'de yerine koyarsak

$$x^2 + y^2 = 25$$

elde ederiz. Buradan y'yi çözersek

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

buluruz. y'nin $x = 3$'te 4 değerini alabilmesi için bu ifadede artı işaretinin seçilmesi gerekeceği bellidir. Böylece

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2}, \quad -5 < x < 5$$

ile tanımlı f fonksiyonu problemin çözümüdür. Daha önce tanıttığımız gösterimle bu çözümü $y = \sqrt{25 - x^2}$ olarak yazabiliriz.

B. çözümlerin Varlığı

Örnek 1.12.'de ele alınan başlangıç değer probleminin çözümünü bulabildik. Acaba bütün başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümü var mıdır? Örnek 1.11'in sonunda

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(\pi) = 5 \end{cases}$$

sınır değer problemine işaret etmiş ve hiç çözümü olmadığını söyleyerek bu soruya olumsuz cevap vermiştik. Böylece çözümlerin varlığı sorunu ortaya çıkmış oldu. Acaba verilen başlangıç veya sınır değer probleminin çözümü var mıdır? Daha sonraki bölümlerde bu tür problemlerle karşılaştıkça bu soruya çeşitli cevaplar vermeğe çalışacağız. Şimdilik bu sorunu biraz önce tanımını yaptığımız başlangıç değer problemi için ele alalım. Bu durumda kesin bir cevap verebiliriz. Bu tanıma uyan her başlangıç değer probleminin *en az bir* çözümü vardır.

Ancak bu durumda başka bir sorun, *çözümün tekliği* meselesi ortaya çıkar. Böyle bir problemin *birden fazla çözümü* olabilir mi?

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

başlangıç değer problemini ele alalım.

$$f_1(x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

$$f_2(x) = \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}, \quad x \geq 0; \qquad f_2(x) = 0, \quad x \leq 0$$

ile tanımlı f_1, f_2 fonksiyonlarının *ikisinin de* bu başlangıç değer probleminin çözümü olduğu gösterilebilir. Aslında bu problemin sonsuz sayıda çözümü vardır. Artık teklik ile ilgili sorunun cevabı bellidir.

Çözüm tek olmak zorunda değildir. Çözümün tekliğini garanti etmek için muhakkak ek şartlar koşulmalıdır. Şimdi bu ek koşulların ne olduğunu Teorem 1.1'de göreceğiz.

TEOREM 1.1. Temel Varlık ve Teklik Teoremi.

Hipotez.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.34}$$

birinci basamaktan diferansiyel denklemini ele alalım. Burada

(a) f fonksiyonu, xy-düzleminin D gibi bir bölgesinde x ve y'nin tek değerli, sürekli bir fonksiyonu ve

(b) $\frac{\partial f}{\partial y}$ kısmî türevi de, $(x, y) \in D$ için x ve y'nin sürekli bir fonksiyonu, ayrıca $(x_0, y_0) \in D$ olsun.

Hüküm. (1.34) denkleminin, $h > 0$ yeterince küçük olmak üzere bir $|x - x_0| \leq h$ aralığında tanımlı olan ve

$$\phi(x_0) = y_0 \tag{1.39}$$

şartını sağlayan bir tek ϕ çözümü vardır.

Açıklayıcı Uyarılar. Bu temel teorem, diferansiyel denklemler teorisinde karşımıza çıkan ilk teoremdir. Bu yüzden anlamını ayrıntılı olarak açıklamağa çalışacağız.

(a) Bu bir *Varlık ve Teklik Teoremi*'dir. Bu teorem bize bazı (hipotezde ifade edilen) şartlar altında, bazı şeylerin (hükümde tarif edilen çözümün) *var* olduğunu ve *tek* olduğunu (tarif edilen türden *bir tek* çözüm vardır) söylemektedir. Ancak bu çözümün *nasıl* bulunacağı konusunda hiçbir ipucu vermemekte, sadece problemin bir çözümü *olduğunu* haber vermektedir.

(b) *Hipotez* bize adı geçen şeylerin hangi şartları sağlaması gerektiğini söylemektedir. İki nesne ilgi alanına girmektedir: (1.34) diferansiyel denklemi ve (x_0, y_0) noktası. (1.34) diferansiyel denklemi için hipotez, hem f fonksiyonunun ve hem de ($f(x, y)$'nin y'ye göre kısmî türevinin alınmasıyla elde edilen) $\frac{\partial f}{\partial y}$ fonksiyonunun xy-düzleminin bir D bölgesinde sürekli olmalarını istemektedir. (x_0, y_0) noktası da, için de, hem f'nin ve hem de $\frac{\partial f}{\partial y}$'nin iyi huylu (sürekli) oldukları aynı D bölgesinin noktası olmalıdır.

(c) *Hüküm,* hipotezde konulan şartlar sağlandığında bize ne garanti edildiğini sıralamaktadır. Hüküm bize diferansiyel denklemin, merkezi x_0 olan bir $|x-x_0| \leq h$ aralığında tanımlı ve $x = x_0$ değerini aldığında y_0 değerini alan bir ve yalnız bir ϕ çözümünün varlığını garanti etmektedir. Yani $f(x, y)$ üzerine konan şartlar altında

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

başlangıç değer problemi'nin, x_0 başlangıç noktasının bir komşuluğunda tanımlı *bir tek* çözümü vardır.

(d) Teoremin *ispat*'ı burada verilmemektedir. Onu daha az kısıtlayıcı şartlar altında 10. Bölüm'de ispatlayacağız. Burada hipotezdeki şartların yeterli ama gerekli olmadığını söylemekle yetinelim. Yani bu şartların sağlanması bize, hüküm cümlesinde söylenenleri garanti eder; ancak, hipozdeki şartların hepsi yerine gelmediği halde bir tek çözüme sahip olmamız mümkündür. Bunu 10. Bölüm'de ayrıntısıyla ele alacağız. İncelemesini ileriye bıraktığımız bir başka şey de, hüküm cümlesinde geçen h. Şimdilik onun sadece "yeteri kadar küçük" bir pozitif sayı olduğunu söylemekle yetinelim.

(e) Bir varlık teoremin *kıymet*'i, onu üzerinde biraz daha durulmaya değer yapar. Madem çözümü nasıl bulacağımızı bize söylemiyor, o halde ne yararı var? diye sorulabilir. Bu sorunun cevabı kolaydır: varlık teoremi bize aranacak bir çözümün *var* olduğunu haber verir. Problemin çözümü yoksa, onu bulmak için harcanacak emek, zaman ve para yabana gidecek demektir. Teklik teoreminin faydasına gelince: daha sonra başka çözümler de bulunduğunu ve daha önce bulduğumuz çözümün bizim istediğimiz olmadığını farkettiğimizde, bu özel çözümü bulmak için harcadığımız emek, zaman ve para yine yabana gitmiş olacaktır.

Bu biraz lüzumundan uzun gibi görünen tartışmayı, bundan önce bu türden teoremlerle karşılaşmadığını düşündüğümüz okuyucunun, bu önemli teoremin gerçekten ne ifade ettiği konusunda daha kesin bir fikir sahibi olmasını sağlamak için verdik. Bu tartışmanın ona, daha sonra bu kitapta veya başka yerlerde karşılaşacağı bu tür teoremleri incelemesinde yardımcı olacağını umuyoruz. şimdi Teorem 1.1.'in uygulanışını gösteren iki örnek vereceğiz.

Örnek 1.13.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Başlangıç değer problemini ele alalım. Bu denkleme Teorem 1.1.'i uygulayalım. Önce *hipotez*'i kontrol edeceğiz. Burada $f(x, y) = x^2 + y^2$ ve $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y$ olmaktadır. f ve $\frac{\partial f}{\partial y}$, xy-düzleminin her D bölgesinde süreklidir. $y(1) = 3$ başlangıç koşulu $x_0 = 1, \quad y_0 = 3$ anlamına gelir ve $(1, 3)$ noktası kuşkusuz böyle bir D bölgesi içindedir. Böylece hipotez yerine gelir ve hükümde garanti edilenleri bekleriz. Yani $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ diferansiyel denkleminin, $x_0 = 1$ noktası etrafındaki bir $|x - 1| \leq h$ aralığında tanımlı, $\phi(1) = 3$ başlangıç şartını sağlayan tek bir ϕ çözümü vardır.

Örnek 1.14.

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}} \\ y(1) = 2 \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad (B) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Başlangıç değer problemlerini ele alalım. Burada

$$f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x}} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

olmaktadır. Her iki fonksiyon da $x = 0$ (yani y-ekseni) dışında süreklidirler.

(A) probleminde $x_0 = 1,\ y_0 = 2$ 'dir. Merkezi $(1, 2)$'de bulunan 1 birim kenarlı karenin içi, y-ekseninden nokta *bulundurmaz* . Böylece hem f ve hem de $\frac{\partial f}{\partial y}$, hipotezi bu kare içinde yerine getirirler. Bu karenin içi Teorem 1.1'in D bölgesi olarak alınabilir ve $(1, 2)$ noktası kuşkusuz bu D bölgesi içindedir. Böylece bu teorem (A) problemine uygulanabilir ve problemin $x_0 = 1$ noktası etrafındaki yeterince dar bir aralıkta tanımlı tek bir çözümü vardır.

Şimdi (B) problemine gelelim. Burada $x_0 = 0,\ y_0 = 2$ 'dir. Bu noktada ne f ve ne de $\frac{\partial f}{\partial y}$ süreklidir. Başka bir deyişle $(0, 2)$ noktası, istenen özelliklere sahip hiçbir D bölgesinde bulunmaz. Böylece Teorem 1.1.'den (B) probleminin çözümü olduğu sonucunu çıkaramayız. Dikkat edilsin ki (B) probleminin çözümü yoktur demiyoruz, sadece Teorem 1.1.'in lehte veya aleyhte birşey söylemediğini belirtmek istiyoruz.

ALIŞTIRMALAR

1. $y = 4e^{2x} + 2e^{-3x}$ fonksiyonunun

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0 \\ y(0) = 6 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü olduğunu gösteriniz.

$y = 2e^{2x} + 4e^{-3x}$ fonksiyonu da aynı probleminin çözümü müdür? Cevabınızın gerekçelerini açıklayınız.

2. $\frac{dy}{dx} + y = 2xe^{-x}$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $y = (x^2 + c)e^{-x}$ olarak veriliyor. Aşağıdaki başlangıç değer problemlerinin çözümlerini bulunuz.

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} + y = 2xe^{-x} \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad (B) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} + y = 2xe^{-x} \\ y(-1) = e + 3 \end{cases}$$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 12y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-3x}$ olarak veriliyor. Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözünüz.

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 12y = 0 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 6 \end{cases} \qquad (B) \quad \begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 12y = 0 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$

4. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ olarak veriliyor. Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözünüz.

$$(A) \begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(\pi/2) = 1 \end{cases} \quad (B) \begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(\pi/2) = -1 \end{cases} \quad (C) \begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$$

5.
$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 6x\frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

diferansiyel denkleminin genel çözümü $y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ olarak veriliyor. Yukarıdaki diferansiyel denklem ile

$$y(2) = 0, \quad y'(2) = 2, \quad y''(2) = 6$$

şartlarından oluşan başlangıç değer problemini çözünüz.

6. Aşağıdaki başlangıç değer problemlerinin $x_0 = 1$ noktası etrafındaki yeterince dar bir $|x-1| \leq h$ aralığında tanımlı tek bir çözümü olduğunu göstermek için Teorem 1.1'i uygulayınız.

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^2 \sin y \\ y(1) = -2 \end{cases} \qquad\qquad (B) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x-2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

7. $P(x)$ ve $Q(x)$ üçüncü dereceden polinomlar olmak üzere

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y \\ y(2) = 5 \end{cases}$$

başlangıç değer problemini gözönüne alınız. Bu problemin $x_0 = 2$ noktası etrafındaki bir $|x-2| \leq h$ aralığında tanımlı tek bir çözümü var mıdır? Cevabınızın gerekçelerini açıklayınız.

OKUNMASI TAVSİYE EDİLEN KİTAPLAR

Agnew (1)
Coddington (12)
Ford (17)
Kaplan (30)
Leighton (36)

Bölüm 2

Tam Çözülen 1. Basamak Denklemler

Bu bölümde belli işlemlerle tam çözümleri bulunabilen birinci basamak diferansiyel denklem tiplerini inceleyeceğiz. Bölümün amacı, bu özel tipleri tanıma ve ilgili çözüm yöntemlerini uygulama yeteneğini geliştirmeğe çalışmaktır. Bunlardan 2.1. Kısım'da incelenecek olan tam diferansiyel denklemler en temel, 2.2. Kısım'da incelenecek olan ayrılabilen diferansiyel denklemler, en "kolay" türdür. Uygulama bakımından en önemli denklemler ise, 2.2. Kısım'da incelenen ayrılabilen denklemlerle 2.3. Kısım'da incelenen lineer denklemlerdir. Geri kalanlar çok özel tiplerdir ve bunlarla ilgili çözüm yöntemleri çeşitli incelikler içerir. Kısacası bu bölümü kibarlık sırasına göre özel "yöntem"lerin, "gereç"lerin, "ustalık"ların bir çorbası olarak tanıtabiliriz.

2.1 Tam Diferansiyel Denklemler

A. Birinci Basamak Diferansiyel Denklemlerin Temel Biçimleri.

Bu bölümde incelenecek birinci basamak diferansiyel denklemler ya

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2.1}$$

ya da

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.2}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu türlerden birindeki denklem kolayca öteki türe çevrilebilir. Mesela

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

diferansiyel denklemi (2.1) şeklindedir. Bu denklem

$$(x^2+y^2)dx + (y-x)dy = 0$$

olarak (2.2) türünde de yazılabilir. Yine (2.2) gibi olan

$$(\sin x + y)dx + (x+3y)dy = 0$$

diferansiyel denklemi (2.1) tarzında ifade edilebilir.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x + y}{x+3y}$$

B. Tam Diferansiyel Denklemler.

TANIM. F sürekli birinci basamak türevlere sahip bir fonksiyon olmak üzere $u = F(x,y)$ olsun. *du diferansiyel*'i

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

ile tanımlanır.

Örnek 2.1. u fonksiyonu x, y cinsinden $\forall(x,y) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ için

$$u = xy^2 + 2x^3y$$

ile verilmiş olsun. O zaman

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 + 6x^2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + 2x^3,$$

olur ki tanıma göre du tam diferansiyeli

$$du = (y^2 + 6x^2y)dx + (2xy + 2x^3)dy$$

olarak bulunur.

TANIM. Bir $u(x, y)$ fonksiyonu $du = Mdx + Ndy$ olacak şekilde bulunabilirse

$$Mdx + Ndy \tag{2.3}$$

diferansiyel formuna *tam diferansiyel* denir.

Başka bir deyimle

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N$$

olacak şekilde bir $u(x, y)$ fonksiyonu varsa, (2.3) ifadesi bir tam diferansiyeldir.

TANIM. $Mdx + Ndy$ bir tam diferansiyel ise,

$$Mdx + Ndy = 0$$

diferansiyel denklemine *tam diferansiyel denklem* denir.

Örnek 2.2. $y^2dx + 2xydy$ bir tam diferansiyel olduğundan

$$y^2dx + 2xydy = 0 \tag{2.4}$$

bir tam diferansiyel denklemdir. Aslında dx'in çarpanı $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2$ ve dy'nin çarpanı $\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy$ olduğundan bu denklemin sol tarafı $u = xy^2$ olmak üzere u'nun tam diferansiyelidir. öte yandan (2.4) denkleminin iki yanını y'ye bölmekle elde edilen basit görünümlü

$$ydx + 2xdy = 0 \tag{2.5}$$

denklemi *tam* değildir.

(2.2). örnekte hiç tereddüt etmeden (2.4) diferansiyel denkleminin tam, (2.5) denkleminin de tam olmadığını söyledik. (2.4) denklemi için iddiamızı , diferansiyeli $y^2dx + 2xydy$ olan $u(x, y)$ fonksiyonunu bizzat ortaya koyarak kanıtladık. Ancak (2.5) denklemi için tezimizi, diferansiyeli $ydx + 2xdy$ olan *hiçbir* u fonksiyonunun bulunamayacağını kanıtlayarak pekiştirmedik. Verilen diferansiyel denklemin tam olup olmadığını ortaya çıkaracak basit bir teste olan ihtiyacımız ortadadır. Aşağıdaki teorem bunu sağlar.

TEOREM 2.1. M, N sürekli birinci basamak kısmî türevlere sahip fonksiyonlar olmak üzere

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{2.6}$$

diferansiyel denklemini gözönüne alalım.

(1) *Şayet* (2.6) diferansiyel denklemi tam ise *o zaman*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2.7}$$

olur.

(2) *Tersine eğer*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ise *o zaman* (2.6) diferansiyel denklemi tamdır.

İspat. **1. kısım:** (2.6) diferansiyel denklemi tam ise *o zaman* $Mdx + Ndy$ tam diferansiyeldir. Tam diferansiyelin tanımından bir u fonksiyonu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N$$

olacak şekilde vardır. O zaman

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olur. Ancak M ve N'nin birinci basamak kısmî türevlerinin sürekliliğini kullanırsak,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

ve böylece

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

elde ederiz.

2. kısım: Bu birinci kısmın tersidir.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

varsayımı ile başlarız $Mdx + Ndy = 0$ denkleminin tam olduğunu kanıtlayarak işi bitiririz. Demek ki bu durumda

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \tag{2.8}$$

ve

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N \tag{2.9}$$

olacak şekilde bir u fonksiyonunun varlığını ortaya koymalıyız. (2.8) ya da (2.9)'u sağlayan bir u fonksiyonu bulabileceğimiz kuşkusuzdur. Ancak acaba *ikisini de* sağlayan fonksiyon var mıdır? u'nun (2.8) denklemini sağlayan bir fonksiyon olduğunu varsayarak yola çıkalım. O zaman

$$u = \int M\partial x + \phi(y) \tag{2.10}$$

olur. Burada $\int M\partial x$, y sabit tutularak gerçekleştirilen x'e göre "kısmî integrasyon" ve $\phi(y)$, y'nin keyfî bir fonksiyonudur (bu, integrasyon sabitinin yerini tutar). (2.10)'un y'ye göre kısmî türevini alırsak

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M\partial x + \frac{d\phi}{dy}$$

buluruz. (2.9) denklemi doğrulanacaksa

$$N = \frac{\partial}{\partial y}\int M\partial x + \frac{d\phi}{dy} \tag{2.11}$$

ve böylece

$$\frac{d\phi}{dy} = N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\partial x$$

olmalıdır. $\phi = \phi(y)$ olduğundan, $\frac{d\phi}{dy}$ de x'ten bağımsızdır. Yani (2.11)'in doğru olması için

$$N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\partial x \tag{2.12}$$

fonksiyonunun x'ten bağımsız olması gerekmektedir. *Hipotezden* $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\partial x\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int M\partial x =$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\int M\partial x = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

bulunur ki, (2.12)'nin x'ten gerçekten bağımsız olduğunu anlarız.

Böylece

$$\phi(y) = \int\left[N - \int\frac{\partial M}{\partial y}\partial x\right]dy$$

yazabiliriz. Bunu (2.10)'da yerine koyarak

$$u = \int M\partial x + \int\left[N - \int\frac{\partial M}{\partial y}\partial x\right]dy \tag{2.13}$$

buluruz. Bu u fonksiyonu hem (2.8) ve hem de (2.9)'u sağlar. Demek ki $Mdx + Ndy = 0$ denklemi tamdır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Yüksek matematiğin dilini iyi öğrenmiş öğrenciler, Teorem 2.1'in yeniden :"(2.6) denkleminin tam olması için gerek ve yeter koşul, (2.7) şartının yerine gelmesidir." şeklinde ifade edilebileceğini farketmişlerdir. Diğer öğrenciler için (2.7)'deki $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ şartının tamlık ölçütü olduğunu, (2.7) doğru olunca 2.6'nın tam denklem olacağını, (2.7) doğru *olmayınca* da 2.6'nın tam denklem *olmayacağını* söyleyelim.

Örnek 2.3. (2.7)'deki tamlık ölçütünü, örnek 2.2'de verilen (2.4) ve (2.5) denklemlerine uygulayalım.

$$y^2dx + 2xydy = 0 \tag{2.4}$$

denklemi için $M = y^2$, $N = 2xy$ ve $\partial M/\partial y = 2y = \partial N/\partial x$ olur ki, (2.4) denklemi tamdır.

öte yandan

$$ydx + 2xdy = 0 \tag{2.5}$$

denklemi için $M = y$, $N = 2x$ ve $\partial M/\partial y = 1 \neq 2 = \partial N/\partial x$ olur. Demek ki (2.5) denklemi tam değildir.

Örnek 2.4.

$$(2x \sin y + y^3 e^x)dx + (x^2 \cos y + 3y^2 e^x)dy = 0$$

diferansiyel denklemi için

$$M = 2x \sin y + y^3 e^x, \quad N = x^2 \cos y + 3y^2 e^x$$

ve

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \cos y + 3y^2 e^x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olur ki, bu denklem tamdır.

C. Tam Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Artık elimizde tamlığı belirlemek için bir test olduğu halde, tam diferansiyel denklemleri çözmeğe başlayabiliriz. $Mdx + Ndy = 0$ denklemi tam ise, $\partial u/\partial x = M$, $\partial u/\partial y = N$ olacak şekilde bir u fonksiyonu vardır. O zaman denklem

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \quad \text{veya} \quad du = 0$$

olarak yazılabilir. c bir sabit olmak üzere $u = c$'nin bu denklemin bir çözümü olduğu bellidir. Bu gözlemimizi aşağıdaki teoremle özetleriz.

TEOREM 2.2. $Mdx + Ndy = 0$ tam diferansiyel denkleminin genel çözümü; u, $\partial u/\partial x = M$, $\partial u/\partial y = N$ olacak şekilde bir fonksiyon ve c bir sabit olmak üzere, $u = c$ ile verilir.

Teorem 2.2'ye başvurursak, u'nun (2.13) formülü ile verildiğini görürüz. Fakat tam diferansiyel denklemleri çözerken bu formülü kullanmak ne arzulanır, ne de gereklidir. Onun yerine ya Teorem 2.1'in ispatının ikinci kısmında izlenen yol, veya aşağıdaki örneklerde görülecek olan "guruplama yöntemi" kullanılır.

Örnek 2.5. $(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0$

İlk görevimiz bu denklemin tam olup olmadığını araştırmaktır. Burada

$$M = 3x^2 + 4xy \quad , N = 2x^2 + 2y \quad , \frac{\partial M}{\partial y} = 4x \quad \text{ve} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4x$$

olduğundan denklem tamdır. Böylece

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = 3x^2 + 4xy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N = 2x^2 + 2y$$

olacak şekilde bir u fonksiyonu bulabiliriz. Bu eşitliklerin birincisinden

$$u = \int M\partial x + \phi(y) = \int (3x^2 + 4xy)\partial x + \phi(y) = x^3 + 2x^2y + \phi(y)$$

elde edilir. bunu y'ye göre türetirsek

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 + \frac{d\phi}{dy}$$

bulunur. Ancak

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = 2x^2 + 2y$$

bekleniyordu. Demek ki

$$2x^2 + 2y = 2x^2 + \frac{d\phi}{dy} \qquad \text{yahut} \qquad \frac{d\phi}{dy} = 2y$$

olmalıdır. Böylece c_0 keyfî bir sabit olmak üzere $\phi(y) = y^2 + c_0$ veya

$$u = x^3 + 2x^2y + y^2 + c_0$$

olur. Buradan genel çözüm için, $u = c_1$ ya da

$$x^3 + 2x^2y + y^2 + c_0 = c_1$$

bulunur. Esaslı olmayan c_0 ve c_1 sabitleri, $c = c_1 - c_0$ keyfî sabiti olarak birleştirilirse genel çözümü

$$x^3 + 2x^2y + y^2 = c$$

olarak yazabiliriz.

Okuyucularımız $c_0 = 0$ alarak $\phi(y) = y^2$ yazmakla genellikten bir şey kaybedilmiş olmayacağını anlamışlardır. şimdi farklı bir yöntem tanıtacağız.

Guruplama Yöntemi. Yukarıdaki problemi bu sefer denklemin terimlerini, sol taraf bazı tam diferansiyellerin toplamı olacak şekilde guruplayarak çözeceğiz.

$$(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0$$

diferansiyel denklemini

$$3x^2dx + (4xydx + 2x^2dy) + 2ydy = 0$$

olarak yazabiliriz. Bu denklemin c bir keyfî sabit olmak üzere

$$d(x^3) + d(2x^2y) + d(y^2) = d(c)$$

veya

$$d(x^3 + 2x^2y + y^2) = d(c)$$

şeklinde yazılabileceğini görürüz ki buradan hemen

$$x^3 + 2x^2y + y^2 = c$$

bulunur.

Bu yöntemin daha hızlı olduğu bellidir. Ancak diferansiyellerin hesabında pratiklik ve terimlerin nasıl guruplanacağı konusunda görüş kabiliyeti ister. Standart yöntem daha uzun hesap işi gerektirir ve daha uzundur ama tamamen düz bir yoldur. Bu yöntem düz bir yol izlemekten hoşlananlara, hızlı yöntem de çabucak sonuca ulaşmak isteyenlere tavsiye edilir.

Elimizde bu iki yöntem olduğu halde, aşağıdaki tam diferansiyel denkleme ait başlangıç değer problemini çözelim.

Örnek 2.6. $(2x\cos y + 3x^2y)dx + (x^3 - x^2\sin y - y)dy = 0,\ y(0) = 2$ başlangıç değer problemini gözönüne alalım.

İlk görevimiz bu denklemin tam olup olmadığını araştırmaktır.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2x\sin y + 3x^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olduğundan denklem tamdır.

"standart " Yöntem.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = 2x\cos y + 3xy^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N = x^3 - x^2\sin y - y$$

olacak şekilde bir u fonksiyonu bulmalıyız. Buradan

$$u = \int M\partial x + \phi(y) = \int (2x\cos y + 3x^2y)\partial x + \phi(y) = x^2\cos y + x^3y + \phi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2\sin y + x^3 + \frac{d\phi}{dy}$$

elde edilir. Fakat aynı zamanda

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = x^3 - x^2\sin y - y$$

olması gerektiğinden

$$\frac{d\phi}{dy} = -y$$

olur ki,

$$\phi(y) = -\frac{y^2}{2} + c_0$$

ve böylece

$$u = x^2\cos y + x^3y - \frac{y^2}{2} + c_0$$

olur. $u = c_1$ genel çözümü de

$$x^2\cos y + x^3y - \frac{y^2}{2} = c$$

olarak yazılabilir. $x = 0$'da $y = 2$ başlangıç şartını kullanırsak, $c = -2$ buluruz. Böylece verilen başlangıç değer probleminin çözümü

$$x^2 \cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = -2$$

olur.

"Guruplama Yöntemi". Denklemdeki terimleri şöyle guruplarız:

$$(2x \cos y dx - x^2 \sin y dy) + (3x^2 y dx + x^3 dy) - y dy = 0$$

Böylece

$$d(x^2 \cos y) + d(x^3 y) - d\left(\frac{y^2}{2}\right) = d(c)$$

ve

$$x^2 \cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = c$$

diferansiyel denklemin genel çözümü olarak bulunur. $y(0) = 2$ başlangıç şartı kuşkusuz daha önce bulunan özel çözümü verecektir.

Şimdi standart yöntemle birkaç örnek daha çözelim.

Örnek 2.7. $(\cos y + y \cos x)dx + (\sin x - x \sin y)dy = 0$ diferansiyel denklemini gözönüne alalım.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x - \sin y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olduğundan verilen denklem tamdır.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = \cos y + y \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N = \sin x - x \sin y$$

olacak şekilde bir u fonksiyonu bulmalıyız. Buradan

$$u = \int M \partial x + \phi(y) =$$

$$\int (\cos y + y \cos x) \partial x + \phi(y) = x \cos y + y \sin x + \phi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x \sin y + \sin x + \frac{d\phi}{dy}$$

elde edilir. Fakat aynı zamanda

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \sin x - x \sin y$$

olması gerektiğinden

$$\frac{d\phi}{dy} = 0, \quad \phi(y) = c$$

olur ki,

$$u = x \cos y + y \sin x + c$$

ve $u = c_1$ genel çözümü de

$$x \cos y + y \sin x = c$$

olarak yazılabilir.

Örnek 2.8.

$$\left(y^2 e^{xy^2} + 4x^3\right) dx + \left(2xye^{xy^2} - 3y^2\right) dy = 0$$

diferansiyel denklemini gözönüne alalım.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2ye^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olduğundan verilen denklem tamdır.

$$u = \int M \partial x + \phi(y) = \int \left(y^2 e^{xy^2} + 4x^3\right) \partial x + \phi(y) = e^{xy^2} + x^4 + \phi(y)$$

ve buradan

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xye^{xy^2} + \frac{d\phi}{dy}$$

elde edilir. Fakat aynı zamanda

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = 2xye^{xy^2} - 3y^2$$

olması gerektiğinden

$$\frac{d\phi}{dy} = -3y^2, \quad \phi(y) = y^3 + c$$

olur ki,

$$u = e^{xy^2} + x^4 + y^3 + c$$

ve $u = c_1$ genel çözümü de

$$e^{xy^2} + x^4 + y^3 = c$$

olur.

Örnek 2.9.

$$\left(3x^2y + y^3 + 2ye^{-x} + 6x\right)dx + \left(x^3 + 3xy^2 - 2e^{-x}\right)dy = 0$$

diferansiyel denklemini gözönüne alalım.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 + 2e^{-x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olduğundan verilen denklem tamdır.

$$u = \int M\partial x + \phi(y) = \int \left(3x^2y + y^3 + 2ye^{-x} + 6x\right)\partial x + \phi(y) =$$

$$x^3y + y^3x - 2ye^{-x} + 3x^2 + \phi(y)$$

ve buradan

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 + 3y^2x - 2e^{-x} + \frac{d\phi}{dy}$$

elde edilir. Fakat aynı zamanda

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = x^3 + 3xy^2 - 2e^{-x}$$

olması gerektiğinden

$$\frac{d\phi}{dy} = 0, \quad \phi(y) = c$$

olur ki,

$$u = x^3y + y^3x - 2ye^{-x} + 3x^2 + c$$

ve $u = c_1$ genel çözümü de

$$x^3y + y^3x - 2ye^{-x} + 3x^2 = c$$

olur.

Örnek 2.10.

$$(10x + 2y\cos x + 3\cos y)dx + (2\sin x - 3x\sin y)dy = 0$$

diferansiyel denklemini gözönüne alalım.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2\cos x - 3\sin y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olduğundan verilen denklem tamdır.

$$u = \int M\partial x + \phi(y) = \int (10x + 2y\cos x + 3\cos y)\partial x + \phi(y) =$$

$$5x^2 + 2y\sin x + 3x\cos y + \phi(y)$$

ve buradan

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\sin x - 3x\sin y + \frac{d\phi}{dy}$$

elde edilir. Fakat aynı zamanda

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = 2\sin x - 3x\sin y$$

olması gerektiğinden

$$\frac{d\phi}{dy} = 0, \quad \phi(y) = c$$

olur ki,

$$u = 5x^2 + 2y\sin x + 3x\cos y + c$$

ve $u = c_1$ genel çözümü de

$$5x^2 + 2y\sin x + 3x\cos y = c$$

olur.

C. Belirli İntegral Yöntemi

$\frac{\partial M}{\partial y}$ ve $\frac{\partial N}{\partial x}$ bir R dikdörtgen bölgesinde sürekli ve

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olsun.

$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ eşitliğini sağlayan bir $f(x,y)$ fonksiyonunu

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + c(y) \quad (x_0, y) \in R \tag{2.14}$$

ile tanımlayabiliriz ve $c(y)$ keyfî fonksiyonunu diğer koşul sağlanacak, yani $N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$ olacak şekilde belirleyebiliriz. Bunun için türev alarak;

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + c'(y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt + c'(y)$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}dt + c'(y) = N(x,y) - N(x_0,y) + c'(y)$$

elde ederiz. Böylece $N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$ olması isteniyorsa, $N(x_0,y) = c'(y)$ seçilmelidir. Yani;

$$c(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt, \quad (x_0, y_0) \in R$$

olmalıdır. O zaman;

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt \tag{2.15}$$

olur. Bu $f(x,y)$ fonksiyonu için

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{ve} \quad N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

ve daha da önemlisi:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

yazılabilir. Böylece verilen denklem $d[f(x,y)] = 0$ haline gelir ki, genel çözüm; k bir keyfi sabiti olmak üzere $f(x,y) = k$ olarak yazılabilir.

Eğer işlemlere $N(x,y)$ ile başlarsak;

$$g(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} N(x,t)dt = c \tag{2.16}$$

genel çözümünü elde ederiz. Duruma göre (2.15) ve (2.16) formüllerinden kolay olanı tercih edilir.

Örnek 2.11. $(y^3+2x)dx+(3xy^2+1)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

$M(x,y) = y^3 + 2x \quad N(x,y) = 3xy^2 + 1$ olduğundan

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2$$

olduğunu görürüz. $(x_0, y_0) = (0,0)$ alırsak, $M(t,0) = 2t$ ve $N(0,t) = 1$ olur. böylece (2.15) denklemine göre çözüm;

$$\int_0^x (y^3 + 2t)dt + \int_0^y 1dt = (y^3t + t^2)\,|_0^x + t\,|_0^y = y^3x + x^2 + y = k$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.16) formülü kullanılırsa;

$$\int_0^x 2tdt + \int_0^y (3xt^2 + 1)dt = t^2\,|_0^x + (xt^3 + t)\,|_0^y = x^2 + xy^3 + y = c$$

bulunur ki beklendiği gibi iki sonuç eşittir.

D. İntegrasyon Çarpanları

$$Mdx + Ndy = 0$$

diferansiyel denklemi verilmiş olsun.

$$\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$$

ise, verilen denklem tamdır ve yukarıdaki yöntemlerden biriyle çözülebilir. Ancak

$$\partial M/\partial y \neq \partial N/\partial x$$

ise denklem tam *değildir* ve yukarıdaki çözüm yöntemleri uygulanamaz. Böyle durumlarda ne yapacağız? Belki de tam diferansiyel olmayan ifadeyi başka bir ifade ile çarparak onu, öncekine denk bir tam diferansiyel denkleme dönüştürebiliriz. Artık ondan sonra yukarıdaki çözüm yöntemlerinden birini kullanmak mümkün olur. (2.2) örneğinde ele alınan

$$ydx + 2xdy = 0 \tag{2.5}$$

denklemini gözönüne alalım. Bu örnekte bu denklemin tam *olmadığını* görmüştük. Ancak denklemi y ile çarpınca buna denk ve *tam*

$$y^2dx + 2xydy = 0 \tag{2.4}$$

denklemini elde etmiştik. (2.4) denklemi tam olduğundan integre edilebilir ve y'ye (2.5) denkleminin *integrasyon çarpanı* denir. Genel olarak integrasyon çarpanını şöyle tanımlarız:

TANIM.

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{2.17}$$

diferansiyel denklemi tam *olmadığı* halde, uygun seçilmiş bir F fonksiyonu için $\mu = F(x, y)$ olmak üzere

$$\mu Mdx + \mu Ndy = 0 \tag{2.18}$$

diferansiyel denklemi tam olsun. O zaman μ'ye (2.17) denkleminin bir *integrasyon çarpanı* denir.

Örnek 2.12.

$$(3x + 4xy^2)dx + (2x + 3x^2y)dy = 0 \tag{2.19}$$

denklemini ele alalım. Denklem

$$M = 3x+4xy^2, \quad N = 2x^3y+3x^4y^2 \ , \frac{\partial M}{\partial y} = 3+8xy \text{ ve } \frac{\partial N}{\partial x} = 2+6xy$$

olmak üzere (2.17) şeklindedir.

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

olduğundan (2.19) denklemi tam değildir.

$\mu = x^2y$ olsun. O zaman (2.18)'e karşılık olan denklem

$$(3x^2y^2 + 4x^3y^3)dx + (2x^3y + 3x^4y^2)dy = 0$$

olur.

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = 6x^2y + 12x^3y^2 = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

olduğundan bu denklem tamdır ve $\mu = x^2y$, (2.19) denkleminin bir integrasyon çarpanıdır.

Şimdi şu soru ortaya çıkıyor: İntegrasyon çarpanı nasıl bulunur? Bu soruya burada cevap vermeğe kalkışmayacağız. Onun yerine 2.2 kesiminde ayırılabilen denklemleri, 2.3 kesiminde de lineer denklemleri incelemek üzere yolumuza devam edeceğiz. Bunlardan birincilerin kolayca görülebilen, ikincilerin de özel türde integrasyon çarpanlarına sahip olduklarını bulacağız. 2.4 kesiminde yukarıdaki soruya yeniden döneceğiz. Buradaki amacımız sadece kavramı tanıtmaktı.

ALIŞTIRMALAR

1.'den 10.'ya kadar problemlerde denklemlerin tam olup olmadıklarını araştırınız, tam olanları çözünüz.

1. $(3x + 2y)dx + (2x + y)dy = 0$
2. $(y^2 + 3)dx + (2xy - 4)dy = 0$

3. $(2xy+1)dx+(x^2+4y)dy=0$
4. $(3x^2y+2)dx-(x^3+y)dy=0$
5. $(6xy+2y^2-5)dx+(3x^2+4xy-6)dy=0$
6. $(\theta^2+1)\cos r dr+2\theta\sin r d\theta=0$
7. $(ysec^2\, x+sec\, x\tan x)dx+(\tan x+2y)dy=0$
8. $\left(\frac{x}{y^2}+x\right)dx+\left(\frac{x^2}{y^3}+y\right)dy=0$
9. $\left(\frac{2s-1}{t}\right)ds+\left(\frac{s-s^2}{t^2}\right)dt=0$
10. $\frac{2y^{3/2}+1}{x^{1/2}}dx+(3x^{1/2}y^{1/2}-1)dy=0$

11.'den 14.'e kadar başlangıç değer problemlerini çözünüz:

11. $\begin{cases}(2xy-3)dx+(x^2+4y)dy=0\\ y(1)=2\end{cases}$

12. $\begin{cases}(2y\sin x\cos x+y^2\sin x)dx+(\sin^2 x-2y\cos x)dy=0\\ y(0)=3\end{cases}$

13. $\begin{cases}\left(\frac{3-y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{y^2-2x}{xy^2}\right)dy=0\\ y(-1)=2\end{cases}$

14. $\begin{cases}\frac{1-y^{2/3}}{x^{2/3}y^{1/3}}dx+\frac{2x^{4/3}y^{2/3}-x^{1/3}}{y^{4/3}}dy=0\\ y(1)=8\end{cases}$

15. A sabitini aşağıdaki denklemler tam olacak şekilde hesaplayınız ve sonuçta elde edilen tam denklemleri çözünüz.

(a) $(2xy+1)dx+(Ax^2+4y)dy=0$

(b) $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^y}\right)dx+\left(\frac{Ax+1}{y^3}\right)dy=0$

16. Aşağıdaki problemlerden herbirinde, bu denklemler tam olacak şekilde en genel $N(x,y)$ fonksiyonunu hesaplayınız .

(a) $(x^3+xy^2)dx+N(x,y)dy=0$

(b) $(x^{-2}y^{-2}+xy^{-3})dx+N(x,y)dy=0$

17. $(4x+3y^2)dx+2xydy=0$ diferansiyel denklemini gözönüne alınız:

(a) Bu denklemin tam olmadığını gösteriniz.

(b) n bir pozitif tamsayı olmak üzere x^n şeklinde bir integrasyon çarpanını bulunuz.

(c) Denklemi (b)'de bulduğunuz integrasyon çarpanı ile çarpıp sonuçta elde edilen tam diferansiyel denklemi çözünüz.

18. $[y + xf(x^2 + y^2)]dx + [yf(x^2 + y^2) - x]dy = 0$ şeklindeki diferansiyel denklemi gözönüne alınız:
(a) Bu şekildeki denklemlerin tam olmadığını gösteriniz.
(b) $1/(x^2 + y^2)$'nin bu tür denklemler için bir integrasyon çarpanı olduğunu gösteriniz.

19. $[y+x(x^2+y^2)^2]dx+[y(x^2+y^2)^2-x]dy = 0$ denklemini çözmek için 18(b)'deki sonucu kullanınız.

EK ALIŞTIRMALAR

A) Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin tam olduklarını gösteriniz ve çözümlerini bulunuz.

1. $(y^2 - 1)dx + (2xy - \sin y)dy = 0$
2. $(2xy + x^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$
3. $(3x^2 - 6xy)dx - (3x^2 + 2y)dy = 0$
4. $(x\sqrt{x^2 + y^2} + y)dx + (y\sqrt{x^2 + y^2} + x)dy = 0$
5. $(2xy^4 + \sin y)dx + (4x^2y^3 - x\cos y)dy = 0$
6. $y^2dx - (2 + 3y^2 - 2xy)dy = 0$
7. $(2x + \cosh xy)dx + [(xy\cosh xy - \sinh xy)/y^2]dy = 0$
8. $(2xy + e^y)dx + (x^2 + xe^y)dy = 0$
9. $(1 + \ln(xy))dx + (1 + \frac{x}{y})dy = 0$
10. $(\sin y - y\sin xy)dx + (x\cos y - x\sin xy)dy = 0$

B) Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözünüz.

1. $(2xy - 1)dx + x^2dy = 0, \quad y(1) = 2$
2. $(2xy + e^y)dx + (x^2 + xe^y)dy = 0, \quad y(1) = \ln 2$
3. $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0, \quad y(2) = 3$
4. $(x^2 + y^2)y' + (2xy + 1) = 0, \quad y(2) = -2$
5. $\tan y + \frac{y}{1+x^2} = (2\arctan y - \arctan x - x\sec^2 y)y', \quad y(0) = 1$

2.2 Ayrilabilen Denklemler

A. Ayrılabilen Denklemler

TANIM.

$$F(x)G(y)dx + f(x)g(y)dy = 0 \tag{2.17}$$

şeklindeki denkleme, *değişkenleri ayrılabilen denklem* ya da kısaca ayrılabilen denklem denir.

Mesela $(x^3 + x^2)y\ dx + x^2(y^3 + 2y)dy = 0$ ayrılabilen denklemdir. (2.17)'deki ayrılabilen denklem genel olarak tam değildir. Ancak $1/f(x)G(y)$ gibi bir integrasyon çarpanı olduğu kolayca görülebilir. (2.17)'yi bu ifade ile çarparsak, değişkenler ayrılarak

$$\frac{F(x)}{f(x)}dx + \frac{g(y)}{G(y)}dy = 0 \tag{2.18}$$

eşdeğer denklemi elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{F(x)}{f(x)}\right] = 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{g(y)}{G(y)}\right]$$

olduğundan bu denklem tamdır.

$$\frac{F(x)}{f(x)} = M(x), \quad \frac{g(y)}{G(y)} = N(y)$$

dersek, (2.18) denklemi $M(x)dx + N(y)dy = 0$ halini alır. M sadece x'in, N de sadece y'nin fonksiyonu olduğundan çözümün, c bir keyfî sabit olmak üzere

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c \tag{2.19}$$

olduğu hemen görülür. Böylece (2.17) ayrılabilen denklemini çözme problemi, (2.19)'daki integralleri hesaplama problemine dönüşmüş olur. Bu bakımdan ayrılabilen denklemler, en basit birinci basamak diferansiyel denklemlerdir.

Örnek 2.13. $(x^3 + x^2)y\ dx + x^2(y^3 + 2y)dy = 0$. Denklemi x^2y'ye bölerek değişkenlerini ayırabiliriz. O zaman

$$\frac{x^3 + x^2}{x^2}dx + \frac{y^3 + 2y}{y}dy = 0$$

ya da

$$(x+1)dx + (y^2+2)dy = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$\int (x+1)dx + \int (y^2+2)dy = c$$

ve sonuç olarak

$$\frac{x^2}{2} + x + \frac{y^3}{3} + 2y = c$$

bulunur.

Değişkenleri ayırmak için denklemi x^2y'ye böldüğümüze dikkat edin. Bu işi yaparken $x, y \neq 0$ kabul ettik. Burada ayrılabilen denklemleri çözme alışkanlığı kazanmağa çalıştığımızdan, bölen ifadelerin sıfırdan farklı olduklarını daima varsayacağız.

Örnek 2.14.

$$x \sin y \; dx + (x^2+1)\cos y \; dy = 0 \tag{2.20}$$

denklemi ile

$$y(1) = \frac{\pi}{2} \tag{2.21}$$

başlangıç şartından oluşan başlangıç değer problemini çözünüz.

Önce (2.20) diferansiyel denkleminin genel çözümünü elde ederiz. Denklemi $(x^2+1)\sin y$ ile bölerek değişkenleri ayırırız:

$$\frac{x}{x^2+1}dx + \frac{\cos y}{\sin y}dy = 0$$

Böylece c_0 bir sabit olmak üzere

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{\cos y}{\sin y}dy = c_0$$

elde edilir. İntegraller hesaplanırsa

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln|\sin y| = c_0 \tag{2.22}$$

bulunur. Genel çözümü bu halde bırakabiliriz. Ancak onu aşağıdaki işlemleri yaparak daha temiz hale de getirebiliriz: Sol taraftaki terimler logaritmik olduğundan, c_0 keyf^ı sabitini $\ln|c_1|$ şeklinde yazarak bir şeyler yapılabilir. O zaman

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\ln|\sin y| = \ln|c_1|$$

elde edilir. İki yanı 2 ile çarparak

$$\ln(x^2+1)+2\ln|\sin y| = 2\ln|c_1|$$

ve $|c| = c_1^2$ olmak üzere

$$2\ln|\sin y| = \ln(\sin y)^2, \quad 2\ln|c_1| = \ln(c_1)^2 = \ln|c|$$

olduklarını hatırlayarak

$$\ln(x^2+1)+\ln\sin^2 y = \ln|c|$$

elde ederiz. $\ln A + \ln B = \ln AB$ olduğundan bu son ifadeden

$$\ln[(x^2+1)\sin^2 y] = \ln|c|$$

ve buradan da

$$(x^2+1)\sin^2 y = c \tag{2.23}$$

elde ederiz. (2.23)'ün, (2.22)'ye göre daha düzenli olduğu görülmektedir.

Şimdi (2.23)'e, (2.21) başlangıç şartını uygulayacağız. O zaman

$$(1^2+1)\sin^2\frac{\pi}{2} = c$$

elde ederiz. Demek ki $c = 2$ olmalıdır. Böylece verilen başlangıç değer probleminin çözümü

$$(x^2+1)\sin^2 y = 2$$

olur.

Örnek 2.15. $y' + 4x + \frac{\sin x}{x} = 6y^2 y' \cos y^3 - \frac{1}{1+x^2}$ diferansiyel denklemini diferansiyel formda yazarsak biraz cebirsel işlemle:

$$\left(4x + \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \left(6y^2\cos y^3 - 1\right)dy$$

elde edilir ki integrasyonla, verilen denklemin bir genel çözümü olarak:

$$2x^2 + \arctan x + \int \frac{\sin x}{x} dx = 2 \sin y^3 - y + c$$

elde edilir. Buradaki integral, bilinen fonksiyonlar cinsinden yazmak mümkün olmadığından, yerinde bırakılmıştır.

Örnek 2.16. f ve g herhangi bir değişkenli fonksiyonlar olmak üzere

$$yf(xy)\, dx + xg(xy)\, dy = 0$$

denklemi, $xy = v$ bağımlı değişken dönüşümü ile ayrılabilen denklem haline getirilebilir.

Gerçekten verilen dönüşümden $ydx + xdy = dv$, $\quad x^2dy = xdv - vdx$ bulunur. Bunlar denklemde yerlerine konduğunda

$$vf(v)dx + (xdv - vdx)g(v) = 0$$

ve buradan da

$$v[f(v) - g(v)]dx + xg(v)dv = 0 \text{ ya da } \frac{dx}{x} + \frac{g(v)dv}{v[f(v) - g(v)]} = 0$$

ayrılabilen denklemi elde edilir.

Örnek 2.17. $y(xy + 1)dx + x(1 + xy + x^2y^2)dy = 0$ diferansiyel denklemini ele alalım. $xy = v$ bağımlı değişken dönüşümü

$$ydx + xdy = dv \quad \to x^2dy = xdv - vdx$$

olmasını gerektirir. Bunlar x ile çarpılmış

$$xy(xy + 1)dx + (1 + xy + x^2y^2)x^2dy = 0$$

diferansiyel denkleminde yerlerine konduğunda

$$v(v+1)dx + (1+v+v^2)(xdv - vdx) = 0 \text{ ya da } -v^3dx + x(1+v+v^2)dv = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem

$$\frac{dx}{x} - \left(\frac{1}{v^3} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v}\right) dv = 0$$

şeklinde ayrılabilir ki integrasyonla

$$\frac{1}{2v^2} + \frac{1}{v} = \ln v - \ln x + \ln c$$

ve $v = xy$ olduğu hatırlanarak

$$\frac{1}{2x^2y^2} + \frac{1}{xy} = \ln(cy)$$

bulunur.

B. Homojen Denklemler

TANIM. $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ şeklinde yazıldığında bir g fonksiyonu $f(x,y) = g(\frac{y}{x})$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ birinci basamak diferansiyel denklemine *homojen diferansiyel denklem* ya da kısaca homojen denklem denir.

Örnek 2.18. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xy\, dy = 0$ denklemi homojendir. Bunu görmek için önce denklemi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 3y^2}{2xy}$$

şeklinde yeniden yazalım. Şimdi

$$\frac{x^2 - 3y^2}{2xy} = \frac{3y}{2x} - \frac{x}{2y} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{y}{x}}\right),$$

olduğunu gözlersek verilen diferansiyel denklemin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{y}{x}}\right)$$

şeklinde yazılabileceğini görürüz. Burada artık sol taraf bir g fonksiyonu için $g\left(\frac{y}{x}\right)$ biçimindedir.

Örnek 2.19.

$$\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx - x\, dy = 0$$

denklemi homojendir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

şeklinde yazılınca sağ taraf x'in işaretine bağlı olarak

$$\frac{y}{x} \mp \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2}} \quad \text{veya} \quad \frac{y}{x} \mp \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

haline gelir. Bunun $g\left(\frac{y}{x}\right)$ biçiminde olduğu ise bellidir.

Homojen denklemlerin çözümlerine başlamadan önce, böyle denklemleri tanımak için biraz farklı bir yöntem vereceğiz. $F(tx, ty) = t^n F(x, y)$ ise, $F(x, y)$ fonksiyonu *n. dereceden homojen*'dir denir. Bunun anlamı, $F(x, y)$ fonksiyonunda x yerine tx, y yerine ty konulunca t^n parantez dışına alınabilecek ve parantez içinde başlangıçtaki $F(x, y)$ fonksiyonu kalacak demektir. Mesela $F(x, y) = x^2 + y^2$ ile verilen fonksiyon 2. dereceden homojendir. Çünkü

$$F(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2 F(x, y)$$

olur.

Şimdi $Mdx + Ndy = 0$ diferansiyel denklemindeki M ve N fonksiyonlarının ikisinin de aynı n. dereceden homojen olduklarını varsayalım. $M(tx, ty) = t^n M(x, y)$ olduğundan

$$M\left(1, \frac{y}{x}\right) = M\left(\frac{1}{x}x, \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^n M(x, y)$$

ve

$$N\left(1, \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^n N(x, y)$$

elde ederiz. Şimdi $Mdx + Ndy = 0$ diferansiyel denklemini

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

şeklinde yeniden yazarsak

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{-n} M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{-n} N\left(1, \frac{y}{x}\right)} = -\frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)}$$

buluruz. Bunun $g\left(\frac{y}{x}\right)$ biçiminde olduğu ise bellidir. Buradan $Mdx + Ndy = 0$ denklemi ilk homojenlik tanımına göre de homojendir. Böylece $Mdx + Ndy = 0$ denklemindeki M ve N fonksiyonları aynı n. dereceden homojen fonksiyonlarsa, bu denklemin bir homojen denklem olduğu anlaşılır.

Şimdi 2.10 ve 2.11 örneklerini bu bulgular ışığında yeniden ele alalım. 2.10 örneğinde $M = x^2 - 3y^2$, $N = 2xy$'dir. Burada M ve N aynı ikinci dereceden homojen fonksiyonlardır. Böylece $(x^2 - 3y^2)dx + 2xy\ dy = 0$ denkleminin homojen olduğunu hemen söyleyebiliriz. 2.11 örneğinde

$$M = y + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad N = -x$$

olmaktadır. N'nin birinci dereceden homojen bir fonksiyon olduğu bellidir.

$$M(tx, ty) = ty + \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} = t(y + \sqrt{x^2 + y^2}) = t^1 M(x, y)$$

olduğundan M de birinci dereceden homojen bir fonksiyondur. Böylece

$$\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx - x\ dy = 0$$

denkleminin homojen olduğunu görürüz.

Şimdi aşağıdaki teoremi ispat ederek her homojen denklemin ayrılabilen bir denklem olduğunu göstereceğiz.

TEOREM 2.3.

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{2.24}$$

denklemi homojen bir denklem ise, $y = vx$ değişken dönüşümü (2.24) denklemini v ve x değişkeni cinsinden ayrılabilen bir denkleme dönüştürür.

İspat. $Mdx + Ndy = 0$ denklemi homojen olduğundan onu

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

şeklinde yazmak mümkündür. $y = vx$ diyelim, o zaman

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

olur ki (2.24) denkleminden

$$v + x\frac{dv}{dx} = g(v)$$

veya

$$[v - g(v)]dx + xdv = 0$$

elde edilir. Bu denklem ayrılabilendir. Değişkenleri ayırarak

$$\frac{dv}{v - g(v)} + \frac{dx}{x} = 0 \tag{2.25}$$

bulunur. Böylece ispat da biter.

(2.24) şeklinde bir homojen diferansiyel denklemi çözmek için, $y = vx$ yazar ve homojen denklemi, (2.25) şeklinde ayrılabilen bir denkleme dönüştürürüz. Buradan da c bir keyfˆı sabit olmak üzere

$$\int \frac{dv}{v - g(v)} + \int \frac{dx}{x} = c$$

elde edilir.

$$F(v) = \int \frac{dv}{v - g(v)}$$

olsun. Eski bağlı değişken y'ye dönersek çözüm:

$$F\left(\frac{y}{x}\right) + \ln|x| = c$$

şeklini alır.

Örnek 2.20.

$$(x^3 - 3y^2)dx + 2xy\ dy = 0$$

denklemini çözünüz.

Bu denklemin homojen olduğunu daha önce görmüştük. Onu

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} + \frac{3y}{2x}$$

şeklinde yazalım ve $y = vx$ diyelim, o zaman

$$v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2v} + \frac{3v}{2}$$

veya

$$x\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2v} + \frac{v}{2}$$

veya sonuç olarak

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v}$$

bulunur. Bu denklem ayrılabilendir. Değişkenlerini ayırarak

$$\frac{2v\ dv}{v^2 - 1} = \frac{dx}{x}$$

bulunur. İntegre ederek

$$\ln|v^2 - 1| = \ln|x| + \ln|c| \quad \text{ve} \quad v^2 - 1 = cx$$

elde edilir. Şimdi v yerine $\frac{y}{x}$ konularak çözüm

$$\frac{y^2}{x^2} - 1 = cx \quad \text{veya} \quad y^2 - x^2 = cx^3$$

olarak bulunur.

Örnek 2.21. $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx - x\ dy = 0,\ y(1) = 0$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Bu denklemin homojen olduğunu daha önce görmüştük. Onu daha önce olduğu gibi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

şeklinde yazalım. Başlangıçtaki x değeri 1 olduğundan $\sqrt{x^2} = x$ alalım. O zaman

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

elde ederiz. $y = vx$ diyelim, o zaman denklemimiz

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \sqrt{1 + v^2} \quad \text{veya} \quad x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1 + v^2}$$

haline gelir. Değişkenleri ayırarak

$$\frac{dv}{\sqrt{v^2 + 1}} = \frac{dx}{x}$$

bulunur. Bunu integral tabloları yardımıyla integre ederek

$$\ln|v + \sqrt{v^2 + 1}| = \ln|x| + \ln|c| \quad \text{veya} \quad v + \sqrt{v^2 + 1} = cx$$

elde ederiz. Şimdi v yerine $\frac{y}{x}$ konularak çözüm

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = cx$$

veya

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$$

olarak bulunur.

Başlangıç şartı $x = 1$'de $y = 0$ olmasını istemektedir. O zaman $c = 1$ olur ve başlangıç değer probleminin çözümü,

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2$$

ve buradan da

$$y = \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)$$

olur.

C. Homojen Denklemlerin İntegrasyon çarpanları

LEMA 2.1. *Homojen fonksiyonlar hakkında Euler teoremi* $F(x, y)$ birinci basamaktan sürekli kısmˆı türevlere sahip n. dereceden homojen bir fonksiyon ise,

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = n.F$$

olur.

İspat. F fonksiyonu n. dereceden homojen olduğundan onu

$$F(x, y) = x^n F\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi teoremde adı geçen türevleri hesaplarsak, $F^{(1)}$ ve $F^{(2)}$, F fonksiyonunun birinci ve ikinci değişkenlerine göre türevlerini göstermek üzere

$$x\frac{\partial F}{\partial x} = x\frac{\partial}{\partial x}\left[x^n F\left(1, \frac{y}{x}\right)\right] =$$

$$nx^n F\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^{n+1}\left(F^{(1)}.0 + F^{(2)}.\frac{-y}{x^2}\right) = nF - yx^{n-1}F^{(2)}$$

ve

$$y\frac{\partial F}{\partial y} = y\frac{\partial}{\partial y}\left[x^n F\left(1, \frac{y}{x}\right)\right] = yx^n\left(F^{(1)}.0 + F^{(2)}.\frac{1}{x}\right) = yx^{n-1}F^{(2)}$$

bulunur ki bunların toplanmasıyla lemanın hükmü elde edilir.

LEMA 2.2. $Mdx + Ndy = 0$ denklemi homojen ise,

$$\frac{1}{xM + yN}$$

fonksiyonu bu denklem için bir integrasyon çarpanıdır.

İspat. $Mdx + Ndy = 0$ denklemini $1/(xM + yN)$ ile çarparsak

$$\tilde{M} = \frac{M}{xM + yN}, \quad \tilde{N} = \frac{N}{xM + yN}$$

olmak üzere

$$\tilde{M}dx + \tilde{N}dy = 0$$

denklemini elde ederiz.

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{(xM + yN)\frac{\partial M}{\partial y} - M(x\frac{\partial M}{\partial y} + N + y\frac{\partial N}{\partial y})}{(xM + yN)^2}$$

ve

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = \frac{(xM + yN)\frac{\partial N}{\partial x} - N(x\frac{\partial M}{\partial x} + M + y\frac{\partial N}{\partial x})}{(xM + yN)^2}$$

olduğundan Euler teoreminin de kullanılmasıyla

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = \frac{N\left(x\frac{\partial M}{\partial x} + y\frac{\partial M}{\partial y}\right) - M\left(x\frac{\partial x}{\partial x} + y\frac{\partial N}{\partial y}\right)}{(xM + yN)^2} =$$

$$\frac{N.nM - M.nN}{(xM + yN)^2} = 0$$

elde edilir. Demek ki $\tilde{M}dx + \tilde{N}dy = 0$ denklemi tamdır. Böylece lemanın ispatı tamamlanmış olur.

Örnek 2.22.

$$(3x^2y + y^3)dx + (xy^2 - x^3)dy = 0$$

denklemini çözünüz.

Bu denklemde $M = 3x^2y + y^3$ ve $N = xy^2 - x^3$ fonksiyonlarının ikisi de 3. dereceden homojen fonksiyonlardır. O halde

$$\frac{1}{xM + yN} = \frac{1}{2(x^3y + xy^3)}$$

fonksiyonu bu denklem için bir integrasyon çarpanıdır. Verilen denklemi bu integrasyon çarpanı ile çarparsak,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3x^2y + y^3}{x^3y + xy^3}dx + \frac{xy^2 - x^3}{x^3y + xy^3}dy\right) = 0$$

elde ederiz. Terimlerin yeniden guruplanmasıyla

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3x^2y+y^3}{x^3y+xy^3}dx+\frac{x^3+3xy^2}{x^3y+xy^3}dy\right)-\frac{xy^2+x^3}{x^3y+xy^3}dy=0$$

ve buradan da c bir keyf\^ı sabit olmak üzere

$$\frac{1}{2}d\ \ln|x^3y+xy^3|-d\ \ln|y|=\frac{1}{2}d\ \ln|c|$$

olur ki, verilen denklemin genel çözümü

$$\frac{x^3}{y}+xy=c \quad \text{veya} \quad x^3+xy^2-cy=0$$

olarak bulunur.

Örnek 2.23. $(x^2+3y^2)dx-2xydy=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Bu denklemden

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+3y^2}{2xy}$$

bulunur ki, payı ve paydayı x^2'ye bölmekle

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

elde edilir. Bu homojen denklem, homojen denklemler için daha önce anlatılan yöntemlerle çözülebilir.

Örnek 2.24.

$$y^2dx+(x^2-xy-y^2)dy=0$$

denklemini çözünüz.

Bu denklemde $M=y^2$ ve $N=x^2-xy-y^2$ fonksiyonlarının ikisi de 2. dereceden homojen fonksiyonlardır. O halde

$$\frac{1}{xM+yN}=\frac{1}{x^2y-y^3}$$

fonksiyonu bu denklem için bir integrasyon çarpanıdır. Verilen denklemi bu integrasyon çarpanı ile çarparsak,

$$\frac{y^2}{x^2y-y^3}dx+\frac{x^2-xy-y^2}{x^2y-y^3}dy=0$$

elde ederiz. Terimlerin yeniden guruplanmasıyla

$$\frac{ydx-xdy}{x^2-y^2}+\frac{1}{y}dy=0$$

ve buradan da c bir keyf̂ı sabit olmak üzere

$$\frac{1}{2}d\ \ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|+d\ \ln|y|=\frac{1}{2}d\ \ln|c|$$

olur ki, verilen denklemin genel çözümü

$$y^2(x-y)-c(x+y)=0$$

olarak bulunur.

D. Homojen Hale Getirilebilen Denklemler

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathcal{R}$ sabitler olmak üzere

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$$

tipindeki denklemler, uygun bir dönüşümle homojen hale getirilebilir. Bu konuyla alakalı olarak şu teoremi verebiliriz:

TEOREM. $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ sabitler olmak üzere

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$$

diferansiyel denklemini gözönüne alalım.

1. Hal $\frac{a_2}{a_1}\neq\frac{b_2}{b_1}$ ise (h,k),

$$\begin{aligned} a_1h+b_1k+c_1&=0\\ a_2h+b_2k+c_2&=0 \end{aligned}$$

sisteminin çözümü olmak üzere

$$x = X + h, \quad y = Y + k$$

dönüşümü yukarıdaki denklemi X, Y cinsinden

$$(a_1X + b_1Y)dx + (a_2X + b_2Y)dy = 0$$

homojen denklemi haline getirir.

2. Hal $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$ ise $z = a_1x + b_1y$ dönüşümü, yukarıdaki denklemi x, z cinsinden ayrılabilen bir denkleme dönüştürür.

Örnek 2.25.$(x - 2y + 1)dx + (4x - 3y - 6)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Burada $a_1 = 1,\ b_1 = -2,\ a_2 = 4,\ b_2 = -3$ olduğundan $\frac{a_2}{a_1} = 4 \neq \frac{b_2}{b_1} = \frac{3}{2}$'dir. Teoremin 1. haline göre (h, k)

$$\begin{aligned} h - 2k + 1 &= 0 \\ 4h - 3k - 6 &= 0 \end{aligned}$$

sisteminin çözümü olmak üzere

$$\begin{aligned} x &= X + h \\ y &= Y + k \end{aligned}$$

dönüşümü yapacağız. Bu sistemin çözümü $h = 3,\ k = 2$ ve dönüşüm

$$\begin{aligned} x &= X + 3 \\ y &= Y + 2 \end{aligned}$$

olacaktır. Bu dönüşüm verilen denklemi

$$(X - 2Y)dX + (4X - 3Y)dY = 0$$

homojen denklemi haline getirir. $Y = vX$ bağımlı değişken dönüşümü bu denklemi X, v cinsinden

$$\frac{(3v - 4)dv}{3v^2 - 2v - 1} = -\frac{dX}{X}$$

ayrılabilen denklemi haline getirir ki çözümü

$$X^4(3v+1)^5 = c(v-1)$$

olur ve geri dönüşümler yapıldığında verilen denklemin genel çözümü

$$(x+3y-9)^5 = c(y-x+1)$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.26. $(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Burada $a_1 = 1,\ b_1 = 2,\ a_2 = 2,\ b_2 = 4$ olduğundan $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = 2$ olmaktadır. Teoremin 2. haline göre

$$z = x + 2y$$

dönüşümü yapar ve verilen denklemi

$$(z+3)dx + \frac{1}{2}(2z-1)(dz-dx) = 0$$

veya

$$7dx + (2z-1)dz = 0$$

ayrılabilen denklemi haline getiririz. Bunun integrasyonu ile

$$7x + z^2 - z = c$$

ve $z = x + 2y$ konularak

$$7x + (x+2y)^2 - (x+2y) = c$$

veya

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x - 2y = c$$

bulunur.

Örnek 2.27. $(2x-y-3)dx + (x+3y-5)dy = 0$ denklemini homojen hale getiriniz.

$\xi = x-2, \quad \eta = y-1$ dönüşümü yapılırsa bu diferansiyel denklemin

$$(2\xi - \eta)d\xi + (\xi + 3\eta)d\eta = 0$$

homojen denklemi haline geldiği görülür.

Örnek 2.28. $(3x - y + 1)dx + (x - 3y + 2)dy = 0$ denklemini homojen hale getiriniz.

$\xi = x+\frac{1}{4}, \quad \eta = y-\frac{1}{4}$ dönüşümü yapılırsa bu diferansiyel denklemin

$$(3\xi - \eta)d\xi + (\xi - 3\eta)d\eta = 0$$

homojen denklemi haline geldiği görülür.

ALIŞTIRMALAR

1.'den 14.'ye kadar problemlerdeki diferansiyel denklemleri çözünüz.

1. $4xy\ dx + (x^2 + 1)dy = 0$
2. $(xy + 2x + y + 2)dx + (x^2 + 2x)dy = 0$
3. $2r(s^2 + 1)dr + (r^4 + 1)ds = 0$
4. $cosec\ y\ dx + sec\ x\ dy = 0$
5. $\tan\theta\ dr + 2r\ d\theta = 0$
6. $(e^v + 1)\cos u du + e^v(\sin u + 1)dv = 0$
7. $(x + 4)(y^2 + 1)dx + y(x^2 + 3x + 2)dy = 0$
8. $(x + y)dx - x\ dy = 0$
9. $(2xy + 3y^2)dx - (2xy + x^2)dy = 0$
10. $v^3du + (u^3 - uv^2)dv = 0$
11. $x(\tan(y/x) + y)dx - x\ dy = 0$
12. $(2s^2 + 2st + t^2)ds + (s^2 + 2st - t^2)dt = 0$
13. $(x^3 + y^2\sqrt{x^2 + y^2})dx - xy\sqrt{x^2 + y^2}dy = 0$
14. a. $(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y})dx + (\sqrt{x-y} - \sqrt{x+y})dy = 0$

b. $y(1 - xy)dx - x(1 + xy)dy = 0$

c. $y(1 - xy + x^2y^2)dx + x(xy - x^2y^2)dy = 0$

15.'den 20.'e kadar problemlerdeki başlangıç değer problemlerini çözünüz.

15. $(y+2)dx + y(x+4)dy = 0, \quad y(-3) = -1$

16. $8\cos^2 y\ dx + cosec^2 x\ dy = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{4}$

17. $(3x+8)(y^2+4)dx - 4y(x^2+5x+6)dy = 0, \quad y(1) = 2$

18. $(x^2+3y^2)dx - 2xy\ dy = 0, \quad y(2) = 6$

19. $(2x-5)dx + (4x-y)dy = 0, \quad y(1) = 4$

20. $(3x^2+9xy+5y^2)dx - (6x^2+4xy)dy = 0, \quad y(2) = -6$

21. $(Ax^2+By^2)dx + (Cx^2+Dy^2)dy = 0$ homojen denkleminin tam olması için gerek ve yeter koşulun $2B = C$ olduğunu gösteriniz.

22. $(x^2+2y^2)dx + (4xy - y2)dy = 0$ denklemini iki yöntemle çözünüz.

23. (a) $Mdx + Ndy = 0$ homojen denklem ise, $x = uy$ dönüşümünün bu denklemi u ve x değişkenleri cinsinden ayrılabilen bir denkleme dönüştüreceğini gösteriniz.

(b) (a) şıkkının sonucunu metindeki 2.20 örneğini çözmede kullanınız.

(c) (a) şıkkının sonucunu metindeki 2.21 örneğini çözmede kullanınız.

24. $Mdx + Ndy = 0$ homojen denklem ise, $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$ dönüşümünün bu denklemi r ve θ değişkenleri cinsinden ayrılabilen bir denkleme dönüştüreceğini gösteriniz.

25.

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{A}$$

denkleminin homojen olduğunu kabul edelim.

(a) (A) denkleminin, k bir sabit olmak üzere

$$x = k\xi, \quad y = k\eta \tag{B}$$

dönüşümü altında değişmediğini gösteriniz.

(b) (A) denkleminin genel çözümünün, c bir keyfî sabit , ϕ de keyfî bir fonksiyon olmak üzere

$$x = c\phi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{C}$$

şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

(c) (b) şıkkının sonucunu, (C)'deki genel çözümün (B) dönüşümü altında değişmeyeceğini göstermede kullanınız.

(d) (a) ve (c)'de kanıtlanan sonuçları geometrik olarak yorumlayınız.

Aşağıdaki birinci basamak diferansiyel denklemleri homojen hale getirerek çözünüz.

26. $(2x-y-3)dx+(x+3y-5)dy=0$
27. $(3x-y+1)dx+(x-3y+2)dy=0$
28. $(2x-5y+3)dx-(2x+4y-6)dy=0$
29. $(x-y-1)dx+(x+4y-1)dy=0$
30. $(5x+2y+1)dx+(2x+y+1)dy=0$
31. $(3x-y+1)dx-(6x-2y-3)dy=0$
32. $(x-2y-3)dx+(2x+y-1)dy=0$

Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözünüz.

32.
$$\begin{cases} (6x+4y+1)dx+(4x+2y+2)dy=0 \\ y\left(\frac{1}{2}\right)=3 \end{cases}$$

33.
$$\begin{cases} (3x-y-6)dx+(x+y+2)dy=0 \\ y(2)=-2 \end{cases}$$

32.
$$\begin{cases} (2x+3y+1)dx+(4x+6y+1)dy=0 \\ y(-2)=2 \end{cases}$$

EK ALIŞTIRMALAR

A) Aşağıdaki ayrılabilen diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulunuz.

1. $y'=2xy$
2. $2y\cos x dx=\sin x dy$
3. $y'=3x^2(1+y^2)$
4. $3ydx=xdy$
5. $2(xy+x)y'=y$
6. $(y^2-3y+2)dx=xdy$
7. $(y+x^y)dy=(xy^2-x)dx$
8. $ydx-xdy=x(dy-ydx)$
9. $yy'=2(xy+x)$
10. $dx+ydy=x^ydy$

11. $(ye^{x+y}dy = dx$
12. $xe^{x^2+y}dx = ydy$
13. $y' = \frac{(y+1)^2}{(x+1)^2}$
14. $y' = \frac{2(y^2+y-2)}{x^2+4x+3}$
15. $y' + y^2 \sin x = 0$
16. $xdx + \cot xdy = 0$
17. $(xy^2 + 3xy)dx - dy = 0$
18. $(2\sin^2 3x + 1 + \cos 6x)dx - 2dy = 0$
19. $2y' - y^3 \cos x = 0$
20. $2x \cos ydx + x^2(\sec y - \sin y)dy = 0$
21. $y'' + y'^2 + 1 = 0$
22. $xy'' = y'$
23. $yy'' = y'^2$

Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözünüz.

24. $2xydx + (1+y)dy = 0, \quad y(2) = 1$
25. $y' + y^2 \sin x = 0, \; y(0) = 0$
26 $2xy' + y = 0, \quad y(4) = 1$
27. $y' + 2y = 0, \quad y(0) = 100$
28. $2xdx - dy = x(xdy - 2ydx), \quad y(-3) = 1$
29. $dy = x(2ydx - xdy), \; y(1) = 4$

B) Aşağıdaki homojen diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

1. $(x^2 + y^2)dx = 2xydy$
2. $2xy' = y - xdy = 0$
3. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$
4. $x^2dy = (xy - y^2)dx$
5. $x^2y' = y^2 + 2xy$
6. $3xydx + (2y^2 - x^2)dy = 0$
7. $(x + y\cot \frac{x}{y})dy - ydx = 0$
8. $(xy + y^2)dx = (xy + y^2 + x^2)dy$
9. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y}$
10. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+3y}$
11. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{2x+y}$
12. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$

Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözünüz.

13. $x^2ydx = (x^3 - y^3)dy, \quad y(1) = 1$
14. $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad y(4) = 3$
15. $(2y^3 - x^3)dx = 3xy^2dy, \quad y(1) = 2$
16. $(x^4 + y^4)dx = 2x^3ydy, \quad y(1) = 0$
17. $y' = \sec \frac{y}{x} + \frac{y}{x}, \quad y(2) = \pi$
16. $(x^3 + y^3)dx = 2xy^2dy, \quad y(1) = 0$

2.3 Lineer Denklemler ve Bernoulli Denklemleri

A. Lineer Denklemler

1. Bölüm'de bütün diferansiyel denklemler için geçerli bir lineerlik tanımı vermiştik. şimdi birinci basamaktan lineer diferansiyel denklemleri inceleyeceğiz.

TANIM. Birinci basamaktan bir denklem

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.26}$$

şeklinde yazılabiliyorsa, *lineer*'dir denir.

Mesela

$$x\frac{dy}{dx} + (x+1)y = x^3$$

denklemi birinci basamaktan lineer bir denklemdir. çünkü

$$\frac{dy}{dx} + (1+\frac{1}{x})y = x^2$$

şeklinde yazılabilir ve $P(x) = 1 + \frac{1}{x}$, $Q(x) = x^2$ olmak üzere (2.26) yapısındadır.

Şimdi (2.26) denklemini

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0 \tag{2.27}$$

şeklinde yazalım. Bu denklem $M = P(x)y - Q(x)$ ve $N = 1$ olmak üzere

$$Mdx + Ndy = 0$$

şeklindedir.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

olduğundan $P(x) \equiv 0$ olmadıkça bu denklem tam değildir. Bu durumda (2.26) denklemi zaten basitleşerek ayrılabilen bir denklem haline gelir.

Halbuki (2.27) denkleminin sadece x'e bağlı bir integrasyon çarpanı vardır ve kolayca bulunabilir. Şimdi bu integrasyon çarpanını bulmak için denklemi $\mu(x)$ ile çarparak

$$[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)]dx + \mu(x)dy = 0 \tag{2.28}$$

elde ederiz. Tanıma göre $\mu(x)$'in bir integrasyon çarpanı olması için gerek ve yeter koşul, (2.28)'in tam yani,

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)]$$

olmasıdır. Bu şart basitleşerek

$$\mu(x)P(x) = \frac{d}{dx}[\mu(x)]$$

ya da sadece

$$\mu P = \frac{d\mu}{dx} \tag{2.29}$$

olur. (2.29) denklemi, P bilinen bir fonksiyon olmak üzere μ bağlı değişkeni ve x bağımsız değişkeni cinsinden ayrılabilen denklemdir. Bu denklemin değişkenlerini ayırarak

$$\frac{d\mu}{\mu} = P\ dx$$

elde ederiz. Bunu integre ederek

$$\ln|\mu| = \int P\ dx \quad \text{veya} \quad \mu = e^{\int P\ dx} \tag{2.30}$$

özel çözümünü buluruz. Böylece (2.26) lineer denkleminin (2.30) şeklinde bir integrasyon çarpanı vardır. (2.26)'yı (2.30) ile çarparak

$$e^{\int P\ dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P\ dx}P(x)y = e^{\int P\ dx}Q(x) \tag{2.26}$$

elde edilir ki bu aslında

$$\frac{d}{dx}\left[y\ e^{\int P\ dx}\right] = e^{\int P\ dx}Q(x)$$

ifadesinden ibarettir. Bunu integre ederek (2.26)'nın çözümünü c bir keyfî sabit olmak üzere

$$y\, e^{\int P\, dx} = \int e^{\int P\, dx} Q(x)\, dx + c$$

şeklinde elde ederiz. Bu tartışmayı özetleyerek şu teoremi yazabiliriz:

TEOREM 2.4.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

lineer diferansiyel denkleminin

$$\mu = e^{\int P\, dx}$$

şeklinde bir integrasyon çarpanı vardır. Bu denklemin genel çözümü

$$y = e^{-\int P\, dx}\left[\int e^{\int P\, dx} Q(x)\, dx + c\right]$$

fonksiyonudur.

Şimdi bazı örneklere bakalım.

Örnek 2.29.

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x+1}{x}\right) y = e^{-2x} \tag{2.31}$$

lineer diferansiyel denklemini ele alalım. Burada

$$P(x) = \frac{2x+1}{x}$$

olduğundan integrasyon çarpanı

$$e^{\int P\, dx} = e^{\int \frac{2x+1}{x} dx} = e^{2x + \ln|x|} = e^{2x} e^{\ln|x|} = x e^{2x}$$

olarak bulunur. (2.31) denklemini bu integrasyon çarpanı ile baştan başa çarparak

$$x e^{2x} \frac{dy}{dx} + e^{2x}(2x+1)y = x$$

veya

$$\frac{d}{dx}\left[xe^{2x}y\right] = x$$

elde ederiz. Bunu integre ederek genel çözümü c bir keyfî sabit olmak üzere

$$xe^{2x}y = \frac{x^2}{2} + c$$

ya da

$$y = \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{c}{x}e^{-2x}$$

olarak buluruz.

Örnek 2.30.

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} + 4xy = x \tag{2.32}$$

diferansiyel denklemi ve

$$y(2) = 1 \tag{2.33}$$

başlangıç şartından oluşan başlangıç değer problemini çözünüz.

(2.32) diferansiyel denklemi (2.26) biçiminde değildir. Onu x^2+1'e bölerek

$$\frac{dy}{dx} + \frac{4x}{x^2+1}y = \frac{x}{x^2+1} \tag{2.34}$$

elde ederiz. Artık (2.34) denklemi, (2.26) alışılmış biçimindedir. Burada

$$P(x) = \frac{2x+1}{x} \quad \text{ve} \quad e^{\int P\,dx} = e^{\int \frac{4x}{x+1}dx} = e^{\ln\left[(x^2+1)^2\right]} = (x^2+1)^2$$

de integrasyon çarpanı olur. (2.34)'ün iki yanını bu integrasyon çarpanı ile çarparsak

$$(x^2+1)^2\frac{dy}{dx} + 4x(x^2+1)y = x(x^2+1)$$

ya da

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2+1)^2y\right] = x^3 + x$$

elde ederiz. Bunu integre ederek (2.32)'nin genel çözümünü, c bir keyfî sabit olmak üzere

$$(x^2+1)^2 y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + c$$

olarak buluruz. Şimdi buna (2.33) başlangıç şartını uygularsak $25 = 6 + c$ yani $c = 19$ elde ederiz. Böylece ele alınan başlangıç değer probleminin çözümü

$$(x^2+1)^2 y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 19$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.31.

$$y^2 dx + (3xy - 1)dy = 0 \tag{2.35}$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Buradan $\frac{dy}{dx}$'i çekersek

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-3xy}$$

bulunur ki, y'ye göre lineer *değildir.* (2.35) denklemi tam, ayrılabilen ya da homojen de değildir. Bu zamana kadar karşılaştıklarımızdan farklı bir tip gibi durmaktadır. Ancak daha yakından bakınca birinci basamak bir denklemde dx ve dy'nin rolleri daima değiştirilebildiğinden (2.35) denkleminin

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1-3xy}{y^2}$$

veya

$$\frac{dx}{dy} + \frac{3}{y}x = \frac{1}{y^2} \tag{2.36}$$

biçiminde yazılabileceğini görürüz. Şimdi (2.36) denklemi

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$$

şeklindedir ve x *cinsinden lineer*'dir. Böylece bu kısımda geliştirilen teori, sadece x ile y'nin rollerini değiştirerek (2.36)'ya uygulanabilir. Bu denkleme ait integrasyon çarpanı

$$e^{\int P\,dy} = e^{\int \frac{3}{y}dy} = e^{\ln(y^3)} = y^3$$

olarak bulunur. (2.36) denklemini bu integrasyon çarpanı ile baştan başa çarparak

$$y^3\frac{dx}{dy}+3y^2x=y \quad \text{veya} \quad \frac{d}{dy}\left[y^3x\right]=y$$

elde ederiz. Bunu integre ederek genel çözümü, c bir keyfî sabit olmak üzere

$$y^3x=\frac{y^2}{2}+c$$

ya da

$$x=\frac{1}{2y}+\frac{c}{y^3}$$

olarak buluruz.

Örnek 2.32.

$$\frac{dy}{dx}+\frac{3}{x}y=6x^2$$

lineer diferansiyel denkleminde $P(x)=\frac{3}{x}$, $Q(x)=6x^2$ olduğundan

$$\mu=e^{\int P\ dx}=e^{3\int\frac{dx}{x}}=x^3$$

şeklinde bir integrasyon çarpanı vardır. O zaman bu denklemin genel çözümü Teorem 2.4.'e göre;

$$y=e^{-\int P\ dx}\left[\int e^{\int P\ dx}Q(x)\ dx+c\right]=\frac{1}{x^3}\left[\int 6x^5\ dx+c\right]$$

fonksiyonudur. İntegraller hesaplanırsa genel çözüm

$$y=\frac{1}{x^3}\left(x^6+c\right) \quad \text{veya} \quad y=x^3+\frac{c}{x^3}$$

olarak bulunur.

Örnek 2.33.

$$x^4\frac{dy}{dx}+2x^3y=1$$

lineer diferansiyel denklemini yeniden

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\frac{1}{x^4}$$

olarak yazabiliriz. Bu denklemde $P(x) = \frac{2}{x}$, $Q(x) = \frac{1}{x^4}$ olduğundan

$$\mu = e^{\int P\,dx} = e^{2\int \frac{dx}{x}} = x^2$$

şeklinde bir integrasyon çarpanı vardır. O zaman bu denklemin genel çözümü Teorem 2.4.'e göre;

$$y = e^{-\int P\,dx}\left[\int e^{\int P\,dx} Q(x)\,dx + c\right] = \frac{1}{x^2}\left[\int x^{-2}\,dx + c\right]$$

fonksiyonudur. İntegraller hesaplanırsa genel çözüm

$$y = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{x} + c\right) \quad \text{veya} \quad y = -\frac{1}{x^3} + \frac{c}{x^2}$$

olarak bulunur.

Örnek 2.34. $x^2\frac{dy}{dx} + y = 1$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım.

Bu denklemi

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^2}$$

olarak yazabiliriz. Bu denklemde $P(x) = \frac{1}{x^2}$, $Q(x) = \frac{1}{x^2}$ olduğundan

$$\mu = e^{\int P\,dx} = e^{\int \frac{dx}{x^2}} = e^{-\frac{1}{x}}$$

şeklinde bir integrasyon çarpanı vardır. O zaman bu denklemin genel çözümü Teorem 2.4.'e göre;

$$y = e^{\frac{1}{x}}\left[\int \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\,dx + c\right]$$

fonksiyonudur. İntegraller hesaplanırsa genel çözüm

$$y = e^{\frac{1}{x}}\left(e^{-\frac{1}{x}} + c\right) \quad \text{veya} \quad y = 1 + ce^{\frac{1}{x}}$$

olarak bulunur.

Sabitlerin Değişimi Yöntemi

Burada, daha sonra yüksek basamaktan lineer denklemleri çözmek için kullanacağımız bir yöntemi tanıtmak iyi olacaktır.

TEOREM. $u(x)$ fonksiyonu

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

diferansiyel denklemine ait homojen denklem denilen

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$$

diferansiyel denkleminin bir çözümü ise, ilk diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = u(x)\left[\int \frac{Q(x)}{u(x)}\,dx + c\right]$$

fonksiyonudur.

İspat. $u(x)$ teoremin hipotezindeki gibi homojen denklemin bir çözümü ve $y(x)$ de asıl denklemin genel çözümü olsun.

$$y(x) = u(x).v(x)$$

diyerek bu eşitliği sağlayacak $v(x)$ fonksiyonunu bulmağa çalışalım. Verilen denklemde

$$y = uv, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$$

koyarsak

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + Puv = Q$$

veya yeniden guruplamayla

$$\left[\frac{du}{dx} + Pu\right]v + u\frac{dv}{dx} = Q$$

elde edilir. $u(x)$'in homojen denklemin bir çözümü olduğu gözönüne alınınca, köşeli parantezin içinin sıfır olduğu anlaşılır ve bu denklem $v(x)$ için

$$u(x)\frac{dv}{dx} = Q(x)$$

ayrılabilen denklemi olarak basitleşir. Buradan değişkenlerin ayrılmasıyla

$$dv = \frac{Q(x)}{u(x)}dx$$

ve integrasyonla, c bir keyfî sabit olmak üzere

$$v(x) = \int \frac{Q(x)}{u(x)}dx + c$$

bulunur. Bunu $y(x) = u(x)v(x)$ ifadesinde yerine koyarsak, birinci basamak lineer diferansiyel denklemin genel çözümünün teoremde verilen formülünü elde ederiz.

Örnek 2.35.

$$x\frac{dy}{dx} + \frac{2x+1}{x+1}y = x - 1$$

denklemini x'e bölerek

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x+1}{x(x+1)}y = \frac{x-1}{x}$$

eşdeğer denklemine dönüştürebiliriz. Bu denkleme ait homojen denklem

$$\frac{du}{dx} + \frac{2x+1}{x(x+1)}u = 0$$

ayrılabilen denklemidir. Değişkenlerini ayırırsak

$$\frac{du}{u} = -\frac{2x+1}{x^2+x}dx$$

ve bir çözümü olarak da

$$u(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$

elde edilir. İlk denklemin genel çözümü böylece

$$y = \frac{1}{x(x+1)}\left[\int \frac{x-1}{x}x(x+1)\ dx + c\right]$$

$$= \frac{1}{x(x+1)} \left[\int (x^2 - 1)\ dx + c \right]$$

veya

$$y = \frac{1}{x(x+1)} \left[\frac{x^3}{3} - x + c \right]$$

olarak bulunur.

Örnek 2.36.

$$(\cos^2 x - y \cos x)dx - (1 + \sin x)dy = 0$$

denklemini

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} y = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$$

eşdeğer denklemine dönüştürebiliriz. Bu denkleme ait homojen denklem

$$\frac{du}{dx} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} u = 0$$

ayrılabilen denklemidir. Değişkenlerini ayırırsak

$$\frac{du}{u} = -\frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$$

ve bir çözümü olarak da

$$u(x) = \frac{1}{1 + \sin x}$$

elde edilir. İlk denklemin genel çözümü böylece

$$y = \frac{1}{1 + \sin x} \left[\int \cos^2 x\ dx + c \right]$$

veya

$$y = \frac{1}{1 + \sin x} \left[\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x + c \right]$$

olarak bulunur.

B. Bernoulli Denklemleri

Şimdi uygun bir dönüşümle lineer hale getirilebilen, daha ziyade özel bir tip diferansiyel denklem göreceğiz. Bu Bernoulli denklemidir.

TANIM.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{2.37}$$

şeklindeki denkleme *Bernoulli diferansiyel denklemi* denir.

$n = 1$ ise yukarıdaki Bernoulli denkleminin

$$\frac{dy}{dx} + [P(x) - Q(x)]y = 0$$

ayrılabilen denklemi haline geleceği bellidir. Böylece (2.37) denklemi bu özel halde hem ayrılabilen ve hem de lineer bir denklem olarak çözülebilir. Ancak $n \neq 1$ için bu basitlikten eser kalmaz ve farklı bir yol izlemek gerekir. Şimdi, bu genel halde bir çözüm yöntemi veren Teorem 2.5'i ifade ve ispat edeceğiz.

TEOREM 2.5. $n \neq 1$ olsun. $v = y^{1-n}$ dönüşümü

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{2.37}$$

Bernoulli denklemini v cinsinden lineer bir denkleme indirger.

İspat. önce (2.37) denklemini y^{-n} ile çarparak

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \tag{2.38}$$

eşdeğer denklemini elde ederiz.

$$v = y^{1-n}, \quad \frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

dersek (2.38) denklemi

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$$

veya buna eşdeğer olarak

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$$

haline gelir.

$$P_1(x) = (1-n)P(x), \quad Q_1(x) = (1-n)Q(x)$$

dersek bu denklem, v cinsinden lineer olan

$$\frac{dv}{dx} + P_1(x)v = Q_1(x)$$

denklemine dönüşür.

Örnek 2.37.

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^3 \tag{2.39}$$

Bu, $n = 3$ olmak üzere Bernoulli diferansiyel denklemidir. önce denklemi y^{-3} ile çarparak

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + y^{-2} = x \tag{2.40}$$

eşdeğer denklemini elde ederiz.

$$v = y^{1-n} = y^{-2}, \quad \frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

dersek (2.40) denklemi

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} + v = x$$

veya buna eşdeğer olan

$$\frac{dv}{dx} - 2v = -2x \tag{2.41}$$

haline gelir. Bu denklemin bir integrasyon çarpanı

$$e^{\int P\ dx} = e^{-\int 2\ dx} = e^{-2x}$$

olmaktadır. (2.41) denklemini bununla çarparak

$$e^{-2x}\frac{dv}{dx} - 2ve^{-2x} = -2xe^{-2x}$$

veya

$$\frac{d}{dx}\left[ve^{-2x}\right] = -2xe^{-2x}$$

elde edilir. Bunu integre edersek

$$ve^{-2x} = \frac{1}{2}(2x+1)e^{-2x} + c$$

veya

$$v = x + \frac{1}{2} + ce^{2x}$$

buluruz. $v = 1/y^2$ olduğunu hatırlarsak, (2.39)'un bir genel çözümünü

$$\frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + ce^{2x}$$

olarak buluruz.

Örnek 2.38.

$$x\frac{dy}{dx} - 3y - x^5 y^{\frac{1}{3}} = 0$$

diferansiyel denklemini çözünüz.

Bu, $n = \frac{1}{3}$ olmak üzere Bernoulli diferansiyel denklemidir. önce denklemi $y^{-\frac{1}{3}}$ ile çarparak

$$xy^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx} + y^{\frac{2}{3}} = x^5$$

eşdeğer denklemini elde ederiz.

$$v = y^{1-n} = y^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx}$$

dersek eşdeğer denklem

$$\frac{3}{2}x\frac{dv}{dx} - 3v = x^5$$

veya buna denk olan

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v = \frac{2}{3}x^4$$

haline gelir. Bu denklemin bir integrasyon çarpanı

$$e^{\int P\ dx} = e^{-\int \frac{2}{x}\ dx} = e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2}$$

olmaktadır. Yukarıdaki denklemi bununla çarparak

$$\frac{1}{x^2}\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x^3}v = \frac{2}{3}x^2$$

veya

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}v\right] = \frac{2}{3}x^2$$

elde edilir. Bunu integre edersek

$$\frac{1}{x^2}v = \frac{2}{9}x^3 + c$$

veya

$$v = \frac{2}{9}x^5 + cx^2$$

buluruz. $v = y^{2/3}$ olduğunu hatırlarsak, verilen Bernoulli denkleminin bir genel çözümünü

$$y = \left(\frac{2}{9}x^5 + cx^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

olarak buluruz.

Örnek 2.39.

$$8x\frac{dy}{dx} + 9y = x^3\ln|x|\ y^9$$

diferansiyel denklemini çözünüz.

Bu, $n = 9$ olmak üzere Bernoulli diferansiyel denklemidir. önce denklemi y^{-9} ile çarparak

$$8xy^{-9}\frac{dy}{dx} + 9y^{-8} = x^3\ln|x|$$

eşdeğer denklemini elde ederiz.

$$v = y^{1-n} = y^{-8}, \qquad \frac{dv}{dx} = -8y^{-9}\frac{dy}{dx}$$

dersek denklem

$$-x\frac{dv}{dx} + 9v = x^3 \ln|x|$$

veya buna eşdeğer olan

$$\frac{dv}{dx} - \frac{9}{x}v = -x^2 \ln|x|$$

haline gelir. Bu denklemin bir integrasyon çarpanı

$$e^{\int P\ dx} = e^{-\int \frac{9}{x}\ dx} = e^{-9\ln|x|} = \frac{1}{x^9}$$

olmaktadır. Yukarıdaki denklemi bununla çarparak

$$\frac{1}{x^9}\frac{dv}{dx} - \frac{9}{x^{10}}v = -\frac{1}{x^7}\ln|x|$$

veya

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^9}v\right] = -\frac{1}{x^7}\ln|x|$$

elde edilir. Bunu integre edersek

$$\frac{1}{x^9}v = \frac{1}{6x^6}\left(\ln|x| + \frac{1}{6}\right) + c$$

veya

$$v = \frac{1}{6}x^3\left(\ln|x| + \frac{1}{6}\right) + cx^9$$

buluruz. $v = y^{-8}$ olduğunu hatırlarsak, verilen Bernoulli denkleminin bir genel çözümünü

$$y = \left[\frac{1}{6}x^3\left(\ln|x| + \frac{1}{6}\right) + cx^9\right]^{-\frac{1}{8}}$$

olarak buluruz.

ALIŞTIRMALAR

1.'den 15.'e kadar problemlerdeki diferansiyel denklemleri çözünüz.

1. $x\frac{dy}{dx} + 3y = 6x^3$
2. $x^4\frac{dy}{dx} + 2x^3y = 1$
3. $x^2\frac{dy}{dx} + y = 1$
4. $(u^2+1)\frac{dv}{du} + 4uv = 3u$
5. $x\frac{dy}{dx} + \frac{2x+1}{x+1}y = x - 1$
6. $(x^2+x-2)\frac{dy}{dx} + 3(x+1)y = x - 1$
7. $x\ dy + (xy + y - 1)dx = 0$
8. $y\ dx + (xy^2 + x - y)dy = 0$
9. $\frac{dr}{d\theta} + r\tan\theta = \cos\theta$
10. $\cos\theta\ dr + (r\sin\theta - \cos^4\theta)d\theta = 0$
11. $(\cos^2 x - y\cos x)dx - (1+\sin x)dy = 0$
12. $x\frac{dy}{dx} - y = -y^2$
13. $x\frac{dy}{dx} + y = -2x^6y^4$
14. $dy + (4y - 8y^{-3})x\ dx = 0$
15. $2t\frac{dx}{dt} + (t+1)x = 2(t+1)x^{-1}$

16.'dan 22.'ye kadar problemlerdeki başlangıç değer problemlerini çözünüz.

16. $x\frac{dy}{dx} - 2y = 2x^4, \quad y(2) = 8$
17. $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = x^2, \quad y(0) = 2$
18. $2x(y+1)dx - (x^2+1)dy = 0, \quad y(1) = -5$
19. $\frac{dr}{d\theta} + r\tan\theta = \cos^2\theta, \quad r\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
20. $\frac{dx}{dt} - x = \sin 2t, \quad x(0) = 0$
21. $2x\frac{dy}{dx} + y = 2x^2y^{-3}, \quad y(1) = 2$
22. $x\frac{dy}{dx} + y = (xy)^{3/2}, \quad y(1) = 4$
23. a, b, k pozitif sabitler ve λ da negatif olmayan bir sabit olmak

üzere

$$a\frac{dy}{dx} + by = ke^{-\lambda x}$$

denklemini ele al.

(a) Bu denklemi çöz.

(b) $\lambda = 0$ ise, $x \to \infty$ için bütün çözümlerin $\frac{k}{b}$'ye yakınsayacağını , $\lambda > 0$ ise, $x \to \infty$ için bütün çözümlerin 0'a gideceğini göster.

24.

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x < 1, \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} + y = f(x), \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

25.

$$f(x) = \begin{cases} 5, & 0 \le x < 10, \\ 1, & x \ge 10 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} + y = f(x), \\ y(0) = 6 \end{cases}$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

26. $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ diferansiyel denklemini gözönüne alınız.

(a) f, g bu denklemin iki çözümü ve c_1, c_2 keyfî sabitler ise $c_1 f + c_2 g$'nin de bu denklemin bir çözümü olacağını gösteriniz.

(b) (a)'daki sonucu genelleştirerek $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bu denklemin n tane çözümü ve $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de n tane keyfî sabit olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f_k$$

toplamının da bu denklemin bir çözümü olacağını gösteriniz.

27. $P(x)$ fonksiyonu I gerçel aralığı üzerinde sürekli olmak üzere

$$(A) \qquad \frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

diferansiyel denklemini gözönüne alınız.

(a) $f(x) = 0, \quad \forall x \in I$ fonksiyonunun bu denklemin çözümü olduğunu gösteriniz.

(b) f fonksiyonu (A) denkleminin bir $x_0 \in I$ noktasında $f(x_0) = 0$ olacak şekilde bir çözümü ise, $f(x) = 0, \ \forall x \in I$ olacağını kanıtlayınız.

(c) f, g fonksiyonları (A) denkleminin bir $x_0 \in I$ noktasında $f(x_0) = g(x_0)$ olacak şekilde iki çözümü ise, $f(x) = g(x), \quad \forall x \in I$ olacağını kanıtlayınız.

28. (a) f, g fonksiyonları

$$(B) \qquad \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

denkleminin farklı iki çözümü ise $f - g$ fonksiyonunun (A) denkleminin bir çözümü olacağını kanıtlayınız.

(b) Böylece f, g fonksiyonları

(B) denkleminin farklı iki çözümü ve c de keyfî sabit ise $c(f-g)+f$ fonksiyonunun (B) denkleminin bir genel çözümü olacağını kanıtlayınız.

29. (a) f_1, f_2 fonksiyonları sırasıyla

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q_1(x) \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q_2(x)$$

denklemlerinin çözümleri olsun. P, Q_1, Q_2 aynı bir I aralığı üzerinde sürekli ise, $f_1 + f_2$ fonksiyonunun da

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q_1(x) + Q_2(x)$$

denkleminin aynı I aralığında geçerli bir çözümü olacağını kanıtlayınız.

(b) (a) şıkkındaki sonucu

$$\frac{dy}{dx} + y = 2\sin x + 5\sin 2x$$

denklemini çözmek için kullanınız.

30. (a) (29) (a) problemindeki sonucu genelleştirerek P, Q_1, Q_2,-$\ldots, Q_n$ fonksiyonlarının hepsi de aynı bir I aralığı üzerinde sürekli olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = \sum_{k=1}^{n} Q_(x)$$

denklemini içine alacak hale getiriniz.

(b) (a) şıkkındaki sonucu

$$\frac{dy}{dx} + y = \sum_{k=1}^{5} \sin kx$$

denklemini çözmek için kullanınız.

31. (a) $v = f(y)$ dönüşümünün

$$\frac{df(y)}{dy}\frac{dy}{dx} + P(x)f(y) = Q(x)$$

denklemini v cinsinden lineer bir denklem haline getireceğini gösteriniz.

(b) (a) şıkkındaki sonucu

$$(y+1)\frac{dy}{dx} + x(y^2 + 2y) = x$$

denklemini çözmek için kullanınız.

EK ALIŞTIRMALAR

A) Aşağıdaki lineer birinci basamak diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

1. $(2y + x^2)dx = xdy$	2. $y' + 2xy + x = e^{x^2}$
3. $y' + y\tan x = \sec x$	4. $y' + y\cot x = \sin 2x$
5. $x^2dy + (2xy - x + 1)dx = 0$	6. $(1 - x^2)y' + xy = 2x$
7. $y' + \frac{y}{1-x} = x^2 - x$	8. $y' = \frac{2y}{x+1} + (x+1)^3$
9. $xy' + (1+x)y = e^{-x}$	10. $xy' + 2(1 - x^2)y = 1$
11. $(x - y)dx + xdy = 0$	12. $xy' = x^3 - 2y$

Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözünüz.

13. $y' + y = e^x, \quad y(0) = 2$
14. $y' + y = e^{-x}, \quad y(0) = 3$

15. $(x^2+1)dy = (x^3 - 2xy + x)dx, \quad y(1) = 1$
16. $y' + (1+2x)y = e^{-x^2}, \quad y(0) = 3$
17. $(x^2+1)dy = (1+xy)dx, \quad y(1) = 0$
18. $y' = \frac{1-2xy}{x^2}, \quad y(1) = 2$
19. $(5x^2+1)y' - 20xy = 10x, \quad y(0) = \frac{1}{2}$
20. $y' + \tan xy = \sin 2x, \quad y(0) = -2$
21. $\sin xy' + \cos xy = \cos 2x, \quad y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$
22. $x^2y' + xy = 2 + x^2, \quad y(1) = 0$

B) Aşağıdaki Bernoulli diferansiyel denklemlerinin genel çözümlerini bulunuz.

1. $y' - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x} = 0$
2. $y^2y' + x^2y^3 = x^2$
3. $dy = (xy^2 + 3xy)dx$
4. $xy^2y' - y^3 = x^2$
5. $ydy = (x - y^2)dx$
6. $y' + y = xy^2$
7. $x^2y' = y^2 + 2xy$
8. $3xy' - y + x^2y^4$
9. $xydy + (y^2 + 2x^2 + 2)dx = 0$
10. $3xydx + (2y^2 - x^2)dy = 0$
11. $y' + 9\frac{y}{x} = y^9x^2 \ln|x|$

Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözünüz.

12. $y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x, \quad y(1) = 1$
13. $yy' + xy^2 - x = 0, \quad y(0) = -1$
14. $yy' + y^2 = x, \quad y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
15. $y + y' = y^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}$
16. $3x^2dy + 2xy + y^2dx = 0, \quad y(2) = 1$

2.4 Özel İntegrasyon Çarpanlari

Buraya kadar çözümleri tam çözüm yöntemleri ile elde edilebilen beş çeşit birinci basamak denklem tanıdık. Bunlar tam, ayrılabilen, homojen, lineer denklemler ve Bernoulli denklemleri oldu. Tam denklemlerde genel çözümü elde etmek için belirli bir yol izledik. Oysa diğer dört tipte de belirli çözüm yöntemleri uygulandı ama bunlar o kadar doğrudan yöntemler değildi. Ayrılabilen, homojen ve lineer denklemlerde aslında verilen denklemleri uygun integrasyon çarpanları ile çarparak tam hale getiriyoruz. Homojen denklemleri ve Bernoulli denklemlerini uygun dönüşümler yardımıyla, kendilerinden daha basit yapıda olan ayrılabilen ve lineer denklemler haline getiriyoruz.

Bu gözlemlerimiz, yukarıda sözünü ettiğimiz beş çeşide *girmeyen* diferansiyel denklemleri çözmek için iki teşebbüs doğrultusunu akla getiriyor. Ya (1) verilen denklemi uygun bir integrasyon çarpanı ile çarparak doğrudan tam hale getirmeli, veya (2) uygun bir dönüşüm bulup bu denklemi yukarıda bahsedilen beş çeşitten birine sokmalı. Ne yazık ki her durumda integrasyon çarpanı veya dönüşüm bulmaya yarayacak yöntemler mevcut değildir. Ancak ya integrasyon çarpanları veya dönüşümleri kolayca bulunabilen bir çok denklem vardır. Bunlardan bazılarını bu kısımda ele alacağız. Bu tiplerin diferansiyel denklemler teorisi içindeki yerleri nisbeten önemsiz olduğundan çok fazla ayrıntıya girmeyeceğiz.

A. İntegrasyon Çarpanlarının Bulunması

Bu bölümün 2.2. kısmında gördüğümüz ayrılabilen denklemler, bir bakışta görülebilen integrasyon çarpanlarına sahiptirler. Bazı ayrılabilir olmayan denklemlerin de hemen görülebilen integrasyon çarpanları varsa da, bunlara diferansiyel denklem kitaplarının ilgili sayfaları dışında rastlamak pek mümkün değildir. Oralarda bile bir hayli bilgi ve maharete ihtiyaç duyulur.

Şimdi probleme daha sistemli bir şekilde yaklaşalım.

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{2.42}$$

denkleminin tam *olmadığını* ve μ'nün bu denklemin bir integrasyon çarpanı olduğunu varsayalım. O zaman

$$\mu M dx + \mu N dy = 0 \tag{2.43}$$

denklemi *tam*'dır. (2.7) denklemi ile verilen tamlık ölçütünü kullanırsak, (2.43) denkleminin tam olması için gerek ve yeter koşul,

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

olmasıdır. Parantezlerin açılmasıyla bu denklem

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu \tag{2.44}$$

haline gelir ve μ'nün (2.42) denkleminin bir integrasyon çarpanı olması için gerek ve yeter koşul, onun (2.44) denkleminin bir çözümü olmasıdır. (2.44) denklemi μ genel integrasyon çarpanı için bir kısmî diferansiyel denklemdir ve şu anda böyle bir denklemi çözme durumunda bulunmuyoruz. Bunun yerine özel yapıda bazı integrasyon çarpanları elde etmeğe çalışalım. Ancak hangi özel tiplere bakacağız?

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

lineer diferansiyel denkleminin daima $e^{\int P\,dx}$ gibi sadece x'e bağlı bir integrasyon çarpanı olduğunu hatırlayalım. Belki başka denklemlerin de sadece x'e bağlı integrasyon çarpanları vardır. O zaman (2.42)'yi sadece x'e bağlı $\mu = \mu(x)$ ile çarparsak

$$\mu M dx + \mu N dy = 0$$

elde ederiz. Bu denkleminin tam olması için gerek ve yeter koşul,

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

olmasıdır. Parantezlerin açılmasıyla bu denklem

$$N\frac{d\mu}{dx} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

veya

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx \tag{2.45}$$

haline gelir.

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

ifadesinde y'ye bağımlılık olsaydı bu (2.45) denkleminde sol tarafın sadece x'e bağlı olmasıyla çelişki oluştururdu. Bu ifade sadece x'e bağlı olursa, o zaman (2.45) denklemi, x'e ve tek bağlı değişken μ'ye göre *ayrılabilen* denklem olur ve integre edilerek integrasyon çarpanı

$$\mu = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

ifadesi sadece y'ye bağlı olursa, sadece y'ye bağlı bir integrasyon çarpanı vardır.

Bu gözlemlerimizi aşağıdaki teoremde toplayabiliriz:

TEOREM 2.6.

$$M dx + N dy = 0 \tag{2.42}$$

diferansiyel denklemini gözönüne alalım.

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag{2.46}$$

ifadesi sadece x'e bağlı olursa, o zaman (2.42) denkleminin

$$\mu = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx} \qquad)2.47)$$

şeklinde bir integrasyon çarpanını bulunur.

Benzer şekilde

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \tag{2.48}$$

ifadesi sadece y'ye bağlı olursa, (2.42) denkleminin

$$\mu = e^{\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dy} \tag{2.49}$$

şeklinde bir integrasyon çarpanını vardır.

Burada şunu belirtelim ki, bir diferansiyel denklem verildiğinde yukarıdaki iki durumdan birinin ortaya çıkması için hiçbir teminatımız yoktur. Ele alınan diferansiyel denklem için (2.46)'da y'ye rastlanabileceği gibi (2.48)'de de x bulunabilir. O zaman başka yollar aramalıyız. Ancak (2.46) ve (2.48) ifadelerinin hesabı kolay olduğundan başka yere bakmadan önce bunların hesaplanması iyi olur.

Örnek 2.40.

$$(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0 \tag{2.50}$$

önce bu denklemin tam, ayrılabilir, homojen, lineer ve Bernoulli denklem sınıflarından hiçbirine girmediğini gözlemleyelim. Acaba buna Teorem 2.6 uyar mı ? Burada $M = 2x^2 + y, \quad N = x^2y - x$ olmaktadır. Böylece (2.46) ifadesi

$$\frac{1}{2x^2+y}[1 - (2xy - 1)] = \frac{2(1 - xy)}{x(xy - 1)} = -\frac{2}{x}$$

olur ki sadece x'e bağlıdır ve böylece

$$e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{x^2}$$

(2.50) denklemi için bir integrasyon çarpanıdır.

(2.50)'yi bu integrasyon çarpanı ile çarpınca

$$\left(2 + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)dy = 0 \tag{2.51}$$

denklemini elde ederiz. (2.51) denkleminin tam ve çözümünün

$$2x + \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} = c$$

olduğu kolayca görülebilir.

Örnek 2.41.

$$(2x^3y^2 + 4x^2y + 2xy^2 + xy^4 + 2y)dx + 2(y^3 + x^2y + x)dy = 0$$

Burada

$$M = 2x^3y^2 + 4x^2y + 2xy^2 + xy^4 + 2y, \quad \text{ve} N = 2(y^3 + x^2y + x$$

olmaktadır. Böylece (2.46) ifadesi

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 2x$$

olur ki sadece x'e bağlıdır ve böylece

$$e^{2\int x\ dx} = e^{x^2}$$

verilen denklem için bir integrasyon çarpanıdır. Denklemi bu integrasyon çarpanı ile çarpınca

$$e^{x^2}(2x^3y^2 + 4x^2y + 2xy^2 + xy^4 + 2y)dx + e^{x^2}2(y^3 + x^2y + x)dy = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin tam ve genel çözümünün

$$e^{x^2}\left(\frac{y^4}{2} + x^2y^2 + 2xy\right) = c$$

olduğu kolayca görülebilir.

Örnek 2.42.

$$(3x^2y + xy^3)dx + (xy^2 - x^3)dy = 0$$

Burada $M = 3x^2y + xy^3$ ve $N = xy^2 - x^3$ olduğundan (2.48) ifadesi

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\frac{2}{y}$$

sadece y'ye bağlı olduğundan, verilen denklemin bir integrasyon çarpanı (2.49)'dan

$$e^{-2\int \frac{dy}{y}} = e^{-2\ln|y|} = \frac{1}{y^2}$$

olarak bulunur. Denklemi bu integrasyon çarpanı ile çarpınca

$$\left(\frac{3x^2}{y} + xy\right) dx + \left(x - \frac{x^3}{y^2}\right) dy = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin tam ve genel çözümünün

$$x^3 + xy^2 - cy = 0$$

olduğu kolayca görülebilir.

Örnek 2.43.

$$\left(2xy^4e^y + 2xy^3 + y\right) dx + \left(x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x\right) dy = 0$$

Burada

$$M = 2xy^4e^y + 2xy^3 + y, \quad \text{ve} N = x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x$$

olduğundan (2.48) ifadesi

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\frac{4}{y}$$

sadece y'ye bağlı olduğundan, verilen denklemin bir integrasyon çarpanı (2.49)'dan

$$e^{-4\int \frac{dy}{y}} = e^{-4\ln|y|} = \frac{1}{y^4}$$

olarak bulunur. Denklemi bu integrasyon çarpanı ile çarpınca

$$\left(2xe^y + 2\frac{x}{y} + \frac{1}{y^3}\right) dx + \left(x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4}\right) dy = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin tam ve genel çözümünün

$$x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = c$$

olduğu kolayca görülebilir.

B. Diğer özel tipler ve yöntemler

Birinci basamak diferansiyel denklemlerin buraya kadar gördüklerimizden farklı daha pek çok özel çeşidi ve her birinin kendine göre özel çözüm yöntemi vardır. Biz burada bunlardan sadece üç tanesinden, Lagrange, Clairaut ve Riccati denklemlerinden söz edeceğiz.

Lagrange Diferansiyel Denklemi

TANIM. f ve g türevli fonksiyonlar ve $y' = \frac{dy}{dx}$ olmak üzere

$$y = xf(y') + g(y')$$

şeklinde yazılabilen birinci basamak diferansiyel denklemlere Lagrange denklemi denir.

Lagrange Denkleminin Çözümü

Lagrange diferansiyel denklemini çözmek için, verilen denklemin serbest değişkene göre türevi alınır ve böylece

$$y' = f(y') + [xf'(y') + g'(y')]y''$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde $y' = p$, $y'' = dp/dx$ tanımı yapılır ve p serbest, x bağlı değişken olarak alınırsa

$$p = f(p) + [xf'(p) + g'(p)]\frac{dp}{dx}$$

veya

$$[p - f(p)]\frac{dx}{dp} - xf'(p) = g'(p)$$

birinci basamak lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin bir genel çözümü

$$(A) \qquad x = \mathcal{F}(p, c)$$

olarak bulunursa, bunu ilk denklemde yerine koymakla

$$(B) \qquad y = \mathcal{F}(p, c)f(p) + g(p)$$

elde edilir ki, (A) ve (B) birlikte Lagrange denkleminin genel ¸çözümünün p parametresine göre parametrik denklemini oluştururlar.

Örnek 2.44.

$$y = -x(y')^2 + 3(y')^{\frac{5}{2}}$$

diferansiyel denklemini çözünüz.

Bu denklem $f(y') = -(y')^2$ ve $g(y') = 3(y')^{\frac{5}{2}}$ olmak üzere Lagrange denklemidir. Bu denklemde $y' = p,\ y'' = dp/dx$ tanımı yapılır ve p serbest, x bağlı değişken olarak alınırsa

$$(p + p^2)\frac{dx}{dp} + 2xp = \frac{15}{2}p^{\frac{3}{2}}$$

veya $p = 0,\ y = A$ bu denklemin bir çözümü olmadığından,

$$(1 + p)\frac{dx}{dp} + 2x = \frac{15}{2}p^{\frac{1}{2}}$$

birinci basamak lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin bir genel çözümü

$$(A) \qquad x = \frac{1}{(1+p)^2}\left(3p^{\frac{5}{2}} + 5p^{\frac{3}{2}} + c\right)$$

olur ve ilk denklemde yerine konmakla

$$(B) \qquad y = -\frac{1}{(1+p)^2}\left(3p^{\frac{5}{2}} + 5p^{\frac{3}{2}} + c\right)p^2 + 3p^{\frac{5}{2}}$$

elde edilir. (A) ve (B) birlikte, verilen Lagrange denkleminin genel çözümünün p parametresine göre parametrik denklemini oluştururlar.

Örnek 2.45.

$$y = x[(y')^2 + y'] + \frac{1}{y'}$$

diferansiyel denklemini çözünüz.

Bu denklem $f(y') = (y')^2 + y'$ ve $g(y') = \frac{1}{y'}$ olmak üzere Lagrange denklemidir. Bu denklemde $y' = p,\ y'' = dp/dx$ tanımı yapılır ve p

serbest, x bağlı değişken olarak alınırsa

$$p^2\frac{dx}{dp}+x(2p+1)=\frac{1}{p^2}$$

veya, $p=0,\ y=A$ bu denklemin bir çözümü olmadığından

$$\frac{dx}{dp}+x\left(\frac{2}{p}+\frac{1}{p^2}\right)=\frac{1}{p^4}$$

birinci basamak lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin bir genel çözümü

$$(A)\qquad x=\frac{1}{p^2}\left(1+ce^{\frac{1}{p}}\right)$$

olur ve ilk denklemde yerine konmakla

$$(B)\qquad y=1+c\left(1+\frac{1}{p}\right)e^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir. (A) ve (B) birlikte, verilen Lagrange denkleminin genel çözümünün p parametresine göre parametrik denklemini oluştururlar.

Örnek 2.46.

$$x+yy'=\frac{2ay'}{\sqrt{1+(y')^2}},\quad a\neq 0\ \text{ sabit}$$

diferansiyel denklemini çözünüz.

Bu denklem

$$f(y')=-\frac{1}{y'}\quad \text{ve}\quad g(y')=\frac{2a}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

olmak üzere Lagrange denklemidir. Bu denklemde $y'=p,\ y''=dp/dx$ tanımı yapılır ve p serbest, x bağlı değişken olarak alınırsa

$$\frac{dx}{dp}-x\frac{1}{p(1+p^2)}=\frac{2ap^2}{(1+p^2)^{5/2}}$$

birinci basamak lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin bir genel çözümü

$$(A) \qquad x = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left(c - \frac{a}{1+p^2}\right)$$

olur ve ilk denklemde yerine konmakla

$$(B) \qquad y = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left(c - \frac{a}{1+p^2}\right) + \frac{2a}{\sqrt{1+p^2}}$$

elde edilir. (A) ve (B) birlikte, verilen Lagrange denkleminin genel çözümünün p parametresine göre parametrik denklemini oluştururlar.

Örnek 2.47.

$$y = -xy' + 5(y')^6$$

diferansiyel denklemini çözünüz.

Bu denklem

$$f(y') = -y' \quad \text{ve} \quad g(y') = 5(y')^6$$

olmak üzere Lagrange denklemidir. Bu denklemde $y' = p,\ y'' = dp/dx$ tanımı yapılır ve p serbest, x bağlı değişken olarak alınırsa

$$\frac{dx}{dp} + x\frac{1}{2p} = 15p^4$$

birinci basamak lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin bir genel çözümü

$$(A) \qquad x = \frac{30}{11}p^6 + cp^{-\frac{1}{2}}$$

olur ve ilk denklemde yerine konmakla

$$(B) \qquad y = \frac{25}{11}p^6 - cp^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. (A) ve (B) birlikte, verilen Lagrange denkleminin genel çözümünün p parametresine göre parametrik denklemini oluştururlar.

Clairaut Diferansiyel Denklemi

TANIM.

$$y = xf(y') + g(y')$$

Lagrange denkleminde $f(y') = y'$ almakla elde edilen birinci basamak

$$y = xy' + g(y')$$

diferansiyel denklemine Clairaut denklemi denir.

Clairaut Denkleminin çözümü

Lagrange denkleminde olduğu gibi verilen denklemin serbest değişkene göre türevi alınırsa

$$y' = y' + [x + g'(y')]y'' \quad \text{veya} \quad [x + g'(y')]y'' = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem, iki imkan ortaya çıkarır:

$$y'' = 0 \quad \text{veya} \quad x + g'(y') = 0$$

Bu iki imkandan birincisi Clairaut denkleminin genel, ikincisi de tekil çözümünü verir.

Clairaut Denkleminin Genel Çözümü

Yukarıdaki çözüm imkanlarından birincisi

$$y'' = 0, \quad y' = A, \quad y = Ax + B$$

verir. Ancak bunlar verilen denklemde yerine konunca A ve B sabitlerinin bağımsız değil,

$$Ax + B = Ax + g(A)$$

bağıntısı ile birbirlerine bağlı oldukları anlaşılır. Demek ki Clairaut denkleminin genel çözümü, bir parametreye bağlı

$$y = Ax + g(A)$$

doğru ailesidir.

Clairaut Denkleminin Tekil Çözümü

Yukarıdaki ikinci çözüm imkanı

$$x + g'(y') = 0$$

veya $y' = p$ tanımıyla

$$(A) \qquad x = -g'(p)$$

verir ve verilen diferansiyel denklemde yerine koymayla

$$(B) \qquad y = -pg'(p) + g(p)$$

elde edilir ki, (A) ve (B) birlikte Clairaut denkleminin çözümünün, p parametre olmak üzere parametrik denklemini olşturururlar. Bu çözüm yukarıdaki bir parametreye bağlı doğru ailesinin bir elemanı olmadığından, bir tekil çözümdür.

Örnek 2.48.

$$y = xy' + 3(y')^5$$

diferansiyel denklemini çözünüz.

Bu denklem $g(y') = 3(y')^5$ olmak üzere bir Clairaut denklemidir. Böylece genel çözümü

$$y = Ax + 3A^5$$

doğru ailesi ve tekil çözümü de parametrik denklemi

$$x = -15p^4, \quad y = -15p^5 + 3p^5 = -12p^5$$

olan eğridir. Bu eğrinin kartezyen denklemini elde etmek için parametrik denklemleri taraf tarafa bölersek

$$\frac{y}{x} = \frac{4}{5}p \quad \text{veya} \quad \frac{5y}{4x} = p$$

ve yerine koymayla

$$y = -12\left(\frac{5y}{4x}\right)^5 \quad \text{veya} \quad 256x^5 + 9375y^4 = 0$$

elde edilir.

Riccati Diferansiyel Denklemi

TANIM. $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ türevli fonksiyonlar olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$$

şeklinde yazılabilen birinci basamak diferansiyel denklemlere Riccati denklemi denir.

Bir özel Çözümü Bilinen Riccati Denkleminin Genel Çözümü

f, Riccati denkleminin bir özel çözümü olsun. $y = f + \frac{1}{v}$ bağlı değişken dönüşümü yaparsak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

olur ve verilen denklem v cinsinden

$$\frac{dv}{dx} + v[B(x) + 2A(x)f(x)] + A(x) = 0$$

lineer diferansiyel denklemine dönüşür.

Örnek 2.49. Bir özel çözümü $f(x) = \cos x$ olan

$$\frac{dy}{dx}(1 - \sin x \cos x) + y^2 \cos x - y + \sin x = 0$$

Riccati diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y = \cos x + \frac{1}{v}$ bağlı değişken dönüşümü yaparsak

$$\frac{dv}{dx}(1 - \sin x \cos x) - 2\cos^2 x \; v = 0$$

lineer diferansiyel denklemini elde ederiz. Aslında bu, genel çözümü

$$v(2 - \sin 2x) = 2\sin x + c$$

olan ayrılabilen bir denklemdir. Geri dönüşüm yapılırsa, verilen Riccati denkleminin çözümü

$$y = \cos x + \frac{2 - \sin 2x}{2\sin x + c}$$

veya

$$y = \frac{c\cos x + 2}{2\sin x + c}$$

olarak bulunur.

Örnek 2.50. Bir özel çözümü $f(x) = \tan x$ olan

$$\frac{dy}{dx} + y^2 - 3y\tan x + \tan^2 x - 1 = 0$$

Riccati diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y = \tan x + \frac{1}{v}$ bağlı değişken dönüşümü yaparsak

$$\frac{dv}{dx} + \tan x\ v = 1$$

lineer diferansiyel denklemini elde ederiz. Bu denklemin genel çözümü

$$v = c\cos x\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

olur. Geri dönüşüm yapılırsa, verilen Riccati denkleminin genel çözümü

$$y = \tan x + \frac{1 - \sin x}{c\cos x(1 + \sin x)}$$

olarak bulunur.

İki Özel Çözümü Bilinen Riccati Denkleminin Genel Çözümü

f_1, f_2, Riccati denkleminin iki özel çözümü olsun. $w = \frac{1}{f_2 - f_1}$ fonksiyonunun, Riccati denkleminde $y = f_1 + \frac{1}{v}$ bağlı değişken dönüşümü yapılarak elde edilen

$$\frac{dv}{dx} + v[B(x) + 2A(x)f(x)] + A(x) = 0$$

lineer diferansiyel denkleminin bir özel çözümü olduğu kolayca gösterilebilir. Bu denklemin bir genel çözümünü bulmak için $v = w + z$ koyarsak, z'nin

$$\frac{dz}{dx} + [B(x) + 2A(x)f_1(x)]z = 0$$

ayrılabilen denkleminin çözümü olacağı anlaşılır. Bu denklemin bir genel çözümü

$$z = ce^{\int [B(x)+2A(x)f(x)]dx}$$

olarak yazılabilir. Artık Riccati denkleminin genel çözümü bir integral hesabı ile

$$y = f_1 + \frac{1}{w+z}$$

formülünden hesaplanabilir.

Örnek 2.51. İki özel çözümü $f_1(x) = -x^9$, $f_2(x) = -x^{-1}$ olan

$$(1 - x^{10})\frac{dy}{dx} = y^2 - 8x^9y - 9x^8$$

Riccati diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y = -x^9 + \frac{1}{v}$ bağlı değişken dönüşümü yaparsak

$$\frac{dv}{dx} + \frac{10x^9}{x^{10} - 1} = \frac{1}{x^{10} - 1}$$

lineer diferansiyel denklemini elde ederiz. Bu denklemin bir özel çözümü

$$w = \frac{1}{-x^{-1} + x^9} = \frac{x}{x^{10} - 1}$$

fonksiyonudur. $v = w + z$ koyarsak z'nin,

$$\frac{dz}{dx} + \frac{10x^9}{x^{10} - 1}\, z = 0$$

ayrılabilen denkleminin çözümü olacağı anlaşılır. Bu denklemin bir genel çözümü

$$z = ce^{-\int \frac{10x^9}{x^{10}-1}dx} = \frac{c}{x^{10} - 1}$$

olarak yazılabilir. Artık Riccati denkleminin genel çözümü bir integral hesabı ile

$$y = f_1 + \frac{1}{w+z}$$

formülünden

$$y = -x^9 + \frac{x^{10}-1}{x+c} = -\frac{cx^9-1}{x+c}$$

olarak hesaplanır.

üç Özel Çözümü Bilinen Riccati Denkleminin Genel Çözümü

TEOREM 2.6. Riccati denkleminin f_1, f_2, f_3, f_4 gibi dört özel çözümünün

$$\frac{f_3-f_4}{f_1-f_4} : \frac{f_3-f_2}{f_1-f_2} = c$$

çifte oranları sabittir.

Bu meşhur teoremin ispatını burada vermeyeceğiz. Bu teorem yardımıyla, üç çözümü bilinen Riccati denkleminin genel çözümünün nasıl bulunabileceği açıkça görülmektedir.

Örnek 2.52. üç özel çözümü

$$f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = \frac{1+\sin x}{1+\cos x},\ f_3(x) = sec\ x$$

olan

$$(1-\sin x\cos x)\frac{dy}{dx} = y^2\sin x - y + \cos x$$

Riccati diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Teoremdeki formüle göre Riccati denkleminin y genel çözümünü f_4 olarak isimlendirirsek

$$\frac{sec\ x - y}{\sin x - y} = c\frac{\sec x - (1+\sin x)/(1-\cos x)}{\sin x - (1+\sin x)/(1-\cos x)}$$

ve buradan da genel çözümü

$$y = \frac{1+c\sin x}{c+\cos x}$$

olarak bulunur.

y, y' ve y'''ye Göre Homojen Denklemler

Böyle denklemler, $u = \frac{y'}{y}$ bağlı değişken dönüşümü ile u cinsinden birinci basamak denklemlere dönüşürler. Bu dönüşüm altında türevler

$$y' = uy, \quad y'' = y(u' + u^2)$$

olarak dönüşürler.

Örnek 2.53. $yy'' - (y')^2 = 6xy^2$

Bu denklemin bütün terimleri y, y', y'' lere göre ikinci dereceden homojendirler. Yukarıdaki dönüşüm uygulanırsa u cinsinden

$$u' = 6x, \quad \text{veya} \ \ u = 3x^2 + c_1$$

ve geri dönüşümle

$$\frac{y'}{y} = 3x^2 + c_1$$

ve buradan da

$$y = c_2 e^{x^3 + c_1 x}$$

verilen ikinci basamak denklemin genel çözümü olarak bulunur.

y Bağlı Değişkeni Bulundurmayan İkinci Basamak Denklemler

Bu denklemler

$$y'' = f(x, y')$$

şeklindedirler ve $y' = p, \quad y'' = p'$ dönüşümüyle

$$p' = f(x, p)$$

birinci basamak denklemine dönüşürler.

Örnek 2.54. $xy'' - y' = x^2 e^x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Bu denklemde y bağlı değişkeni yoktur. Böylece $y' = p, \quad y'' = p'$ dömüşümü ile birinci basamaktan

$$xp' - p = x^2 e^x$$

lineer denklemine dönüşür ki genel çözümü daha önce gördüğümüz yöntemlerden biriyle

$$y = (x-1)e^x + c_1 x + c_2$$

olarak bulunabilir.

x Bağımsız Değişkeni Bulundurmayan İkinci Basamak Denklemler

Bu denklemler

$$y'' = f(y, y')$$

şeklindedirler ve y'yi bağımsız değişken olarak belirleyip

$$y' = p(y), \quad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

dönüşümü yapmakla

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

birinci basamak denklemine dönüşürler.

Örnek 2.55. $yy'' = (y')^2$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Bu denklemde x bağımsız değişkeni yoktur. Böylece $y' = p, \quad y'' = p\, dp/dy$ dömüşümü ile

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2$$

birinci basamak denklemine dönüşür ki, genel çözümü daha önce gördüğümüz yöntemlerden biriyle

$$y = e^{c_1 x + c_2}$$

olarak bulunabilir.

Daha fazlasını öğrenmek isteyen okuyucumuza E. Kamke'nin *Differentialgleichungen: Losungsmetoden und Losungen, Chalsea: New York 1948* adlı kitabını tavsiye etmekle yetineceğiz. Bu ilginç kitapta çok sayıda özel denklem tipinin ve çözüm yollarının ele alındığı görülecektir. Okuyucumuz gördüklerinin dışında bir denklemle karşılaşınca bu kitaba başvursa iyi eder. Ancak tam çözümü bulunmayan denklemlerle karşılaşmak da kabildir. Böyle durumlarda yaklaşık çözüm yöntemlerine başvurulur. Bu tür yöntemleri kitabın II. kısmının 9. Bölüm'ünde ele alacağız.

ALIŞTIRMALAR

1.'den 4.'e kadar problemlerdeki diferansiyel denklemleri, integrasyon çarpanlarını bulduktan sonra çözünüz.

1. $(5xy + 4y^2 + 1)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$
2. $(2x + \tan y)dx + (x - x^2 \tan y)dy = 0$
3. $[y^2(x+1) + y]dx + (2xy + 1)dy = 0$
4. $(4xy^2 + 6y)dx + (5x^2 y + 8x)dy = 0$

[*Yol gösterme:* Bu diferansiyel denklemin $x^p y^q$ şeklinde integrasyon çarpanı vardır.]

5. Teorem 2.6'yı ispat ediniz.
6. Teorem 2.7'yi ispat ediniz.
7. μ ve ν,

$$(A) \qquad M dx + N dy = 0$$

denkleminin μ/ν sabit olmayacak şekilde iki integrasyon çarpanı ise,

$$\mu = c\nu$$

bağıntısının her c sabiti için (A) denkleminin bir çözümünü tanımlayacağını kanıtlayınız.

7.

$$(A) \qquad M dx + N dy = 0$$

denklemi homojen ve tam ise, $xM + yN$ de sabit değilse, bu denklemin çözümünün c keyfî bir sabit olmak üzere $xM + yN = c$ olacağını kanıtlayınız.

EK ALIŞTIRMALAR

A) Aşağıdaki Lagrange diferansiyel denklemlerinin genel çözümlerini bulunuz.

1. $y = -\frac{x}{y'} + 1 + \frac{(y')^2}{2}$
cevap:

$$x = p\left(1 + \frac{c}{\sqrt{1+p^2}}\right)$$
$$y = \frac{c}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{p^2}{2}$$

2. $y = -x(y')^2 + 7(y')^3$
cevap:

$$x = \frac{2c+7p^2(3+2p)}{2(1+p)^2}$$
$$y = -\frac{2c+7p^2(3+2p)}{2(1+p)^2}p^2 + 7p^3$$

3. $y = -3xy' + \frac{2}{(y')^4}$
cevap:

$$x = \frac{8}{17}p^{-5} + cp^{-\frac{3}{4}}$$
$$y = -3\left(\frac{8}{17}p^{-4} + cp^{\frac{1}{4}}\right) \frac{2c+7p^2(3+2p)}{2(1+p)^2}p^2 + 7p^3$$

4. $y = x((y')^2 + y') + \frac{1}{y'}$

5. $y = -xy' + 10(y')^{\frac{8}{3}}$
cevap:

$$x = \frac{80}{13}p^{\frac{5}{3}} + cp^{-\frac{1}{2}}$$
$$y = \frac{50}{13}p^{\frac{8}{3}} + cp^{\frac{1}{2}}$$

6. $y = -x(y')^2 + 7(y')^3$
cevap:

$$x = \frac{c+21p^2+14p^3}{2(1+p)^2}$$
$$y = \frac{-cp^2+14p^3+7p^4}{2(1+p)^2}$$

7. $y = -xy' + 5(y')^{\frac{5}{2}}$
cevap:

$$x = \frac{25}{8}p^{\frac{3}{2}} + cp^{-\frac{1}{2}}$$
$$y = \frac{15}{8}p^{\frac{5}{2}} - cp^{\frac{1}{2}}$$

B) Aşağıdaki Clairaut diferansiyel denklemlerinin genel ve tekil çözümlerini bulunuz.

1. $y = xy' + ((y')^2 + 1)^{\frac{1}{3}}$
cevap: Genel çözüm: $y = Ax + ((A)^2 + 1)^{\frac{1}{3}}$
Tekil çözüm:

$$x = -\frac{2}{3}p\left((p)^2 + 1\right)^{\frac{-2}{3}}$$
$$y = -\frac{2}{3}p^2\left((p)^2 + 1\right)^{\frac{-2}{3}} + \left((p)^2 + 1\right)^{\frac{1}{3}}$$

2. $y = xy' + arctan\ y'$
cevap: Genel çözüm: $y = Ax + arctan\ A$
Tekil çözüm:

$$x = \frac{-1}{1+(p)^2}$$
$$y = -\frac{p}{1+(p)^2} + arctan\ p$$

3. $y = xy' + \frac{2}{(y')^2}$
cevap: Genel çözüm: $y = Ax + \frac{2}{(A)^2}$
Tekil çözüm:

$$x = \frac{4}{(p)^3}$$
$$y = \frac{6}{(p)^2} + arctan\ p$$

veya $2y^3 = 27x^2$

4. $y = xy' + ((y')^4 + 1)^{\frac{1}{4}}$

cevap: Genel çözüm: $y = Ax + ((A)^4 + 1)^{\frac{1}{4}}$
Tekil çözüm:

$$x = -p^3\left((p)^4 + 1\right)^{\frac{-3}{4}}$$
$$y = \left((p)^4 + 1\right)^{\frac{-3}{4}}$$

5. $y = xy' + 3\left((y')^2 + 1\right)^{\frac{-1}{2}}$
cevap: Genel çözüm: $y = Ax + 3\left((A)^2 + 1\right)^{\frac{-1}{2}}$
Tekil çözüm:

$$x = 3p\left((p)^2 + 1\right)^{\frac{-3}{2}}$$
$$y = 3p^2\left((p)^2 + 1\right)^{\frac{-3}{2}} + 3\left((p)^2 + 1\right)^{\frac{-1}{2}}$$

6. $y = xy' + \frac{1}{1+(y')^2}$
cevap: Genel çözüm: $y = Ax + \frac{1}{1+(A)^2}$
Tekil çözüm:

$$x = \frac{2p}{(1+(p)^2)^2}$$
$$y = \frac{1+3p^2}{(1+(p)^2)^2}$$

7 . $y = xy' - 4(y')^3$
8 . $y = xy' + \frac{1}{4y'}$
9 . $y = xy' - e^{y'}$
10. $y = xy' + \frac{1}{1+y'}$
11. $y = xy' - \frac{y'^2}{4}$

C) Aşağıda birer çözümleri verilmiş Riccati diferansiyel denklemlerinin genel çözümlerini bulunuz.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2y - 2x}{1 - x^3}$, $f_1(x) = -x^2$
cevap: Genel çözüm: $y = \frac{1-cx^2}{c-x}$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x(y^2-1)}{x^4-1}$, $f_1(x) = x^2$
cevap: Genel çözüm: $y = \frac{x^2+c(1+x^2)}{1+c(1+x^2)}$

3. $(1 - x^9)\frac{dy}{dx} = y^2 - 7x^8y - 8x^7$, $f_1(x) = -x^8$

cevap: Genel çözüm: $y = \frac{1-cx^8}{c-x}$

4. $\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}, \quad f_1(x) = \frac{1}{x}$
cevap: Genel çözüm: $y = \frac{1}{x} + \frac{2x}{c-x}$

5. 2. problemdeki Riccati denkleminin iki özel çözümü $f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = 1$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.

6. Bir Riccati denkleminin üç özel çözümü $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 1$ ve $f_3(x) = -1$ olduğuna göre, genel çözümünü bulunuz. Bu Riccati denklemini yazınız.
cevap: 2. problemdeki Riccati denklemidir.

7. $(1-x^4)\frac{dy}{dx} = y^2 - 2x^3y - 3x^2, \quad f_1(x) = \lambda x^3$

8. $y' = y^2 + (1-2x)y + x^2 - x + 1, \quad f_1(x) = x$
9. $y' = xy^2 + (1-2x)y + x - 1, \quad f_1(x) = 1$
10. $y' = (y-1)(y+\frac{1}{x}), \quad f_1(x) = 1$
11. $y' = (x+y)(x+y-2), \quad f_1(x) = 1-x$
12. $y' = e^{-x}y^2 + y - e^x, \quad f_1(x) = e^x$
13. $y' = x^3(y-x)^2 + \frac{y}{x}, \quad f_1(x) = x$

Ç) Aşağıdaki y, y' ve y'''ye göre homojen denklemlerin genel çözümlerini bulunuz:

1. $yy'' - (y')^2 - xy^2 = 0$
cevap: Genel çözüm: $y = c_2 e^{\frac{1}{6}x^3 + c_1 x}$

2. $yy'' - (y')^2 = 0$
cevap: Genel çözüm: $y = c_2 e^{c_1 x}$

D) Aşağıdaki y bulundurmayan özel ikinci basamak denklemlerin genel çözümlerini bulunuz:

1. $(1-x^2)y'' = 2 + xy'$
cevap: Genel çözüm: $y = (arcsin\ x)^2 + c_1 arcsin\ x + c_2$

2. $xy'' + y' + x = 0$
cevap: Genel çözüm: $y = -\frac{1}{4}x^2 + c_1 \ln|x| + c_2$

3. $y'' = (1 + (y')^2)^{3/2}$
cevap: Genel çözüm: $x + y + c_2 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y+c_1}{1-y-c_1} \right|$

4. $y'' - 2y' = 1$
5. $y'' + y' = e^x$
6. $xy'' = y'$
7. $yy'' = y'^2$
8. $xy'' + y' = 3x^2 - x$
9. $\cot xy'' + y' + 1 = 0$
10. $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 2x$
11. $y'' + 2x(1 + y')^2 = 0$

E) Aşağıdaki x bulundurmayan özel ikinci basamak denklemlerin genel çözümlerini bulunuz:

1. $y'' = y^{-\frac{1}{2}}$
2. $y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$ cevap: $y = \frac{1}{4}c_1x^2 - \frac{1}{c_1} \ln |x| + c_2$
3. $2yy'' = 1 + (y')^2$ cevap: $y = (c_1x + c_2)^2 + 2c_1$
4. $y'' = (1 + (y')^2)^{3/2}$ cevap: $x + y + c_2 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y+c_1}{1-y-c_1} \right|$
5. $y'' + 3y^2y' = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = -1$
6. $y'' = 2yy', \quad y(0) = 1, y'(0) = 5$
7. $2yy'' = 1 + (y')^2, \quad y(0) = 2, y'(0) = -1$
8. $y'' = (y')^2 + y = 0, \quad y(0) = \frac{-1}{2}, y'(0) = -1$

Okunması tavsiye edilen kitaplar:

I. Temel Yöntemler:
Agnew (1)
Kaplan (30)
Ford(17)
Rainville (45)
Martin ve Reisner (38)

II. Daha İleri Yöntemler:
Kamke (28)
Ince (26)

Bölüm 3

1. Basamak Denklem Uygulamalari

Birinci bölümde diferansiyel denklemlerin, bilim ve mühendisliğin çok çeşitli problemlerinin matematik ifadelerinin yazılması sırasında ortaya çıktıklarını söylemiştik. Bu bölümde, ikinci bölümde incelenen bazı birinci basamak diferansiyel denklemleri meydana çıkaran problemleri ele alacağız. Önce problemi matematik diliyle ifade edip bir diferansiyel denklem elde edeceğiz. Daha sonra bu denklemi çözerek çözümü, ilk problemde verilen fiziksel büyüklükler cinsinden yorumlamağa çalışacağız.

3.1 Dik ve Eğik Yürüngeler

A. Dik Yürüngeler

TANIM.

$$F(x, y, c) = 0 \tag{3.1}$$

xy-düzleminde verilmiş bir parametreye bağlı bir eğri ailesi olsun. (3.1) ailesinin eğrilerini dik açıyla kesen eğriye, verilen ailenin *dik yürünge*'si denir.

Örnek 3.1. Merkezi orijinde, c yarıçaplı çemberlerin

$$x^2 + y^2 = c^2 \tag{3.2}$$

ailesini gözönüne alalım. Koordinat merkezinden geçen

$$y = kx \tag{3.3}$$

gibi her doğru, (3.2) çember ailesinin bir dik yürüngesidir. Tersine olarak (3.2) ailesinin her çemberi, (3.3) doğrularının dik yürüngeleridir. (3.2) ve (3.3) aileleri birbirlerinin dik yürüngeleridir. Şekil 3.1'de (3.2) çember ailesinin bazı elemanları kesiksiz çizgilerle, (3.3) doğru ailesinin bazı elemanları da kesikli çizgilerle gösterilmişlerdir.

Şekil 3.1

Verilen bir eğri ailesinin dik yürüngelerinin bulunması problemine birçok fiziksel meselede rastlanır. Mesela iki boyutlu elektrik alanında kuvvet (akı) çizgileri ve eşpotansiyel eğrileri birbirlerinin dik yürüngeleridir.

Şimdi

$$F(x, y, c) = 0 \tag{3.1}$$

eğri ailesinin dik yörüngelerini bulma problemiyle ilgileneceğiz. (3.1) ailesinin diferansiyel denklemini, (3.1)'i kapalı olarak türetip, elde edilen denklem ile (3.1) denklemi arasında c'yi yokederek buluruz. (3.1) ailesinin diferansiyel denkleminin

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3.4}$$

şeklinde yazılabileceğini varsayalım. Böylece (3.1) ailesinin (x, y) noktasından geçen C eğrisinin bu noktadaki eğimi $f(x, y)$ ile verilecektir. Verilen ailenin dik yürüngesinin her eğrisi, ailenin her eğrisini dik olarak kestiğinden, C'nin (x, y)'deki dik yürüngesinin bu noktadaki eğimi

$$-\frac{1}{f(x, y)}$$

olacaktır. Böylece dik yürüngelerin diferansiyel denklemi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)} \tag{3.5}$$

olur. (3.5) denkleminin

$$G(x, y, c) = 0$$

genel çözümü, verilen (3.1) ailesinin dik yürüngelerini temsil eder.

Bu işlemi şöyle özetleyebiliriz:

Bir eğri ailesinin dik yürüngelerini bulma yöntemi.

1. Adım. Verilen ailenin

$$F(x, y, c) = 0 \tag{3.1}$$

denkleminden yararlanarak bu ailenin

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3.4}$$

diferansiyel denklemini bul.

2. Adım. 1. adımda bulunan $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ diferansiyel denkleminde $f(x, y)$'yi tersinin ters işaretlisi olan $-\frac{1}{f(x,y)}$ ile değiştir. Bu, dik yürüngelerin

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)} \tag{3.5}$$

diferansiyel denklemini verir.

3. Adım. (3.5) diferansiyel denkleminin

$$G(x, y, c) = 0$$

genel çözümünü bul. Böylece dik yürüngeler ailesini elde etmiş olursun.

Uyarı. Birinci adımda eğri ailesinin (3.4) diferansiyel denklemini bulurken, c parametresinin yokedilmiş olmasına dikkat ediniz.

Örnek 3.2. 3.1 örneğinde merkezi orijinde, c yarıçaplı çemberlerin

$$x^2 + y^2 = c^2 \tag{3.2}$$

ailesinin dik yürüngelerinin, merkezden geçen doğruların

$$y = kx \tag{3.3}$$

ailesi olduğunu görmüştük. Şimdi bunu yukarıdaki yolu izleyerek doğrulayalım.

1. Adım. Verilen ailenin

$$x^2 + y^2 = c^2 \tag{3.4}$$

denkleminin türevini alarak

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

ve bundan da (3.2) ailesinin diferansiyel denklemi olarak

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{3.6}$$

elde edilir. (Bu durumda c sabitinin kendiliğinden kaybolduğuna dikkat ediniz.)

2. Adım. 1. (3.6) diferansiyel denkleminde $-\frac{x}{y}$'yi tersinin ters işaretlisi olan $\frac{y}{x}$ ile değiştirip, dik yürüngelerin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \tag{3.7}$$

diferansiyel denklemini elde edelim.

3. Adım. Şimdi (3.7) diferansiyel denklemini çözelim. Değişkenleri ayırarak

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

ve integre ederek

$$y = kx \tag{3.3}$$

elde ederiz. Bu (3.7) diferansiyel denkleminin genel çözümüdür ve böylece (3.2) ile verilen çember ailesinin dik yürüngelerinin ailesini (x=0 doğrusu dışında) temsil eder.

Örnek 3.3. $y = cx^2$ parabol ailesinin dik yürüngelerini bulunuz.

1. Adım. Önce verilen

$$y = cx^2 \tag{3.8}$$

eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulacağız. (3.8) denkleminin türevini alarak

$$\frac{dy}{dx} = 2cx \tag{3.9}$$

elde ederiz. (3.8) ve (3.9) arasında c'yi yokedersek, (3.8) ailesinin diferansiyel denklemi olarak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \tag{3.10}$$

buluruz.

2. Adım. Şimdi (3.10)'daki $\frac{2y}{x}$'i, tersinin ters işaretlisi ile değiştirirsek, dik yürüngelerin ailesinin diferansiyel denklemi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \tag{3.11}$$

olur.

3. Adım. Şimdi (3.11) diferansiyel denklemini çözeceğiz. Değişkenleri ayırarak

$$2y\ dy = -x\ dx$$

elde ederiz ve bunu integre ederek (3.11) diferansiyel denkleminin genel çözümünü, k keyfî bir sabit olmak üzere

$$x^2 + 2y^2 = k^2$$

olarak buluruz. Bu, (3.8) ile verilen parabol ailesinin dik yürüngelerinin ailesidir.

Şekil 3.2

Bunlar merkezleri orijinde, büyük eksenleri x-ekseni üzerinde elipslerdir. İlk parabol ailesinin ve onların dik yürüngeleri olan elips ailesinin bazı elemanları Şekil 3.2'de görülmektedir.

B. Eğik Yürüngeler

TANIM.

$$F(x, y, c) = 0 \tag{3.12}$$

xy-düzleminde verilmiş, bir parametreye bağlı eğri ailesi olsun. (3.12) ailesinin eğrilerini sabit bir $\alpha \neq 90°$ açısıyla kesen eğriye, verilen ailenin *eğik yürünge*'si denir.

Bir eğri ailesinin diferansiyel denkleminin

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3.13}$$

olduğunu varsayalım. Böylece (3.13) ailesinin (x, y) noktasından geçen C eğrisinin bu noktadaki eğimi $f(x, y)$ ve buradaki teğetinin eğim açısı $arctan[f(x, y)]$ olacaktır. Verilen ailenin eğik yürüngesinin bu eğriyi α açısı altında kesen elemanının teğetinin (x, y) noktasındaki eğim açısı

$$arctan[f(x, y)] + \alpha$$

olacaktır. Böylece eğik yürüngelerin eğimi

$$tan\{arctan[f(x, y)] + \alpha\} = \frac{f(x, y) + \tan\alpha}{1 - f(x, y)\tan\alpha}$$

ve diferansiyel denklemi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y) + \tan\alpha}{1 - f(x, y)\tan\alpha}$$

olur. Böylece verilen bir eğri ailesinin eğrilerini sabit bir $\alpha \neq 90°$ açısıyla kesen eğik yürüngelerinin ailesini bulmak için daha önce dik yürüngeler için anlattığımız üç adımı atmalıyız. Ancak 2. adım aşağıdaki gibi değiştirilmelidir.

2'. Adım. Verilen ailenin $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ diferansiyel denkleminde $f(x, y)$'yi

$$\frac{f(x, y) + \tan\alpha}{1 - f(x, y)\tan\alpha} \tag{3.14}$$

ile değiştir.

Örnek 3.4. $y = cx$ doğru ailesini $45°$ altında kesen eğik yürüngelerin ailesini bulunuz.

1. Adım. $y = cx$'den $\frac{dy}{dx} = c$ buluruz. Bu ikisi arasında c'yi yokedersek verilen doğru ailesinin diferansiyel denklemi olarak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \tag{3.15}$$

elde ederiz.

2. Adım. Şimdi (3.15)'deki $\frac{y}{x}$'i, $\tan 45° = 1$ olduğunu da gözönüne alarak

$$\frac{f(x,y) + \tan\alpha}{1 - f(x,y)\tan\alpha} = \frac{\frac{y}{x} + 1}{1 - \frac{y}{x}} = \frac{x+y}{x-y}$$

ile değiştirelim. Böylece eğik yürüngelerin ailesinin diferansiyel denklemini

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \tag{3.16}$$

olarak buluruz.

3. Adım. Şimdi (3.16) diferansiyel denklemini çözeceğiz. Bunun bir homojen denklem olduğunu görerek $y = xv$ dönüşümü yapar ve

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{1-v}$$

elde ederiz. Sadeleştirmelerden sonra

$$\frac{(v-1)dv}{v^2+1} = -\frac{dx}{x}$$

ve integre ederek

$$\frac{1}{2}\ln(v^2+1) - arctan\ v = -\ln|x| - \ln|c|$$

veya

$$\ln[c^2x^2(v^2+1)] - 2arctan\ v = 0$$

elde edilir. Geri dönüşüm yapılırsa verilen doğru ailesinin eğik yürüngelerinin ailesi

$$\ln[c^2(x^2+y^2)] - 2arctan\frac{y}{x} = 0$$

olarak bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1.'den 9.'ya kadar problemlerde verilen eğri ailelerinin dik yörüngelerini bulunuz. Her seferinde verilen ailenin ve dik yörüngelerinin bir kısım elemanlarını aynı koordinat sisteminde çiziniz.

1. $y = cx^3$	2. $y^2 = cx$	3. $cx^2 + y^2 = 1$
4. $y = e^{cx}$	5. $y = x - 1 + ce^{-x}$	6. $x - y = cx^2$
7. $x^2 + y^2 = cx^3$	8. $x^2 = 2y - 1 + ce^{-2y}$	9. $x = \frac{y^2}{4} + \frac{c}{y^2}$
10. $x^2 - y^2 = c$	11. $y^2 = cx^3$	12. $y = (x - c)^2$
13. $x^2 + 2y^2 = cy$	14. $x^2 - y^2 + cx = 0$	15. $x^2 + y^2 = cx$

16. Merkezleri orijinde, bir odakları $(c, 0)$ noktasında ve yarı büyük eksen uzunlukları $2c$ olan elipslerin ailesinin dik yürüngelerini bulunuz.

17. y-eksenine orijinde teğet çemberlerin ailesinin dik yürüngelerini bulunuz.

18. K sabitini; $y = c_1x^2 + K$ paraboller ailesi, $x^2 + 2y^2 - y = c_2$ elips ailesinin dik yürüngeleri olacak şekilde bulunuz.

19. n sabitini; $x^n + y^n = c_1$ eğri ailesi, $y = \frac{x}{1-c_2x}$ ailesinin dik yürüngeleri olacak şekilde bulunuz.

20. Bir eğri ailesinin dik yürüngelerinin ailesi yine kendisi ise, bu aileye *kendisine dik eğri ailesi* denir. $y^2 = 2cx + c^2$ parabol ailesinin kendine dik olduğunu gösteriniz.

3.2 Mekanik Problemleri

A. Giriş

Diferansiyel denklemler bilgimizi mekanik problemlerine uygulamağa başlamadan önce bu konunun bazı ilkelerini kısaca hatırlayalım. Bir cismin *momentum*'u, cismin m kütlesi ile v hızının mv çarpımı olarak tanımlanır. v hızı ve dolayısıyla momentum vektörel büyüklüklerdir. Şimdi mekaniğin şu temel yasasını ifade edelim:

Newton'ın İkinci Kanunu

Bir cismin momentumunun zamana göre değişim hızı, cisme etkiyen bileşke kuvvet ile orantılıdır ve yönü de bileşke kuvvet yönündedir. Matematiğin diliyle bunu, m cismin kütlesi, v hızı , F cisme etkiyen kuvvetlerin bileşkesi ve K da orantı katsayısı olmak üzere

$$\frac{d}{dt}(mv) = KF$$

ile ifade edebiliriz. m kütlesinin sabit olduğunu varsayarsak bu formül

$$m\frac{dv}{dt} = KF$$

veya $a = \frac{dv}{dt}$ ivme olmak üzere

$$a = K\frac{F}{m} \tag{3.17}$$

veya $k = \frac{1}{K}$ tanımıyla

$$F = kma \tag{3.18}$$

haline gelir. Kütle sabit kabul edidiğinde Newton'ın ikinci yasasının sözlü ifadesinin karşılığı (3.17) ifadesidir. Ancak biz burada onun dengi olan (3.18)'i kullanacağız. k orantı katsayısının büyüklüğü, kuvvet, kütle ve ivme için kullanılan birimlere bağlıdır. $k = 1$ yapan birim sistemlerinin, en basit sistemler oldukları bellidir. Böyle bir sistem kullanıldığında (3.18) ifadesi

$$F = ma \tag{3.19}$$

haline gelir. İşte Newton'ın ikinci kanunu bu şekliyle kullanacağız. (3.19) denkleminin vektörel bir eşitlik olduğuna dikkat ediniz.

$k = 1$ veren çeşitli birim sistemleri vardır. Biz burada santimetre-gram-saniye sistemi (cgs) ve metre-kilogram-saniye sitemi (mks) kullanacağız. Bu sistemlerdeki çeşitli birimler aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Birim	cgs sistemi	mks sistemi
kuvvet	din	newton
kütle	gram	kilogram
uzunluk	santimetre	metre
zaman	saniye	saniye
ivme	cm/s^2	m/s^2

Tablo 3.1

Dünyanın cisimlere uyguladığı yerçekim kuvvetine ağırlık dediğimizi hatırlayalım. Ağırlık bir çeşit kuvvet olduğundan kuvvet birimleriyle ölçülür. Böylece (cgs) sisteminde ağırlık dyn ile ölçulür.

Newton'ın ikinci kanununu serbest düşen cisme uygulayalım. m cismin kütlesi, w da ağırlığı olsun. Serbest düşmede sürtünmenin olmadığı kabul edildiğinden cisme etkiyen yegane kuvvet, w ağırlığıdır. İvme, yerçekiminden ileri gelen ivmedir. Dolayısıyla (cgs) sisteminde yeryüzüne yakın bölgelerde 980 cm/s^2 kadardır. Böylece $F = ma$ ikinci Newton yasası, $w = mg$ halini alır. Böylece sık sık kullanacağımız

$$m = \frac{w}{g} \tag{3.20}$$

bağıntısını elde ederiz.

Şimdi de doğrusal hareket yapan, yani bir L doğrusu üzerinde hareket halinde olan bir B cismi gözönüne alalım. L doğrusu üzerinde sabit bir O noktasını başlangıç noktası, sabit bir yönü pozitif yön ve bir uzunluk parçasını da uzunluk birimi seçeceğiz. O zaman B'nin bulunduğu yerin O noktasına göre koordinatı bize B'nin uzaklığını ya da yerdeğiştirmesini söyler. (Şekil 3.3'e bakınız.)

B'nin *anî hız*'ı x'in zamanla değişim oranıdır:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

anî ivmesi de v'nin zamanla değişim oranıdır:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

x, v, a'nın üçünün de vektörel büyüklükler olduğuna dikkat ediniz. L üzerinde pozitif yönde olan bütün kuvvet, yerdeğiştirme, hız ve ivmeler pozitif büyüklükler, negatif yönde olanlar da negatif büyüklüklerdir.

Şekil 3.3

$F = ma$ ikinci Newton kanununu, B'nin L üzerindeki hareketine,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

olduğuna dikkat ederek uygularsak, kanunu aşağıdaki dört şekilden birinde ifade edebiliriz:

$$m\frac{dv}{dt} = F \tag{3.21}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F \tag{3.22}$$

$$mv\frac{dv}{dx} = F \tag{3.23}$$

Burada F, cisme etkiyen kuvvetlerin bileşkesidir. Kanunun bu şekillerinden hangisini kullanacağımıza, kuvvetin ifade ediliş şeklinden karar veririz. Mesela F sadece t zamanının fonksiyonu olarak verilmiş ve v hızını zamanın fonksiyonu olarak bulmak istiyorsak, (3.21)'i kullanırız. Halbuki F, x yerdeğiştirmesinin fonksiyonu olarak verilmiş ve v hızını da yerdeğiştirmenin fonksiyonu olarak bulmak istiyorsak, (3.23)'ü kullanırız.

B. Düşen Cisim Problemleri

Şimdi yere doğru düşen cisimlerin hareketlerinden bazı örnekler ele alacağız. Böyle bir durumda cisim düşerken havanın direncine maruz kalır. Hava direncinin büyüklüğü cismin hızına bağlıdır ancak bu bağımlılığı tam olarak ifade edecek hiçbir genel kanun mevcut değildir. Bazı hallerde $R = kv$ formülü oldukça tatminkar görüldüğü halde bazen $R = kv^2$ daha doğru olur. Her iki durumda da k orantı katsayısı cismin şekli de dahil olmak üzere çeşitli etkenlere bağlıdır. İnceleyeceğimiz örneklerin herbirinde uygun bir direnç formülü kullanacağız. Böylece bu örneklerde, gerçek direnç formülü yerine yaklaşık ifadesinin kullanılması ve bazı nisbeten önemsiz etkenlerin ihmal edilmesi sebebiyle, gerçek problemlerin idealleştirilmiş hallerini incelemiş olacağız.

Örnek 3.5. 8 kg kütleli bir cisim çok yükseklerde durmakta iken yere doğru düşmeğe başlamıştır. Düşerken bu cisme hava direnci etkimektedir. v, cismin m/s cinsinden hızı olmak üzere hava direncinin sayısal olarak $2v$ kadar newton olduğunu kabul ediyoruz. t. saniyede cismin hızını ve düşme mesafesini bulunuz.

Formülasyon. Pozitif x eksenini B cisminin düşme yolu boyunca ve aşağı doğru, başlangıç noktasını da cismin düşmeğe başladığı noktada alıyoruz. Cisme etkiyen kuvvetler:

(1) F_1, kütlesi 8 kg olan cismin ağırlığı, $w = mg$'den $W = 8 \times 9.8$. Aşağı doğru etkiyor, dolayısı ile pozitif.

(2) F_2, hava direnci. Sayısal olarak $2v$'ye eşit, yukarı doğru etkiyor, böylece $-2v$ gibi negatif bir büyüklük.

(Bu kuvvetleri gösteren Şekil 3.4'e bakınız.)

Şekil 3.4

Burada Newton'ın ikinci kanunu $F = ma$

$$m\frac{dv}{dt} = F_1 + F_2$$

halini alır. Bilinenler yerlerine konursa

$$8\frac{dv}{dt} = 78.4 - 2v \tag{3.24}$$

olur. Cisim başlangıçta durmakta olduğundan, başlangıç şartı olarak

$$v(0) = 0 \tag{3.25}$$

alabiliriz.

Çözüm. (3.24) denklemi ayrılabilen bir denklemdir. Değişkenlerini ayırarak

$$\frac{dv}{39.2 - v} = \frac{1}{4}dt$$

ve integre ederek

$$-\ln|39.2 - v| = \frac{1}{4}t + c_0$$

veya

$$39.2 - v = c_1 e^{-\frac{1}{4}t}$$

buluruz. (3.25) başlangıç şartını kullanırsak t anındaki hız olarak buradan

$$39.2 = c_1 \quad \text{ve} \quad v = 39.2\left(1 - e^{-\frac{1}{4}t}\right) \tag{3.26}$$

bulunur. Şimdi t zamanında düşülen mesafeyi bulacağız. (3.26)'yı

$$\frac{dx}{dt} = 39.2\left(1 - e^{-\frac{1}{4}t}\right) \tag{3.26}$$

şeklinde yazar ve $x(0) = 0$ olduğunu gözönüne alırsak, integre ederek

$$x = 39.2\left(t + 4e^{-\frac{1}{4}t}\right) + c_2$$

buluruz. $t = 0$'da $x = 0$ olduğundan $c_2 = -156.8$ olur. Böylece düşme mesafesi şöyle olur:

$$x = 39.2\left(t + 4e^{-\frac{1}{4}t} - 4\right) \tag{3.27}$$

Sonuçların Yorumu. (3.26) ifadesi $t \to \infty$ iken v hızının 39.2 - m/s'lik *limit hız*'a ulaşacağını gösterir. Aynı zamanda bu limit hıza çok kısa zamanda ulaşılacağını görüyoruz. (3.27) denklemi $t \to \infty$ için $x \to \infty$ olacağını gösteriyor. Bu acaba cismin dünyayı yararak yoluna ilelebet devam edeceğini mi söylüyor? Kuşkusuz hayır. Yer yüzeyine çarpar çarpmaz hareket duracaktır. Peki bu herkesin akıl edebileceği sonu, (3.27)'deki hareket denklemiyle nasıl bağdaştırabiliriz? Gayet basit. Cisim yeryüzüne varınca artık (3.24) diferansiyel denklemi geçerliliğini yitirir ve dolayısıyla (3.27)'nin de hükmü kalmaz.

Örnek 3.6. Bir paraşütçü paraşütünü ve diğer gerekli techizatını yüklenmiş olarak dururken yere doğru düşmeye başlıyor. Adamın techizatı ile birlikte kütlesi m kg'dır. Paraşüt açılıncaya kadar newton cinsinden R hava direnci; k orantı katsayısı ve v de m/s cinsinden hız olmak üzere sayısal olarak kv^2'ye eşittir. Paraşüt açıldıktan sonra ise bu direnç çok daha fazladır. O zaman hava direncinin; K, k'ya göre çok büyük ($K \gg k$) olmak üzere Kv^2 olduğunu varsayalım. Paraşüt, düşme başladıktan t_1 saniye sonra açılmış ise, $t_2 > t_1$ anındaki hız nedir?

Formülasyon. Pozitif x eksenini B cisminin düşme yolu boyunca ve aşağı doğru, başlangıç noktasını da cismin düşmeğe başladığı noktada alıyoruz. Problemi iki kısma ayıralım: (1) paraşüt açılmadan *önce*, (2) paraşüt açıldıktan *sonra.*

Önce (1) problemini ele alalım. Paraşüt açılmadan *önce*, paraşütçüye etkiyen kuvvetler:

(1) $F_1 = mg$ newton değerinde ve aşağı doğru etkidiğinden pozitif olan ağırlık.

(2) F_2, saysal olarak kv^2 olan hava direnci, yukarı doğru etkidiğinden negatif $-kv^2$.

Newton'ın ikinci hareket kanunu $F = ma$, $F = F_1 + F_2$ burada

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

halini alır. Paraşütçü durmakta iken düşmeğe başladığından $t = 0$'da $v = 0$ olur. Böylece paraşüt açılmadan *önce*'ki hareketi temsil eden (1). problem

$$(1) \qquad \begin{cases} m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \\ v(0) = 0 \end{cases} \qquad (3.28-3.29)$$

olarak formüle edilir. Şimdi (2). probleminin formülasyonuna geçelim. Daha önceki gibi düşünerek paraşüt açıldıktan *sonra*, paraşütçüye etkiyen kuvvetler:

(1) $F_1 = mg$ newton olan ağırlık.

(2) $F_2 = -Kv^2$ olan hava direnci (daha önce $-kv^2$ idi).

Daha önceki gibi hareket ederek paraşüt açıldıktan *sonra*'ki zamanla ilgili (2). problemi

$$(2) \qquad \begin{cases} m\frac{dv}{dt} = mg - Kv^2 \\ v(t_1) = v_1 \end{cases} \qquad (3.30-3.31)$$

olarak formüle ederiz. Burada v_1, paraşütün açıldığı t_1 anında kazanılmış olan hızdır.

Çözüm. Önce (1). problemi ele alacağız. (3.28) denklemi ayrılabilen bir denklemdir. Değişkenlerini ayırarak

$$\frac{dv}{mg - kv^2} = \frac{1}{m}dt$$

ve integre ederek

$$\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{mg}{k}}+v}{\sqrt{\frac{mg}{k}}-v}\right| = 2g\sqrt{\frac{k}{mg}}t + c_0$$

veya $\sqrt{\frac{mg}{k}} = \gamma$ diyerek

$$\frac{\gamma+v}{\gamma-v} = c_1 e^{\frac{2g}{\gamma}t}$$

buluruz. Buradan hızı

$$v = \gamma\left[\frac{c_1 e^{\frac{2g}{\gamma}t}-1}{c_1 e^{\frac{2g}{\gamma}t}+1}\right] \tag{3.32}$$

olarak elde ederiz ve (3.29)'daki başlangıç şartını kullanarak $c_1 = 1$ buluruz. Böylece (1). problemin çözümü $0 < t < t_1$ zaman aralığında geçerli olmak üzere

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\left[\frac{e^{2g\sqrt{\frac{k}{mg}}t}-1}{e^{2g\sqrt{\frac{k}{mg}}t}+1}\right] \tag{3.33}$$

olacaktır.

$$\tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$$

olduğunu hatırlarsak (3.33)'ü daha temiz ve belki de daha esrarlı hale getirebilir,

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(g\sqrt{\frac{k}{mg}}t\right)$$

şeklinde yazabiliriz.

Şimdi (2). problemin çözümüne bakalım. (3.30) denklemi esas itibariyle (3.28) gibi olduğundan, (3.32)'yi kullanarak ve k yerine K alarak

$$v = \sqrt{\frac{mg}{K}}\left[\frac{c_2 e^{2g\sqrt{\frac{K}{mg}}t}-1}{c_2 e^{2g\sqrt{\frac{K}{mg}}t}+1}\right] \tag{3.34}$$

yazabiliriz. Şimdi başlangıç sartı artık, $t = t_1$'de $v = v_1$ olmasıdır ve v_1, (3.33)'te $t = t_1$ konularak elde edilir:

$$v_1 = \sqrt{\frac{mg}{k}} \left[\frac{e^{2g\sqrt{\frac{k}{mg}}t_1} - 1}{e^{2g\sqrt{\frac{k}{mg}}t_1} + 1} \right]$$

(3.34) denklemine $v(t_1) = v_1$ şartını uygularsak

$$\frac{e^{2g\sqrt{\frac{k}{mg}}t_1} - 1}{e^{2g\sqrt{\frac{k}{mg}}t_1} + 1} = \frac{c_2 e^{2g\sqrt{\frac{K}{mg}}t} - 1}{c_2 e^{2g\sqrt{\frac{K}{mg}}t} + 1}$$

buluruz. Buradan c_2'yi çözersek

$$c_2 = e^{\frac{2g}{\sqrt{mg}}[\sqrt{k} - \sqrt{K}]t_1}$$

elde ederiz. Böylece (2). problemin çözümünü, $t > t_1$ zaman aralığında geçerli olmak üzere

$$v = \sqrt{\frac{mg}{K}} \left\{ \frac{e^{\frac{2g}{\sqrt{mg}}[\sqrt{K}(t-t_1) - \sqrt{k}t_1]} - 1}{e^{\frac{2g}{\sqrt{mg}}[\sqrt{K}(t-t_1) - \sqrt{k}t_1]} + 1} \right\} \tag{3.35}$$

olarak buluruz. Daha önce olduğu gibi bunu istersek

$$v = \sqrt{\frac{mg}{K}} \tanh \left[g\sqrt{\frac{K}{mg}}(t - t_1) + \sqrt{k}t_1 \right]$$

şeklinde yazabiliriz.

Sonuçların Yorumu. Önce (1). problemin (3.33) ile verilen çözümünü ele alalım. Buna göre, $t \to \infty$ iken v hızı $\sqrt{mg/k}$ limit hızına gider. Böylece paraşüt açılmazsa bahtsız paraşütçünün yere çakıldığı andaki hızı bu kadar olacaktır. Ancak problemimizin ifadesine göre paraşüt t_1 anında açılacaktır. Biraz düşüncelilik yaparak bu t_1 zamanının, yere düşmek için gerekli olan T zamanından küçük ($t_1 \ll T$) olduğunu varsayacağız. O zaman (2). problemin (3.35)'deki çözümüne bakarak $t \to \infty$ iken v hızının, $\sqrt{mg/K}$ limit hızına gittiğini göreceğiz.

Böylece paraşütün yerden yeterince yüksekte açıldığını varsayarsak, paraşütçü nihayet yere indiğinde hızı bu kadar olacaktır. Bu gözlemlerimizi şöylece toparlayalım:

1. Paraşüt açılmazsa, paraşütçü yere $\sqrt{mg/k}$ hızı ile çakılacaktır.

2. Paraşüt yerden yeterince yüksekte açılmışsa, paraşütçü nihayet yere indiğinde hızı $\sqrt{mg/K}$ olacaktır.

Şimdi bu iki değeri nasıl karşılaştıracağımızı görelim. Paraşüt açılmazdan önce hava direncinin büyüklüğü kv^2'dir. Paraşüt açıldıktan sonra ise K, k'dan oldukça büyük olmak üzere Kv^2 olacaktır. Böylece

$$\sqrt{\frac{mg}{K}} < \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

olacaktır. Buradan şu bilinen sonucu çıkarırız: Açılmış paraşütle yere inme hızı , açılmamış paraşütle yere çakılma hızının ancak çok küçük bir kesridir. Mesela $mg = 100$, $k = \frac{1}{150}$, $K = .8$ alırsak

$$\sqrt{\frac{mg}{K}} = \sqrt{80} \sim 9\ m/s$$

olduğu halde

$$\sqrt{\frac{mg}{k}} = \sqrt{15000} \sim 120\ m/s$$

olacaktır. Buradaki hesaplar biraz karmaşık ama moralimiz bozulmuyor. Paraşütünüz açılsın gerisi mühim değil.

C. *Sürtünme Kuvvetleri*

Cisim pürüzlü bir yüzey üzerinde hareket ederse, sadece hava direncine değil, yüzeyin pürüzlülüğünden dolayı bazı direnç kuvvetlerine de maruz kalacaktır. Bu ilave kuvvete *sürtünme* diyoruz. Fizikte sürtünmenin μN formülüyle veridiği görülmektedir. Burada

1. μ, *sürtünme katsayısı* denilen ve verilen yüzeyin pürüzlülüğüne bağlı olan orantı katsayısıdır.

2. N, yüzeyin cisme uyguladığı normal, yani dik kuvvettir. şimdi sürtünmeyle ilgili bir probleme, Newton'ın ikinci kanununu uygulayacağız.

Örnek 3.7. 40 kg kütlesinde bir cisim, yatayla $30°$ açı yapan metalden yapılma bir eğik düzlemin üst başında durmakta iken harekete başlamıştır. Hava direnci newton cinsinden ve sayısal olarak m/s ile ölçülen hızın yarısına eşittir. Sürtünme katsayısı da $\frac{1}{4}$'tür.

(a) Cismin, serbest bırakıldıktan 2 s sonraki hızı nedir?

(b) Eğik düzlem 20 m uzunluğunda ise, cisim alt uca vardığında hızı ne olur?

Formülasyon. Hareket çizgisi eğik düzlem boyuncadır. Pozitif x eksenini eğik düzlem boyunca ve aşağı doğru, başlangıç noktasını da cismin harekete başladığı noktada alıyoruz. Hava direncini ve sürtünmeyi geçici olarak ihmal edersek, A cismine etkiyen kuvvetler:

(1) Düşey olarak aşağı doğru etkiyen 400 Newton'lık ağırlık kuvveti ve,

(2) Eğik düzlem tarafından cisme dik olarak uygulanan N normal kuvveti olacaktır.(Şekil 3.5'e bakınız.)

Şekil 3.5

Ağırlığın eğik düzleme parelel ve dik bileşenleri sırasıyla

$$400 \times \sin 30° = 200$$

ve

$$400 \times \cos 30° = 200\sqrt{3}$$

olacaktır. Eğik düzleme dik kuvvetler dengede olduğundan N normal kuvvetin şiddeti $200\sqrt{3}$ olur.

Şimdi sürtünmeyi ve hava direncini de hesaba katalım. Eğik düzlemde kaymakta olan cisme etkiyen kuvvetlerin şunlar olduğu görülür:

(1) F_1, ağırlığın eğik düzleme parelel bileşeni, şiddeti 200 newton. Bu kuvvet aşağı doğru etkidiğinden pozitiftir:

$$F_1 = 200$$

(2) F_2, sürtünme kuvveti, şiddeti $\mu N = \frac{1}{4}(200\sqrt{3})$. Bu kuvvet eğik düzlem boyunca yukarı doğru etkidiğinden negatiftir:

$$F_2 = -50\sqrt{3}$$

(3) F_3, hava direnci, şiddeti $\frac{1}{2}v$. $v > 0$ ve yukarı doğru etkidiğinden bu da negatiftir.

$$F_3 = -\frac{1}{2}v$$

Burada $F = ma$ ikinci Newton kanununu uygulayacağız.

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = 200 - 50\sqrt{3} - \frac{1}{2}v \quad \text{ve} \quad m = 40$$

olduğundan

$$40\frac{dv}{dt} = 200 - 50\sqrt{3} - \frac{1}{2}v \tag{3.36}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Cisim harekete sükunetten başladığından, başlangıç şartı

$$v(0) = 0 \tag{3.37}$$

olur.

Çözüm. (3.36) denklemi ayrılabilen bir denklemdir. Değişkenlerini ayırarak

$$\frac{dv}{20 - 5\sqrt{3} - 0.05v} = \frac{1}{4}dt$$

ve integre ederek

$$-20\ln|20 - 5\sqrt{3} - 0.05v| = \frac{1}{4}t + c_0$$

veya

$$20 - 5\sqrt{3} - 0.05v = c_1 e^{-\frac{1}{80}t}$$

buluruz. (3.37) başlangıç şartını kullanırsak t anındaki hız olarak buradan

$$20-5\sqrt{3}=c_1 \quad \text{ve} \quad v=20(20-5\sqrt{3})\left(1-e^{-\frac{1}{80}t}\right) \tag{3.38}$$

bulunur. (3.38)'de $t=2$ koyarak (a) sorusuna hemen cevap verebiliriz:

$$v(2)=20(20-5\sqrt{3})\left(1-e^{-\frac{1}{40}}\right) \quad m/s$$

(b) sorusuna cevap vermek için (3.38)'i integre edip

$$x=20(20-5\sqrt{3})\left(t+80e^{-\frac{1}{80}t}\right)+c_2$$

elde ederiz. $x(0)=0$ olduğundan $c_2=-1600(20-5\sqrt{3})$ bulunur ki t anına kadar alınan yol

$$x=20(20-5\sqrt{3})\left(t+80e^{-\frac{1}{80}t}-80\right) \tag{3.39}$$

olur. Eğik düzlem 20 m uzunluğunda olduğundan, cismin alt uca varması için geçen T zamanı,

$$20=20(20-5\sqrt{3})\left(T+80e^{-\frac{1}{80}T}-80\right)$$

veya

$$\frac{1}{20-5\sqrt{3}}+80=T+80e^{-\frac{1}{80}T}$$

transandant denkleminin çözümüdür. Cismin alt uçtaki V hızı da

$$V=20(20-5\sqrt{3})\left(1-e^{-\frac{1}{80}T}\right)$$

formülünden bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. 20 kg kütleli bir taş çok yükseklerden yere doğru düşüyor. $v\ m/s$ hızıyla düşerken bu taşa sayısal olarak $\frac{1}{2}v$ *newton*'luk bir hava direnci etkiyor.

(a) t saniye sonundaki hızı ve düşme miktarını hesaplayınız.

(b) 5 saniye sonundaki hızı ve düşme miktarını hesaplayınız.

2. 6 kg kütleli bir top, 300 m yüksekten yere doğru düşey olarak 2 m/s hızla fırlatılıyor. $v\ m/s$ hızıyla düşerken bu topa sayısal olarak $\frac{2}{3}v$ *newton*'luk bir hava direnci etkiyor.

(a) 1 dakika sonundaki hızı ve düşme miktarını hesaplayınız.

(b) Top yere hangi hızla çarpar?

3. 1 kg kütleli bir top, 3 m yüksekten yukarı doğru düşey olarak 8 m/s hızla fırlatılıyor. $v\ m/s$ hızıyla düşerken bu topa sayısal olarak $\frac{1}{64}v$ *newton*'luk bir hava direnci etkiyor. Top ne kadar yükselir?

4. 32000 ton kütleli bir gemi durmakta iken, 5000000 newton-luk sabit pervane kuvveti ile harekete başlıyor. Suyun harekete karşı gösterdiği direnç yaklaşık olarak Newton cinsinden 100000.v'dir. Burada v, m/sn cinsindendir.

(a) Geminin hızını zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

(b) Limit hızı, yani $t \to \infty$ için v'nin limitini bulunuz.

(c) Geminin, limit hızının % 80'ine kavuşması için geçecek zamanı bulunuz.

5. İki adam deniz motoru sürüyorlar. Adamların, kayığın ve techizatın toplam ağırlıkları 300 kg tutuyor. Motor kayığa hareket doğrultusunda 100 Newton'lık bir kuvvet uyguluyor. Suyun harekete gösterdiği Newton cinsinden direnç m/sn cinsinden hızın 2 katı kadardır. Kayık durmakta iken harekete başladığına göre, (a) 20 saniye, (b) 1 dakika sonraki hızını bulunuz.

6. 85 kg ağırlığındaki bir adam tarafından kullanılan, 70 kg ağırlığındaki bir kayık, belli bir doğrultuda 40 km/saat hızla başka bir motorlu kayık tarafından çekilmektedir. $t = 0$ anında iki kayığı bağlayan halat aniden koptuğunda, adam hareket doğrultusunda, ve bu doğrultuda kayığa 6 kg'lık bir kuvvet uygulayarak kürek çekmeye başlıyor.

Suyun harekete gösterdiği direnç, m/sn cinsinden hızın 20 katı kadar Newton'dır.

(a) Kayığın, halat koptuktan 15 saniye sonraki hızını bulunuz.

(b) Halat koptuktan kaç saniye sonra kayığın hızını, çekilmekte ikenki hızının yarısına düşecektir?

7. 20 g ağırlığındaki bir mermi, havada duran bir helikopterden, düşey olarak aşağı doğru 400 m/sn namlu hızıyla atılıyor. Havanın direnci, v m/sn cinsinden olmak üzere Newton cinsinden $10^{-5}v^2$'dir. Merminin hızını zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

8. 0.5 kg ağırlığındaki bir top mermisi, yeryüzünden düşey olarak yukarı doğru 300 m/sn namlu hızıyla atılıyor. Havanın direnci, v m/sn cinsinden olmak üzere Newton cinsinden $10^{-4}v^2$'dir.

(a) Merminin hızını zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

(b) Mermi ne kadar yükselir?

9. 8 kg ağırlığındaki bir cisim, durgun bir gölün yüzünden batmaya bırakılıyor. Ağırlığı cismi batırmaya çalışırken kaldırma kuvveti de onu yukarı doğru itiyor. Kaldırma kuvveti 3 kg ve suyun direnci, v m/sn cinsinden olmak üzere Newton cinsinden $2v^2$ olduğuna göre, batan cismin hızını zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

10. 6 kg ağırlığındaki bir cisim, durgun bir gölün yüzeyinin altında serbest bırakılıyor. Kaldırma kuvveti 15 kg'dır ve bu yüzden cisim suyun içinde yükselmektedir. Suyun direnci, v m/sn cinsinden olmak üzere Newton cinsinden v^2'ye eşit olduğuna ve cisim 5 sn'de su üzerine çıktığına göre, cismin su üzerine çıktığı andaki hızını ulunuz.

11. Bir adam yatay ve buzlu bir sahada, yüklü bir kızağı saniyede 3 m hızla itmektedir. Buzlu alanın ortasına geldiğinde itmeyi bırakıyor. Kendi başına yoluna devam eden kızak ve yükünün toplam ağırlığı 50 kg'dır. Hava direnci, v m/sn cinsinden olmak üzere Newton cinsinden $\frac{3}{4}v$ ve buzun üzerinde kayanlara karşı sürtünme katsayısı 0.04 olduğuna göre, kızak yoluna daha ne kadar devam eder?

12. Bir çocuk kızağı ile yokuş aşağı kayarak yatay ve buzlu bir sahaya inip yavaşlamağa başlıyor. Hızının 2 m/sn'ye düştüğü bir anda babası yetişiyor ve hareket doğrultusunda 10 kg'lık sabit bir kuvvet uygulayarak kızağı itmeğe başlıyor. Çocuğun ve kızağının toplam

ağırlığı 50 kg'dır. Hava direnci, v m/sn cinsinden olmak üzere Newton cinsinden $\frac{1}{2}v$ ve buzun üzerinde kayanlara karşı sürtünme katsayısı 0.05 olduğuna göre, baba kızağı itmeğe başladıktan 10 sn sonra hız ne olur?

13. Süt şişeleri taşıyan 12 kg ağırlığında bir kasa, 10 m uzunluğunda ve yatayla 45° açı yapan metal bir eğik düzlemin başında durmakta iken harekete geçiyor. Hava direnci, v m/sn cinsinden olmak üzere Newton cinsinden $\frac{1}{3}v$ ve sürtünme katsayısı 0.4 olduğuna göre

(a) Hareket başladıktan 1 sn sonra hız ne olur?
(b) Kasa alt başa vardığında, hızı ne olur?

14. Bir çocuk yatayla 30° açı yapan bir bayırdan aşağı kayıyor. Çocuğun ve kızağının toplam ağırlığı 50 kg'dır. Hava direnci, v m/sn cinsinden olmak üzere Newton cinsinden $2v$'ye eşittir. Çocuk durmakta iken harekete başladığına ve 5 sn'de 3 m/sn'lik bir hıza ulaştığına göre buzun, üzerinde kayanlara karşı sürtünme katsayısı ne olur?

15. 20 kg ağırlığındaki bir cisim, durgun bir gölün yüzeyinin 25 m üzerinde iken serbest bırakılıyor. Cisim suya değinceye kadar hava direnci, v m/sn cinsinden olmak üzere Newton cinsinden $2v$'dir. Cisim suyun içine girdikten sonra da suyun direnci, v m/sn cinsinden olmak üzere Newton cinsinden $6v$ olmaktadır. Su içindeki harekette, 4 kg'lık bir kaldırma kuvveti cismi yukarı doğru itiyor. Cismin su yüzeyinin altına geçtikten 2 sn sonraki hızını ulunuz.

3.3 Değişim Hizi Problemleri

Bazı problemlerde bir çokluğun değişim hızı, bazen o şeyin o anki miktarına, bazen de zamana bağlıdır ve bu çokluğun herhangi bir andaki miktarı bilinmek istenir. x bu şeyin t anındaki miktarını gösterirse, $\frac{dx}{dt}$ bu çokluğun değişim hızıdır ve hemen bir diferansiyel denkleme varırız. Bu kısımda bu türden bazı problemleri ele alacağız.

A. Çoğalma ve Azalma Hızları

Örnek 3.8. Bir radyoaktif çekirdeğin bozunma hızı, verilen nümunede mevcut çekirdeklerin sayısıyla orantılıdır. Elimizdeki nümunede başlangıçta mevcut çekirdeklerin yarısı 1500 yılda parçalanmıştır.

(a) 4500 yıl sonra başlangıçtaki çekirdeklerin yüzde ne kadarı parçalanmadan kalmış olacaktır?

(b) Başlangıçtaki çekirdeklerin yüzde onunun parçalanmadan kalmış olması için ne kadar zaman geçecektir?

Matematiksel Formülasyon. t yıl sonra mevcut çekirdek miktarı x olsun. $\frac{dx}{dt}$ çekirdeklerin parçalanma hızını gösterir. çekirdeklerin bozunma hızı verilen nümunede mevcut çekirdeklerin sayısıyla orantılı olduğundan, K orantı katsayısı olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = Kx \tag{3.40}$$

elde ederiz. Mevcut çekirdeklerin sayısı x, pozitiftir. x azalmakta olduğundan $\frac{dx}{dt} < 0$ olacaktır. Böylece (3.40)'da $K < 0$ olmalıdır. x'in azalmakta olduğunu vurgulamak için $k = -K > 0$ sayısını tanımlarız. O zaman (3.40) denklemi

$$\frac{dx}{dt} = -kx \tag{3.41}$$

halini alır. Başlangıçta mevcut çekirdek sayısını x_0 ile gösterirsek

$$x(0) = x_0 \tag{3.42}$$

başlangıç şartını elde ederiz. (3.41) denkleminin genel çözümünde bulunacak keyfî sabiti belirlemek için bu başlangıç şartına ihtiyacımız olacaktır. (3.41) denkleminde bir de k bilinmeyen sabiti bulunduğundan bir şeye daha ihtiyacımız olacağı bellidir. Bu "başka bir şey" problemin ifadesinde bulunmaktadır. Bize başlangıçta mevcut çekirdeklerin yarısının 1500 yılda parçalandıkları söylenmektedir. Böylece bu kadar yıl sonra çekirdeklerin yarısı kalmış olacaktır ve bu bize

$$x(1500) = \frac{1}{2}x_0 \tag{3.43}$$

şartını verir.

Çözüm. (3.41) diferansiyel denkleminin ayrılabilir olduğu açıkça görülmektedir. Değişkenleri ayırır, integre eder ve sadeleştirirsek

$$x = ce^{-kt}$$

elde ederiz. (3.42)'deki $t = 0$'da $x = x_0$ başlangıç şartını kullanırsak, $c = x_0$ buluruz. Böylece

$$x = x_0 e^{-kt} \tag{3.44}$$

elde ederiz. Henüz k'yı belirlemedik. (3.43)'deki $t = 1500$'de $x = \frac{1}{2}x_0$ şartını uygularsak;

$$\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-1500k} \quad \text{veya} \quad \left(e^{-k}\right)^1 500 = \frac{1}{2} \quad \text{veya} \quad e^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1500}} \tag{3.45}$$

elde ederiz.

Bu denklemden k'yı açık olarak bulup (3.44)'de yerine koyabiliriz. Ancak (3.44)'de k'ya değil de e^{-k}'ya ihtiyacımız olduğunu görürüz. Bunu da (3.45)'te zaten elde etmiş bulunuyoruz. (3.45)'ten e^{-k}'yı çözüp (3.44)'te yerine koyarsak

$$x = x_0(e^{-k})^t = x_0 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1500}}\right]^t$$

ya da

$$x = x_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1500}} \tag{3.46}$$

elde edilir. (3.46) denklemi t anında mevcut radyoaktif çekirdeklerin x sayısını verir. (a) sorusu bizden 4500 yıl sonra ilk çekirdeklerin yüzde kaçının kalacağını sormaktadır. (3.46)'da $t = 4500$ koyarsak,

$$x = x_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{x_0}{8}$$

buluruz. Böylece 4500 yıl sonra ilk çekirdeklerin sekizde birinin yani yüzde 12.5'unun kalacağı anlaşılır. (b) sorusu ise ne zaman onda birinin kalacağını sormaktadır. (3.46)'da $x = x_0/10$ koyarsak,

$$\frac{1}{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1500}}$$

ve böylece

$$\frac{t}{1500} = \frac{\ln 10}{\ln 2} \quad \text{yada} \quad t \approx 4985 \;\; \text{yıl}$$

buluruz

B. Karışım Problemleri

Simdi karışımlarla ilgili hız problemleri inceleyeceğiz. Bir S maddesi bir kabdaki karışımın içine akıtılır. Kab karıştırılarak karışımın düzgün dağılması sağlanır. Bazen bu karışım başka bir yere ve genellikle farklı bir hızda akmağa başlar, bazen de akmaz. Her iki durumda da herhangi bir t anında, kabda mevcut S maddesi miktarını bulmak isteriz.

x, herhangi bir t anında kabda mevcut S maddesi miktarını, $\frac{dx}{dt}$ de x'in t'ye göre değişme hızını göstersin. "GIR", S'nin karışıma girme hızını ve "CIK" da terketme hızını gösterirse hemen

$$\frac{dx}{dt} = GIR - CIK \tag{3.47}$$

temel denklemi elde edilir ki, bundan yararlanarak t anındaki x miktarını bulabiliriz. Şimdi iki örnek ele alacağız:

Örnek 3.9. Bir tankta başlangıçta 200 litre su bulunuyor. $t = 0$ anından başlayarak tanka, içinde litre başına 80 gram tuz çözünmüş karışım, dakikada 10 litre hızla akmağa başlıyor. Karışım iyice karıştırılmakta iken sıvı, aynı çıkış hızı ile tankı terketmeğe başlıyor.

(a) Herhangi bir t anında tankta ne kadar tuz vardır?
(b) 40. dakikanın sonunda tankta ne kadar tuz vardır?
(c) Çok uzun zaman sonunda tankta ne kadar tuz bulunur?

Matematiksel Formülasyon. t anında mevcut tuz miktarını x ile gösterelim. (3.47) temel denklemini uygularsak,

$$\frac{dx}{dt} = GIR - CIK \tag{3.47}$$

yazarız. Karışım tanka dakikada 10 litre hızla akıyor ve her litresinde 80 gram tuz bulunuyor. Böylece

$$GIR = (80\ g/litre) \times (10\ l/dk) = 800\ g/dk$$

elde ederiz. Karışımın girme hızı ile terketme hızı aynı olduğundan, tankta her t anında aynı 200 litre karışım bulunur. Bu karışım içinde x gram tuz bulunduğundan, karışım içindeki tuz yoğunluğu $x/200$ g/litre olur. Böylece dakikada 10 litre hızla tankı terkeden karışım ile birlikte

$$CIK = (x/200\ g/litre) \times (10\ l/dk) = \frac{x}{20}\ g/dk$$

miktarında tuz kaybedilir. Böylece x'i t cinsinden veren diferansiyel denklem

$$\frac{dx}{dt} = 800 - \frac{x}{20} \tag{3.48}$$

olur. Başlangıçta tankta hiç tuz bulunmadığından,

$$x(0) = 0 \tag{3.49}$$

şeklinde bir başlangıç şartımız da vardır.

Çözüm. (3.48) diferansiyel denklemi hem lineer ve hem de ayrılabilirdir. Değişkenleri ayırırsak,

$$\frac{dx}{16000 - x} = \frac{1}{20}dt$$

bunu integre eder ve sadeleştirirsek

$$x = 16000 + ce^{-\frac{1}{20}t}$$

elde ederiz. (3.49)'daki $t = 0$'da $x = 0$ başlangıç şartını kullanırsak $c = -16000$ buluruz. Böylece

$$x = 16000(1 - e^{-\frac{1}{20}t}) \tag{3.50}$$

elde ederiz. Bu, (a)'daki soruyu cevaplar. (b)'deki soruya gelince, 40. dakikanın sonunda $t = 40$ olur ve (3.50)'den

$$x(40) = 16000(1 - e^{-2}) \approx 14400\ g$$

bulunur. (c) sorusu $t \to \infty$ için ne kadar tuz bulunacağını soruyor. (3.50)'de $t \to \infty$ yaparsak , $x \to 16000$ gram buluruz.

Örnek 3.10. Bir tankta başlangıçta içinde 6 kg tuz çözünmüş 200 litre su bulunuyor. $t = 0$ anından başlayarak tanka, içinde litre başına 250 gram tuz çözünmüş karışım, dakikada 20 litre hızla girmeğe başlıyor. Karışım iyice karıştırılmakta iken sıvı, dakikada 10 litre çıkış hızı ile sıvı tankı terketmeğe başlıyor. Herhangi bir $t > 0$ anında tankta ne kadar tuz vardır?

Matematiksel Formülasyon. t anında mevcut tuz miktarını x ile gösterelim. Yine (3.47) temel denklemini kullanacağız.

$$\frac{dx}{dt} = GIR - CIK$$

3.9 örneğindeki gibi yaparsak,

$$GIR = (250\ g/litre) \times (20\ l/dk) = 5000\ g/dk$$

ve bir kere daha, C herhangi bir t anındaki tuz yoğunluğunu göstermek üzere,

$$CIK = (C\ g/litre) \times (10\ l/dk)$$

olacaktır. Ne var ki bu problemde sıvının girme hızı ile çıkma hızı aynı olmadığından yoğunluk hesabı o kadar kolay değildir. Sıvı dakikada 20 litre hızla giriyor, 10 litre hızla çıkıyor. Bu yüzden her dakika depoda 10 litre sıvı birikiyor. Böylece t dakika sonunda tanktaki sıvı miktarı

$$200 + 10 \times t \ \text{ litre}$$

oluyor. Böylece t. dakikadaki yoğunluk

$$\frac{x}{200+10t} \quad g/\text{litre}$$

olur ki,

$$CIK = \frac{x}{200+10t} \times 10 \quad g/\text{dakika}$$

bulunur. Bunları diferansiyel denklemde koyarsak

$$\frac{dx}{dt} = 5000 - \frac{10x}{200+10t} \tag{3.51}$$

elde ederiz. Başlangıçta tankta 6 kg tuz bulunduğundan başlangıç şartımız

$$x(0) = 6000 \tag{3.52}$$

olur.

Çözüm. (3.48) diferansiyel denklemi ayrılabilir değildir ama lineerdir. Bu denklemi standart biçimde yazarsak,

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{20+t} = 5000$$

olur. Bu denkleme ait bir integrasyon çarpanı

$$e^{\int \frac{dt}{20+t}} = 20 + t$$

olur ki, denklemin iki yanını bununla çarpmakla

$$(20+t)\frac{dx}{dt} + x = 5000(20+t),$$

$$\frac{d}{dt}[(20+t)x] = 5000(20+t)$$

elde edilir. Bunu integre eder ve sadeleştirirsek,

$$(20+t)x = 2500(20+t)^2 + c$$

veya

$$x = 2500(20+t) + \frac{c}{20+t}$$

elde ederiz. (3.52)'deki $t = 0$'da $x = 6000$ başlangıç şartını kullanırsak, $c = -880000$ buluruz. Böylece herhangi bir $t > 0$ anındaki tuz miktarı olarak

$$x = 2500\left(20 + t - \frac{352}{20+t}\right)$$

elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

1. Radyoaktif çekirdeklerin parçalanma hızının , o an verilen nümunede mevcut çekirdeklerin sayısıyla orantılı olduğunu kabul ediyoruz. Böyle bir nümunedeki çekirdeklerin yüzde onunun ilk 200 yılda bozuldukları gözlenmiştir.

(a) Nümunedeki çekirdeklerin yüzde kaçı 1000 yıl bozulmadan kalır?

(b) Kaç yıl sonra bu nümunedeki çekirdeklerin sadece dörtte biri bozulmadan kalır?

2. Bir kimyasal madde, bir kimyasal reaksiyonla başka bir kimyasal maddeye dönüşmektedir. Birinci kimyasal maddenin dönüşme hızının, herhangi bir anda bu kimyasal maddenin mevcut miktarıyla orantılı olduğunu kabul ediyoruz. Birinci maddenin yüzde onunun ilk beş dakikada dönüştüğü gözlenmiştir.

(a) Yirmi dakikada birinci maddenin yüzde kaçı dönüşmüş olur?

(b) Kaç dakika sonra birinci maddenin % 60'ı dönüşmüş olur?

3. Bir kimyasal reaksiyon, bir kimyasal maddeyi bir başka bir kimyasal maddeye dönüştürmektedir. Birinci kimyasal maddenin dönüşme hızı, herhangi bir anda bu kimyasal maddenin mevcut miktarıyla orantılıdır. Birinci saatin sonunda bu maddeden 50 gram, üçüncü saatin sonunda ise sadce 50 gram kalmıştır.

(a) Başlangıçta birinci maddeden kaç gram vardı?

(b) Beşinci saatın sonunda birinci maddeden kaç gram kalır?

(c) Kaç saat sonra birinci maddeden sadece 2 gram kalır?

4. Bir şehrin nüfusu herhangi bir anda, o andaki nüfusu ile orantılı olarak artmaktadır. Nüfus 40 yıl sonra iki katına çıktığına göre, kaç yıl

sonra üç katına ulaşır?

5. İstanbulun nüfusu bir t anında, o andaki nüfusu ile orantılı olarak artmaktadır. Şehrin nüfusu 1950 yılında 800000, 1990'da 5.000000 olduğuna göre, 2000 yılında ne olacaktır?

6. Bir bakteri kültüründeki bakteri sayısı herhangi bir anda, o andaki nüfusu ile orantılı olarak artmaktadır.
(a) Sayı 5 saat sonra üç katına çıktığına göre, 10 saat sonra ne olur?
(c) Kaç saat sonra sayı, başlangıçtakinin on katı olur?

7. Bir tankta, başlangıçta içinde 10 kg tuz çözünmüş 400 litre su bulunuyor. $t = 0$ anından başlayarak tanka, içinde litre başına 250 gram tuz çözünmüş karışım, dakikada 20 litre hızla girmeğe başlıyor. Karışım iyice karıştırılmakta iken sıvı, aynı hızla tankı terketmeğe başlıyor.
(a) 10 dakika sonra tankta ne kadar tuz bulunur?
(b) Tankta ne zaman 80 kg tuz birikir?

8. Büyük bir tankta, başlangıçta içinde 5 kg tuz çözünmüştür karışım bulunmaktadır. $t = 0$ anından başlayarak tanka, dakikada 20 litre hızla tatlı su girmeğe başlıyor. Karışım iyice karıştırılmakta iken sıvı, daha yavaş olarak, dakikada 10 litre hızla tankı terkediyor.
(a) 15. dakikanın sonunda tankta ne kadar tuz bulunur ve bu andaki tuz yoğunluğu nedir?
(b) Tankın kapasitesi 1000 litre ise, tank taşmağa başladığı zaman tuz yoğuluğu ne kadardır?

9. Bir tankta başlangıçta 400 litre su bulunuyor. $t = 0$ anından başlayarak tanka, içinde litre başına 250 gram tuz çözünmüş karışım dakikada 20 litre hızla girmeğe başlıyor. Karışım iyice karıştırılmakta iken sıvı, daha yavaş olarak, dakikada 10 litre hızla tankı terkediyor.
(a) 20 dakika sonra tankta ne kadar tuz bulunur?
(b) Tankta ne zaman 20 kg tuz birikir?

10. Büyük bir tankta, başlangıçta içinde 10 kg tuz çözünmüş 1000 litre tuzlu su bulunmaktadır. $t = 0$ anından başlayarak tanka, dakikada 16 litre hızla, litresinde 200 gram tuz çözünmüş tuzlu su girmeğe başlıyor. Karışım iyice karıştırılmakta iken sıvı, daha yavaş olarak, dakikada 10 litre hızla tankı terkediyor.
(a) Birinci saatın sonunda tankta ne kadar tuz bulunur?

(b) Tankta sadece 200 litre sıvı kaldığı zaman tankta ne kadar tuz bulunur?

11. Hacmi 200 m^3 olan bir odada % 0.15 oranında karbondioksit bulunduğu anlaşılmıştır. $t = 0$ anından başlayarak odaya, dakikada 100 m^3 hızla, % 0.05 oranında karbondioksit bulunduran dışarı havası alınmağa başlıyor.
(a) Üç dakika sonunda odanın havasındaki karbondioksit yüzdesi ne olur?
(b) Oda havasındaki karbondioksit oranının % 0.1 olması için ne kadar zaman geçmesi gerekir?

12. Boyutları $10 \times 7 \times 5$ m olan bir odanın havasında % 0.2 oranında karbondioksit bulunduğu anlaşılmıştır. $t = 0$ anından başlayarak odaya, içinde % 0.05 oranında karbondioksit bulunduran dışarı havası alınmağa başlıyor. 30 dakika sonunda odanın havasındaki karbondioksit yüzdesinin % 0.1 olması için dakikada ne kadar dışarı havası alınmalıdır?

13. Newton'ın soğuma yasası bir cismin, kendi sıcaklığı ile içinde bulunduğu ortamın sıcaklıkları arasındaki farkla orantılı olarak soğuduğunu söyler. 25° C sıcaklığındaki bir cisim, 10° C sıcaklığında tutulan bir ortama bırakılıyor. 5 dakika sonra cismin sıcaklığının 20° C'a düştüğü görülüyor.
(a) 10. dakikanın sonunda cismin sıcaklığı ne olur?
(a) Cismin sıcaklığı ne zaman 15° C olur?

14. 30° C sıcaklığında tutulan bir ortama bırakılan bir cisim, 15 dakika içinde 60° C'den 50° C'ye soğuyor. Bu cisim 50° C sıcaklığında tutulan bir ortamda, 100° C'den 80° C'ye ne kadar zamanda soğur. Newton'ın soğuma yasasını kullanınız (13. problemdeki gibi).

15. Bir cisim suda; henüz çözünmemiş madde miktarı ve doymuş çözeltinin c_1 yoğunluğu ile, o andaki c_2 yoğunluğu arasındaki $c_1 - c_2$ farkının çarpımıyla orantılı olan bir hızla çözünür. 50 gram su, bu maddenin 20 gramı ile doymaktadır. 50 gram su içine bu maddeden 10 gram konuyor ve yarısının 90 dakikada çözüldüğü gözleniyor. 3 saat içinde ne kadarı çözülmüş olur?

16. Doğal şartlar altında bir adadaki fare sayısı, herhangi bir anda,

adada kedi bulunmaması halinde, o andaki fare sayısı ile orantılı olarak artmaktadır. 1950 yılı başından, 1960 yılı başına kadar adada hiç kedi bulunmamış ve bu zaman zarfında adadaki fare sayısı ikiye katlanmış ve en yüksek düzeyi olan 100000'e ulaşmıştır. 1960 yılı başında adadaki fare sayısının artmasından telaşa kapılan ada halkı, fareleri öldürmeleri için adaya bir miktar kedi getirtmiştir. Bu andan itibaren farelerin yukarıdaki doğal artış hızı, ayda 1000 fare öldüren kedilerin faaliyetleri sonucu yavaşlamağa başlamıştır. Buna göre 1961 yılı başında adada ne kadar fare kalmış olur?

EK ALIŞTIRMALAR

1. Bir depoda her litresinde 1 gram tuz bulunan 100 litre tuzlu su bulunmaktadır. Bir anda depoya dakikada 5 litre hızla tuzsuz su gönderilmeğe başlanıyor. Deponun dibindeki bir delikten de aynı hızla su boşaltılıyor. Herhangi bir t anında tankta bulunan tuz miktarını hesaplayınız. Tanktaki tuz ne zaman 75 gram olacaktır?

2. Birinci problemi tankın başlangıçta tuzsuz su ile dolu olması halinde çözünüz.

3. Bir depoda, içinde 500 gram tuz eritilmiş 100 litre su bulunmaktadır. Bir anda depoya dakikada 3 litre hızla, litresinde 2 gram tuz bulunan tuzlu su gönderilmeğe başlanıyor. Deponun dibindeki bir delikten de dakikada 2 litre hızla su boşaltılıyor. Tankın taşmayı önleyecek kadar büyük olduğunu varsayarak, herhangi bir t anında tankta bulunan tuz miktarını hesaplayınız. Tanktaki tuzun yoğunluğu ne zaman 4 gram/litre olacaktır. 30 dakika sonra tanktaki tuz miktarı kaç gram olacaktır.

4. üçüncü problemi tanka giren ve çıkan tuzlu suların hızlarının yer değiştirmesi halinde çözünüz. 30 dakika yerine 1 saat sonra tanktaki tuz miktarını hesaplayınız. Bu şartlar altında tanktaki tuz miktarı ne zaman en fazla olur, ne kadar olur?

5. Bir depoda içinde 20 gram tuz çözülmüş 200 litre tuzlu su bulunmaktadır. Bir anda depoya dakikada 2 litre hızla, litresinde 2 gram

tuz bulunan tuzlu su gönderilmeğe başlanıyor. Deponun dibindeki bir delikten de aynı hızla su boşaltılıyor. t zamanı sınırsız olarak artarken, tankta bulunan tuz miktarının limit miktarını hesaplayınız. Tanktaki tuz miktarı eğer ulaşırsa, ne zaman 200 gram olacaktır?

6. Beşinci problemi, tankta başlangıçta içinde 25 gram tuz çözülmüş 100 litre tuzlu su bulunması ve tanka litresinde 1 gram tuz bulunan tuzlu su gönderilmesi halinde çözünüz.

7. Bir depoda, içinde 500 gram tuz çözülmüş 1000 litre tuzlu su bulunmaktadır. Bir anda depoya dakikada 10 litre hızla tuzsuz su gönderilmeğe başlanıyor. Deponun dibindeki bir delikten de aynı hızla su boşaltılıyor. Tanktaki tuz ne zaman 50 gram olacaktır?

8. 10 000 hektometre küp su depolama kapasitesi olan bir göldeki su miktarı 1000 hektometre küpe kadar düşürüldükten sonra, göldeki istenmeyen canlıları yoketmek için suya 2 ton zehirli madde atılıyor. Göle, hektometre küpte 10^{-3} gramdan fazla zehirli maddeye tahammül edemeyen yeni canlılar bırakılacaktır. Çeşitli kanallardan göle saatta 50 000 metreküp tatlı su gelmekte ve sulama amaçları için saatta 40 000 metreküp su bırakılmaktadır. Zehirli kimyasal maddenin göle hemen yayıldığını ve iyice karıştığını varsayarak, göl suyunun ne zaman yeni canlıların yaşamasına elverişli hale geleceğini hesaplayınız.

9. Bir göle çeşitli kanallardan su girmekte ve aynı miktar su gölü terketmektedir. Göle giren sular uzun süre kirli geldiği için, göldeki kirlilik istenmeyen bir düzeye çıkmıştır. Ancak çevreyi korumak amacıyla giren sulardaki kirlilik giderilmiştir ve artık göle temiz su gelmektedir. Gölün su kapasitesi V km^3 ve giren çıkan su miktarı $r\ km^3/yıl$dır. Kirliliğin gölde düzgün dağıldığını varsayarak kirliliğin a) temizleme işleminin başlangıcındaki düzeyinin yarısına b) onda birine düşeceği zaman uzunluklarını hesaplayınız. Bu hesaplamayı gerekli değerleri öğrenerek Van Gölü ve Eğridir Gölü için tekrarlayınız.

10. R yarıçaplı yarım küre şeklinde bir depo su ile dolu iken, dibinde açılan r yarıçaplı bir delikten yerçekimi etkisi ile boşalmağa başlıyor. Herhangi bir t anında depodaki su derinliğini ve suyun ne kadar zamanda tamamen boşalacağını hesaplayınız.

11. 10. problemi deponun, başlangıçta tamamen dolu bir küre

olması halinde çözünüz. Deponun yarısının boşalması ne kadar sürer? Tamamının boşalması ne kadar sürer?

12. 10. problemi deponun, yarı capı R, yüksekliği h olan, ekseni yukarı doğru bir silindir olması halinde çözünüz.

13. 12. problemi, deponun boşaltma deliğinin tabanından h/2 kadar yukarıda olması halinde çözünüz.

14. 10. problemi, deponun $y = x^2$ parabolünün [0,2] aralığındaki parçasının y ekseni etrafında dönmesi ile elde edilmiş olması halinde çözünüz.

15. 10. problemi deponun, yarı capı R, uzunluğu h olan ekseni yatay bir silindir olması halinde çözünüz. Altındaki r yarıçaplı delikten ne kadar zamanda boşalır.

16. Dönel yüzey şeklindeki bir depo boşalırken su düzeyi sabit bir hızla düşmektedir. Bu deponun şekli hakkında başka ne söyleyebilirsiniz?

17. Sabit düşey kesitli yatay bir yalak boşalırken su düzeyi sabit bir hızla düşmektedir. Bu deponun düşey kesitnin şekli hakkında ne söyleyebilirsiniz?

18. Yarı capı R, uzunluğu h olan dik dairesel silindir su ile doludur. Depo genişliği, o andaki su derinliği ile orantılı olarak açılan bir delikten boşalmaktadır. Herhangi bir t anında depodaki su derinliğini ve suyun ne kadar zamanda tamamen boşalacağını hesaplayınız.

19. 10. problemi deponun boşaltma deliğinin 18. problemdeki gibi çalışması halinde çözünüz.

20. Kesit alanı $A\ m^2$ olan dik dairesel silindir depoya $Q\ m^3/dk$ hızla su dolmaktayken, dibinde açılan $a\ m^2$ alanlı bir delikten yerçekimi etkisi ile boşalmağa başlıyor. Başlangıçta depoda $h\ m$ su bulunduğuna göre, herhangi bir t anında depodaki su derinliğini ve zaman sınırsız artarken suyun limit yüksekliğini hesaplayınız.

21. Yarı capı R, yüksekliği h olan dik dairesel silindir depoda, yukarıdan aşağıya doğru w genişliğinde dar bir yarık vardır. Başlangıçta dolu olan bu depo, yerçekimi etkisi ile boşalmağa başlıyor. Buna

göre herhangi bir t anında depodaki su derinliğini ve suyun ne kadar zamanda tamamen boşalacağını hesaplayınız.

22. Belli koşullar altında, bir katının bir çözücü içinde çözünme hızı , o anda daha çözünmemiş katı madde miktarı ve doyma *yoğunluğu-o andaki yoğunluk* farkı ile orantılıdır. 120 gramlık çözücü içine 40 gram katı madde atılmış ve 12 dakika sonra çözelti yoğunluğunun 1/30 olduğu gözlenmiştir. Doyma yoğunluğu 1/3 olduğuna göre, herhangi bir t anında çözünmüş katı madde miktarını hesaplayınız.

23. 22. problemi, doyma yoğunluğu 1/12 olduğuna göre çözünüz.

24. 22. problemi, doyma yoğunluğu 1/6 olduğuna göre çözünüz.

25. 22. problemi, doyma yoğunluğu 1/4 olduğuna göre çözünüz.

26. 22. problemi, yoğunluğun, çözünenin çözücüye oranı değil de, çözünenin çözeltiye oranı olarak tanımlanması halinde çözünüz.

27. 26. problemi, doyma yoğunluğu 1/7 olduğuna göre çözünüz.

28. 26. problemi, doyma yoğunluğu 1/4 olduğuna göre çözünüz.

29. Etil asetatın su içindeki doymuş çözeltisi az miktarda asit ilavesiyle ısıtılınca

$$CH_3COOC_2H_5 + H_2O \to CH_3COOH + C_2H_5OH$$

formülü gereğince bozunuyor. Bu kimya reaksiyonu doymuş çözelti içinde gerçekleştiğinden, ortamdaki su miktarı o kadar fazladır ki, etil asetat ile birleşen kısmı, toplam su miktarında farkedilir bir değişiklik yapmaz. Böylece reksiyona giren maddelerden sadece etil asetatın yoğunluğu değişikliğe uğrar. Böyle sadece bir maddenin yoğunluğunun değişikliğe uğradığı reksiyonlara, **birinci basamaktan reaksiyon** denir. Böyle bir reaksiyonda bir maddenin değişim hızı, o anda var olan madde miktarı ile orantılıdır. Ortamda başlangıçta var olan etil asetat miktarı C_0 ise, herhangi bir t anında mevcut etil asetat miktarını veren formülü bulunuz.

30. Bazı kimya reaksiyonlarında, iki madde birleşerek üçüncü bir madde oluşturur. Bu sırada reaksiyona giren iki maddenin de ortamdaki varlıkları bir hayli değişir. Böyle reksiyonlara **ikinci basamaktan**

reaksiyon denir. Böyle bir reaksiyonda üçüncü maddenin oluşum hızı , reaksiyona giren iki maddenin o anda var olan miktarlarının çarpımı ile orantılıdır. Reaksiyona giren maddelerin birleşme oranları ağırlıkça 1/2 ise ve birinci maddeden 10, ikinci maddeden 20 gram alınıp karıştırıldıktan 10 dakika sonra, 5 gram bileşik elde edilmişse, herhangi bir t anında mevcut bileşik miktarını veren formülü bulunuz. Oluşacak toplam bileşik miktarının yarısının oluşması için gereken zamanı bulunuz.

31. 30. problemi, her iki maddeden de 20 şer gram alınıp karıştırılması halinde çözünüz.

32. 30. problemi, birinci maddeden 10, ikinci maddeden 20 gram alınıp karıştırılması halinde çözünüz.

33. Birinci basamak reaksiyonların çoğu tersinirdir. Sadece A maddesi B maddesine dönüşmekle kalmaz, B maddesi de A'ya dönüşür. $A \to B$ reaksiyonunun hızı k_1, $B \to A$ reaksiyonunun hızı k_2 ise ve A maddesinin başlangıçtaki miktarı A_0 , B nin başlangıçtaki miktarı sıfır ise, herhangi bir t anında mevcut B maddesi miktarını bulunuz. Reaksiyon denge konumuna ulaşırken, A/B oranının limit değeri nedir? *Hatırlatma:* A'nın oluşma hızının $k_2 - k_1$ olduğuna dikkat ediniz.

34. Bazı reaksiyonlar otokatalitiktir. Yani reaksiyonun ürünü olan madde, kendi oluşumunda katalizörlük yapar. A maddesinin B maddesine dönüştüğü böyle bir reaksiyonda B maddesinin oluşum hızı, o anda mevcut A ve B madde miktarlarının AB çarpımı ile orantılıdır. A maddesinin başlangıçtaki miktarı A_0, B'nin başlangıçtaki miktarı B_0 ise, herhangi bir t anında mevcut B maddesi miktarını bulunuz.

35. **Newton Soğuma Yasası**'na göre bir cismin sıcaklığının değişme hızı, o anda cisim ile dış ortam arasındaki sıcaklık farkı ile orantılıdır. İlk sıcaklığı $100°C$ olan bir cisim, $20°C$ lık hava ortamında soğumağa bırakılıyor. Cisim ilk 10 dakikada $60°C$ ye kadar soğuduğuna göre, cismin sıcaklığını t zamanının bir fonksiyonu olarak bulunuz.

36. Bir cisim $20°C$'lık havada soğumağa bırakıldıktan 10 dakika sonra $75°C$'ye, 10 dakika sonra da $50°C$'ye kadar soğuduğuna göre, cismin ilk sıcaklığını bulunuz.

37. **Fourier Isı İletimi Yasası**'nı kullanarak, içinin sıcaklığı T_0, dış sıcaklığı T_1, h kalınlığındaki duvarının ısı iletim katsayısı k olan bir fırının duvarının 1 m^2'sinden, kararlı hal koşullarında kaybedilen ısıyı hesaplamak için bir formül yazınız. Duvar kesitindeki sıcaklık dağılımını bulunuz.

38. İçi boş bir küresel kabuğun iç sıcaklığı T_0, dış sıcaklığı T_1'de sabit tutulmaktadır. İç ve dış yarıçapları sırasıyla r_0 ve r_1, ısı iletim katsayısı k dır. Bu kürenin yüzeyinden birim zamanda kaybedilen ısıyı hesaplayınız. Kabuk kesitindeki sıcaklık dağılımını bulunuz.

39. Bir tank ve içindeki, 100 kg gelmektedir. Sistemin ortalama ısı kapasitesi 0,5 $cal/kg.derece$'dir. Tank içindeki sıvı, içine daldırılan ve dakikada 100 cal ısı transfer eden bir ısıtıcı ile ısıtılmaktadır. Sistem, her tarafında aynı olduğu kabul edilen sıcaklığı ile, dışarıdaki hava ortamı arasındaki farkla orantılı olarak ısı kaybetmektedir. Orantı katsayısı 2 $cal/dakika.derece$'dir. Dışarıdaki havanın sıcaklığı $20°C$'da sabit kaldığına ve tankla muhtevasının ilk sıcaklıkları $15°C$ olduğuna göre, tankın sıcaklığını zamanın fonksiyonu olarak bulunuz.

40. Isı sığası ihmal edilebilecek kadar küçük, ısı yalıtımı mükemmel bir tank, T_0 $°C$'da P kg sıvı bulundurmaktadır. Bu tanka a kg/dk hızla T_a $°C$ da sıvı dolduruluyor. Hızlı bir karıştırma ile sıcaklık her yerde aynı hale getirildikten sonra, birim zamanda aynı miktarda sıvı dışarı atılıyor. Sıvının ısınma ısısı 1 $cal/kg.derece$ olduğuna göre, tanktaki sıvının sıcaklığını zamanın fonksiyonu olarak bulunuz.
Hatırlatma h_0, T_0 sıcaklığındaki 1 kg sıvının taşıdığı ısı miktarı ise, sıcaklığı $T°C$ olduğunda, tanktaki tüm sıvının taşıdığı ısı, $H = P[(T - T_0) + h_0]$ olur. dt zamanında tanktaki ısı miktarındaki değişme ise dh ile hesaplanır.

41. 40. problemi, tuzlu suyun atılma hızının $b \neq a$ kg/dakika olması halinde çözünüz. Burada elde edilen çözümün, $b \to a$ için 40. problemin sonucuna gideceğini gösteriniz. *Yol Gösterme:* Bu durumda tanktaki ısı miktarı:

$$H = [P + (a - b)t][(T - T_0) + h_0]$$

olacaktır.

42. Isı sığası ihmal edilebilir, 1000 kg sıvı bulunduran bir tankın sıcaklığı 30°C'tır. 20 dakika sonra tankta 90°C da 2000 kg sıvı olması istenmektedir. Bunu gerçekleştirebilmek için 100°C ta sıvı gönderilmekte ve iyice karıştırılmaktadır. Sıvının tanka giriş ve çıkış hızları ne olmalıdır?

43. 100°C sıcaklığında bir metal küre, ısı sığası ihmal edilebilir, 40°C de su bulunduran bir tanka bırakılıyor. Tankın ısı yalıtımı çok iyidir ve ısı iletimi sadece küre ile su arasındadır. 15 dakika sonra suyun 50°C ve kürenin de 80°C olduğu gözlenmiştir. Sıcaklık dağılımlarının düzgün olduğunu varsayarak, kürenin sıcaklığını zamanın fonksiyonu olarak bulunuz. Kürenin sıcaklığı ne zaman 75°C olacaktır?

Hatırlatma. İlk gözlemin aksine, suyun ve kürenin kütleleri ile ısınma ısıları bu iş için önemli değildir. Bu büyüklüklerin yerine uygun semboller kullanarak sistemdeki ısıyı $t = 0$, $t = 15$, $t = \infty$, $t = t$ anlarında hesaplayınız. Bunların aynı olduğunu gördükten sonra, suyun sıcaklığının, topun sıcaklığının lineer bir fonksiyonu olduğunu kanıtlayınız. Sonra duruma uyan bir diferansiyel denklem elde etmek için, Newton'ın soğuma yasasını kullanınız.

44. İçinden tabakalı akışla sıvı akan, dairesel silindir bir boru içindeki radyal hız dağılımı

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = -\frac{r(p_0 - p_1)}{\eta l}$$

diferansiyel denklemi ile verilmektedir. Bu borudan birim zamanda çıkacak su miktarının $Q = \pi a^4(p_0 - p_1)/8$ formülü ile verilebileceğini gösteriniz.

45. 44. problemdeki borunun bir kesitindeki ortalama hızın, $v \equiv (p_0 - p_1)/8$ olacağını kanıtlayınız.

46. Bazı canlı toplulukları için hem doğum ve hem de ölüm oranları o anda mevcut fertlerin sayısı ile orantılıdır. Böyle bir topluluk için nüfusu, zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

47. çoğalmanın iki cinse bağlı olduğu canlı topluluklarında, çoğalma oranının fertlerin değil de çiftlerin sayısı ile orantılı olduğunu düşünmek daha gerçekçidir. Doğum oranının böyle ve ölüm oranının da fertlerin

sayısı ile orantılı olduğunu hesaba katarak, N nüfus büyüklüğünü temsil edecek bir diferansiyel denklem yazınız ve başlangıç nüfusunu N_0 alarak çözünüz.

48. 47. problemi, ölüm oranının sabit değil de, N nüfus büyüklüğünün $a - bN$ gibi lineer bir fonksiyonu olması halinde çözünüz.

49. 47. problemi, doğum ve ölüm oranlarının sabit değil de, N nüfus büyüklüğünün lineer fonksiyonları olmaları halinde çözünüz.

Bazı durumlarda nüfus artış oranı, o andaki nüfustan bağımsız sosyal hedeflerin ve değer yargılarının değişmesinin etkisinde kalabilir. Ölüm oranları da tıptaki gelişmelerin etkisi ile azalmış olabilir. Böyle etkileri hesaba katmanın doğal yollarından biri, bu oranların $k_d(t), k_o(t)$ gibi zamanın fonksiyonları olduklarını varsaymaktır. Böylece nüfus hareketini temsil eden diferansiyel denklem:

$$\frac{dN}{dt} = k_d(t)N - k_oN$$

olacaktır. Bu denklemi $k_d(t), k_o(t)$ nin aşağıda verilen durumları için çözünüz.

50. $k_d(t) = d_1 - d_2t, \quad k_o(t) = c_1 - c_2t$

51. $k_d(t) = d_1e^{-d_2t}, \quad k_o(t) = c_1e^{-c_2t}$

52. $k_d(t) = \frac{d_1}{d_2^2 - t^2}, \quad k_o(t) = \frac{c_1}{c_2^2 - t^2}$

53. Radyum o anda mevcut miktarı ile orantılı bir hızla bozunur. Radyumun **yarılanma ömrü** yani yarısının bozunması için geçen zaman 1590 yıl ise, t yıl sonra hala mevcut olacak radyum miktarını verecek bir formül bulunuz. Başlangıçtaki miktarın $\frac{1}{4}$'ünün bozunması için ne kadar zaman gereklidir? Birinci, üçüncü ve onuncu asırların sonlarında, başlangıçtaki miktar hangi oranda bozunmuş olacaktır?

54. 53. problemi yarılanma ömrü 50 yıl olan plütonyum için çöz.

55. Bitki ve hayvanlara ait canlı dokular, daha çok havadaki karbondioksitten alınmış karbon bulundururlar. Bu karbonun çoğu, kararlı C^{12} izotopudur. Küçük fakat sabit bir oranı da kararsız, radyoaktif C^{14} tür. Canlı organizmaların bu iki cins karbon arasında belirli bir tercihi yoktur ve C^{14}/C^{12} oranı hemen her tür doku içinde sabittir. Doku

ölünce bütün canlılık faaliyetleri kuşkusuz durur. Artık dokuya iki türden de karbon girişi yoktur. Doku içindeki C^{12} miktarı aynı kaldığı halde C^{14}, her an var olan miktarı ile orantılı bir hızla, yarılanma ömrü 5500 yıl olacak şekilde azalır.

(a) Herhangi bir anda ölü bir doku içinde mevcut C^{12}'nin kimyasal analizler sonucu saptanmış miktarından ve sabit olan C^{14}/C^{12} oranından yararlanılarak, bu doku içinde ölüm anında mevcut C^{14} miktarı, x_0 olarak hesaplanmış olsun. x de ölümten t yıl sonra bugün, doku içinde mevcut C^{14} miktarı olsun. x'i t'nin bir fonksiyonu olarak ifade ediniz.

(b) Fransa'da duvarları tarih öncesi hayvanlarının hayret uyandırıcı resimleri ile süslü Lascaux Mağarası'nda, başlangıçtaki miktarının %18 i kadar C^{14} bulunduran bir odun kömürü parçasına rastlanmıştır. İnsanların bu ateşi ne zaman yakmış olduklarını hesaplayınız.

(c) İstanbul boğazının oluşmasına neden olan tektonik çöküntü sırasında yer altında kalan ağaçlardan oluşan Şile linyit kömürü yataklarından alınan örneklerde, normalde bulunması gereken miktarın sadece %44.5'i kadar C^{14}'e rastlandığına göre bu tektonik hadisenin ne zaman vuku bulduğunu hesaplayınız.

56. **Lambert Absorblama Yasası**'na göre, saydam bir ortamdan geçerken, ışınlarına dik, ince bir saydam madde tabakasının yuttuğu ışık miktarı, tabaka yüzeyine düşen miktar ve tabaka kalınlığı ile orantılıdır. Bermuda açıklarındaki su altı incelemeleri sırasında Beebe, 15 metre derinlikteki aydınlanmanın, yani birim alana düşen ışık miktarının 1 mum olduğunu ve 45 metre derinlikte bunun 0.2 muma düştüğünü bulmuştur. Bu durumda aydınlanmayı derinliğe bağlı bir fonksiyon olarak ifade ediniz.

57. (a) Yeryüzünden h m kadar yüksekte hava basıncı $p\ \frac{kg}{m^2}$, ve hava yoğunluğu $\rho\ \frac{kg}{m^3}$ olduğuna göre $\frac{dp}{dh}+\rho=0$ olduğunu gösteriniz.

(b) Eğer deniz seviyesinde hava basıncı 1033 g/cm^2 ise ve 6000 metre yükseklikte bu değerinin yarısına düşüyorsa, herhangi bir yükseklikteki hava basıncını verecek formülü, p basıncının ρ yoğunluğu ile orantılı olduğunu söyleyen eşsıcaklık koşulunu kullanarak bulunuz. Bu varsayım altında atmosfer kalınlığını hesaplayınız.

(c) Eş sıcaklık koşulu altında hangi yükseklikte basınç, deniz seviyesindekinin 1/4'ü değerindedir.

(d) (b) şıkkını adyabatiklik koşulu olan p'nin $\rho^{1.4}$ olması halinde çözünüz.

58. Su genellikle sıkışmaz bir sıvı olarak alındığı halde, öyle değildir. p basıncı altında 1 ft^3 suyun ağırlığı yaklaşık olarak $w(1+kp)$ paunddur. Bu birimlere göre $W = 64$ ve $k = 2 \times 10^{-8}$ olmaktadır. Bu bilgiyi kullanarak okyanusun y derinliğindeki basıncı bulunuz. 6 km derinliğinde hesaplanan basınç, suyun sıkışmaz olduğu varsayılarak hesaplanan basınçtan hangi oranda farklıdır?

59. Hiçbirinin sonucu mudinin yararına olmadığı halde, bankalar genellikle tasarruflara, altı aylık, üç aylık ve hatta günlük esasa göre bileşik faiz tahakkuk ettirirler. Yıllık faiz fiatı f ise ve Δt kadar zamanda bileşik olarak tahakkuk ettiriliyorsa, başlangıç miktarı P_0 olan bir kapitalin bu Δt kadarlık sürede $P_0[1 + (f/100)\Delta t]$ değerine artacağını gösteriniz. Bunu kullanarak bileşik faizin sürekli hesaplanması limitinde, P kapitalinin sağlayacağı diferansiyel denklemi elde ediniz. Bu denklemi çözerek P'yi t'nin bir fonksiyonu olarak elde ediniz.

60. Beş yıl önce bir ailenin 9 milyon lira borcu vardı. Bugün ise 100 milyon lira borçlular. Borçluluklarının borçlarıyla orantılı olarak arttığını varsayarak, 5 yıl sonra ne kadar borçları olacağını hesaplayınız.

61. Bir naftalin topu, o andaki yüzeyi ile orantılı olarak buharlaşmaktadır. Kütlesinin yarısını ilk 100 günde kaybettiğine göre, yarıçapının başlangıçtakinin yarısına düşmesi için kaç gün geçmelidir? Bu naftalin parçası ne zaman kaybolur?

62. Buharlaşıcı bir madde, ağızı sıkıca kapatılmış bir kaba konunca, cismin alanı ile orantılı bir hızla buharlaşır ve buharlaşmış kısımla orantılı olarak geri döner. Böyle bir madde kapalı bir kutunun dibine h kalınlığında yayılmışsa, herhangi bir t anındaki kalınlığını hesaplayınız. Hangi koşullar altında (eğer böyle koşullar varsa) bu madde tamamen buharlaşır?

63. Buharlaşıcı küre şeklinde bir madde, aniden ağızı sıkıca kapatılmış bir kaba konuyor. 62. problemdeki kuralların geçerli olduğunu

varsayarak, kürenin t anındaki yarıçapını veren diferansiyel denklemi kurunuz.

64. Birim kütleli bir cisim x ekseni boyunca, hareketine karşı direnen bir ortamda ilerlemektedir ve ortamın direnci, cismin hızı ile orantılıdır. Cisim x_0 noktasından v_0 hızı ile harekete başlamışsa, parçacığın limit konumunu bulunuz. Direnç kuvveti olarak $k > 0$ olmak üzere $-kv$ alınız.

65. 100 kg ağırlığında bir kızak, 10 kg değerinde bir kuvvetle rüzgara karşı itilecektir. Sürtünme ve rüzgar kuvvetinin bileşkesinin büyüklüğü, kızağın m/sn cinsinden hızının iki katı kadar kg'dır. (a) Başlangıç hızı v_0 m/sn ise, kızağın hızını bulunuz, (b) Kızak durmakta iken harekete başlarsa, 1 sn sonunda ne kadar yol almış olur?

66. Koşumlar koptuğu anda, bir at arabası 5 m/sn hızla gitmekteydi. Bu andan itibaren, anî hızının karekökü ile orantılı olarak yavaşlamaktadır. Koşumlar koptuktan 2 dk sonra arabanın hızı 3 m/sn olduğuna göre, durmadan önce ne kadar yol almış olacaktır?

67. Kaygan olmayan silindire sarılmış halatın bir ucundaki küçük bir kuvvetin, öteki uçtaki çok daha büyük kuvvetleri dengeleyebildiği günlük tecrübelerimizle sabittir. Sayısal olarak, halatın silindire temas eden kısmında birim boy başına gerilme değişimi, gerilme ile orantılıdır ve orantı katsayısı, halat ile silindir arasındaki *sürtünme katsayısı/silindirin yarıçapı*'dır. Sürtünme katsayısının 0.35 olduğunu ve halatın 30 cm çaplı bir iskele babasına sarıldığını varsayarak çımacının, kuvvetinin 200 katı çekme uygulayan vapuru zaptedebilmesi için, ipi babaya kaç defa dolaması gerektiğini bulunuz.

68. Hızla dönmekte olan bir volan motorun durması halinde, volanın ω anî açısal hızı ile orantılı bir sürtünme torku ile yavaşlar. Volanın eylemsizlik momenti I ve başlangıçtaki açısal hızı ω_0 ise, herhangi bir andaki açısal hızını zamanın fonksiyonu olarak bulunuz. Durması için ne kadar zaman geçecektir? *Hatırlatma:* Hareketin diferansiyel denklemini bulmak için Newton Yasası'nın torsiyonel hali olan:
tork=eylemsizlik momenti $\times$ *açısal ivme* ifadesini kullanınız.

69. Volanı yavaşlatan sürtünme torku aslında her hızda açısal hızın birinci kuvveti ile orantılı değildir. 68. problemden daha gerçekçi bir

örnek olmak üzere, eylemsizlik momenti $I = 7,5\ kgm/sn^2$ olan bir volanın 1000 rad/dak lık bir açısal hızdan itibaren durdurulduğunu varsayalım. Yavaşlatıcı tork:

$$T = \begin{cases} \frac{\sqrt{\omega}}{10}\ kg\ m, & 0 < \omega < 100\ rad/dak \\ \frac{1}{10}\left(7.5\frac{\omega^2}{4000}\right)\ kg\ m, & 100 < \omega < 1000\ rad/dak \end{cases}$$

olduğuna göre, ω'yı zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz. Volanın ne kadar zamanda duracağını hesaplayınız.

70. Yeryüzünden 600 metre yüksekte, düşey olarak 5 m/sn hızla yükselmekte olan bir balondan bir taş düşürülüyor. Taşın düşmesi anında balonun yerini koordinat merkezi alarak ve hava sürtünmesini ihmal ederek, taşın hareket denklemini yazınız. Taş en fazla ne kadar yükseğe çıkar? Yere ne zaman ve hangi hızla çarpar?

71. w ağırlığında bir cisim yerçekiminin ve hızı ile orantılı olduğu varsayılan hava direncinin etkisi altında serbest düşmektedir. Düşmenin hızını ve alınan yolu t zamanının fonksiyonları olarak ifade ediniz. Hava direncinin sıfıra gitmesi halinde bunların ideal;

$$v = gt, \quad s = \frac{1}{2}gt^2$$

değerlerine gideceğini gösteriniz.

72. Bir cisim yeryüzünden yukarı doğru 20 m/sn hızla fırlatılmıştır. Hava direncinin, hızın birinci kuvveti ile orantılı olduğunu varsayınız. Orantı katsayısı cisim serbest olarak düştüğünde limit hızı $v_\infty = 90$ m/sn olacak şekildedir. Cisim ne kadar yükselebilir? Yere ne zaman ve hangi hızla düşer?

73. 71. problemi, hava direncinin düşme hızının karesi ile orantılı olması halinde cözünüz.

74. w ağırlığında bir cisim, yerçekiminin ve hızının n. ci kuvveti ile orantılı olduğu varsayılan hava direncinin etkisi altında, serbest düşmektedir. Düşmenin hızının $v_\infty = (w/k)^{1/n}$ limit değerine gideceğini gösteriniz. Burada k, hava direncindeki orantı katsayısıdır. Ayrıca cismin limit hızının yarısına ulaşması için gerekli τ zamanının $\tau =$

$\alpha \frac{v_\infty}{g}$ formülü ile verilebileceğini gösteriniz. α sabitini

$$n = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4$$

için hesaplayınız.

75. Kütlesi m olan bir cisim x ekseni boyunca, orijine doğru yönelmiş, ve büyüklüğü cismin merkeze uzaklığı ile orantılı bir kuvvetin etkisi altında hareket ediyor. Cisim $x = x_0$ noktasında durmakta iken harekete başladığına göre, hareketin hızını ve alınan yolu, t zamanının fonksiyonları olarak ifade ediniz.

76. 75. problemi, **(a)** cisim harekete orijinden ve $v = v_0$ ilk hızı ile başlaması **(b)** cisim harekete $x = x_0$ dan ve $v = v_0$ hızı ile başlaması halinde çözünüz.

77. 75. problemi, cisime etkiyen kuvvet orijine doğru değil de orijinden dışarı doğru yöneldiğine göre çözünüz.

78. 75. problemi **(a)** cisime etkiyen kuvvetin orijine doğru yönelmiş, fakat cismin orijine uzaklığının karesi ile ters orantılı olması , **(b)** kuvvetin orijinden dışarı doğru yönelmiş, cismin orijine uzaklığının karesi ile ters orantılı olması halinde çözünüz.

79. Bir cisim o kadar yüksekten düşmektedir ki, yerçekim kuvvetinin yer merkezine uzaklığın karesi ile ters orantılı olduğu gerçeği ihmal edilememektedir. Hava direncinin ihmal edilmesi ideal halinde, hareketin hızını ve alınan yolu, t zamanının fonksiyonları olarak ifade ediniz.

80. 79. problemin koşulları altında bir cismin yukarı doğru, bir daha dünyaya dönmemek üzere atılabileceği en düşük hızı hesaplayınız.

81. m kütleli, r yarıçaplı bir silindir, α eğimli bir yoldan aşağı doğru kaymadan yuvarlanmaktadır. Sürtünmeyi ihmal ederek, silindirin yuvarlanma mesafesini zamanın fonksiyonu olarak hesaplayınız. *Hatırlatma:* önce sürtünme olmadığından, enerjinin korunumu yasasına göre, yuvarlanma sırasında silindirin kinetik ve potansiyel enerjilerinin toplamının sabit kalacağını hatırlayınız. Sonra da silindirin kinetik enerjisinin iki kısımdan oluşacağına dikkat ediniz: silindirin ilerlemesine ait kinetik enerji ve yuvarlanmasına ait kinetik enerji.

82. 81. problemi m kütleli, r yarıçaplı yuvarlanan bir silindir için çözünüz.

83. Sığası C olan bir kondansatör, bir R direnci üzerinden, E sabit voltajı sağlayan bir pil ile doldurulmakta iken, kondansatör üzerindeki anî Q yükü

$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=E$$

diferansiyel denklemini sağlamaktadır. Başlangıçta kondansatör üzerinde yük bulunmadığına göre, Q'yu zamanın fonksiyonu olarak hesaplayınız. Kondansatör üzerindeki yükün, nihaî değerinin yarısına ulaşması için ne kadar zaman geçmesi gerekir?

84. 83. problemi, devrenin pil yerine $E_0 \sin \omega t$ formülüne uygun alternatif elektromotor kuvveti sağlayan bir jeneratör ile beslenmesi halinde çözünüz.

85. Başlangıçta yüklü olan bir kondansatörün bir direnç üzerinden nasıl boşalacağını belirleyiniz. Yani 83. problemi, devreyi besleyen hiçbir kaynak olmaması ve kondansatörün başlangıçta bir $Q_0 \neq 0$ yükü taşıması halinde çözünüz.

86. R direnci, bir L indüktansı ve sabit E voltajı sağlayan bir pil bulunduran elektrik devresinde anahtar kapatılınca,

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E$$

diferansiyel denklemine uygun olarak bir akım oluşur. i akımını zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz. i'nin, nihaî değerinin yarısına ulaşması için ne kadar zaman geçmelidir? $\lim_{t\to\infty} i(t)$ yi hesaplayınız. $i_0=\frac{E}{R}$ olduğuna göre $i(t)$'yi bulunuz.

87. 86. problemi devrenin pil yerine, $E_0 \cos \omega t$ formülüne uygun alternatif elektromotor kuvveti sağlayan bir jeneratör ile beslenmesi ve $i_0=0$ olması halinde çözünüz.

88. üniversite birinci sınıf matematiğinde bir eğrinin eğrilik yarıçapı

$$R=[1+(y')^2]^{3/2}/|y''|$$

formülü ile verilmektedir. R sabit olduğuna göre bu denklemi çözünüz ve çözüm eğrilerinin $xy-$ düzleminde bir çember ailesi olduğunu gösteriniz.

89. 88. problemi, $R(x) = \sec x$ ve $x = 0$'da eğrilerin eğimlerinin sıfır olması halinde çözünüz.

90. Düzgün yayılı ağırlığı birim uzunluk başına w olan tam esnek bir kablo, aynı yükseklikte iki noktaya asıldığında nasıl bir şekil alır? *Hatırlatma:* Kablonun Şekil 3.6. da görüldüğü gibi bir parçasını ele alın ve H, kablonun en alçak noktasındaki yatay gerilmesi, T genel bir P noktasındaki gerilme, s de A ile P noktaları arasındaki kablo parçasının uzunluğu olduğuna göre

$$T \sin\theta = ws, \qquad T\cos\theta = H$$

olduğunu görün. Buradan da

$$\tan\theta = y' = \frac{ws}{H} \qquad \frac{dy'}{dx} = \frac{w}{H}\frac{ds}{dx}$$

elde edin. Meşhur yay uzunluğu formülüyle ds/dx, y' cinsinden bulunduktan sonra, hiperbolik fonksiyonlar kullanılarak y' ve y yi verecek integraller hesaplanır.

Şekil 3.6.

91. 90. problemi, kablo ağırlığının düzgün olmayıp, düzgün dağılı

bir yatay yük taşıması halinde çözünüz. (Bu, yaklaşık olarak asma köprülerdeki durumdur.)

92. Öyle bir eğri bulunuz ki, merkezden gelen ışınlar, bu eğri şeklinde cilalanmış aynadan x eksenine parelel olarak yansısın. *Hatırlatma:* Şekil 3.7.'ye bakınız. t istene eğriye genel $P(x, y)$ noktasında teğetse, 1,2 ve 3 numaralı açıların ölçüleri aynı,mesela α'dır. Şimdi dış açı teoreminden $\alpha = \beta - \alpha$ olur ki $\tan\alpha = \tan(\beta - \alpha)$ olur ki $\tan\alpha = y'$, $\tan\beta = y/x$ olduğunu düşünürsek tanjant açılım formülünden $y = 2xy' + y(y')^2$ diferansiyel denklemini elde ederiz. Buradan y' yü çeker ve bir integrasyon çarpanı kullanırsak, bu denklemi çözebiliriz. Ya da iki yanı y^2 ile çarpar ve $y^2 = u$ tanımı yaparsak bir Clairaut denklemi elde ederiz.

Şekil 3.7.

93. r yarıçaplı, düşey silindirik bir depoda h derinliğinde sıvı vardır. Depo, ekseni etrafında ω açısal hızı ile döndürülmektedir. Silindirin, suyun saçılmasını önleyecek kadar derin olduğunu varsayarak, sıvının serbest yüzeyinin, silindir ekseninden geçen bir düzlemle arakesiti olan eğrinin denklemini bulunuz. *Hatırlatma:* Denge halindeki sıvı yüzeyindeki bir sıvı zerresini yerinde tutan normal kuvvetin, zerrenin w ağırlığından ibaret olan düşey kuvvetle, radyal olarak içeri doğru yönelmiş $wx\omega^2/g$ merkezcil kuvvete ayrılabileceğine dikkat ediniz. Burada x zerrenin dönme eksenine uzaklığıdır.

94. 93. problemde, kesit eğrisini silindirin dibine değdirecek ω açısal hızını hesaplayınız.

95. W kg ağırlığında bir cisim, dönel yüzeyli bir sütunla desteklenecektir. Sütunun dm^3'ünün ağırlığı ρ ve üst tabanının yarıçapı r_0 dm ise, sütunun her kesitinde birim alana düşen yükün aynı olması için, yarıçapının sütun boyunca değişimini bulunuz.

96. 95. problemi, sütunun içinin boş ve et kalınlığının h dm olması halinde çözünüz.

97. Bir ağırlığa, y ekseni üzerinde, orijinden l kadar uzakta iken, l uzunluğunda uzamasız bir zincir bağlanmıştır. Zincirin öteki serbest ucu merkezdedir. Zincirin bu ucu x-ekseni üzerinde yavaşça hareket ettiriliyor. Zincirle çekilirken ağırlığın $xy-$düzleminde çizdiği eğriyi bulunuz. *Hatırlatma:* Zincirin doğrultusu daima eğriye teğet olacaktır. Böylece, $P(x, y)$ cismin bulunduğu yer ve s cismin o ana kadar aldığı yolun uzunluğu ise, $\frac{dy}{ds} = -\frac{y}{l}$ olacaktır. Bu önemli eğriye *traktriks: çekme eğrisi* denir.

98. Bir sahil muhafaza botu yoğun sis içinde bir kaçakcı motorunu arıyor. Sis aniden kalkıyor ve motorun d mil uzakta olduğu tespit ediliyor. Derken sis yeniden yoğunlaşıyor ve motor yeniden görünmez oluyor. Ancak motorun kaçmak istediği taktirde v_1 sabit hızıyla bilinmeyen bir doğrultuda fakat doğrusal bir rota izleyeceği biliniyor. Sahil muhafazanın hızı $v_2(> v_1)$ olduğuna göre, kaçakçıları yakalamak için nasıl bir rota izlemelidir?

Hatırlatma: Kaçakçının görüldüğü noktayı koordinat merkezi olarak seçiniz ve sahil muhafazanın sürekli olarak, orijine uzaklığı $v_1 t$ olan bir spiral çizmesi halinde kaçakçı motoruyla muhakkak karşılaşacağını görünüz. Kuşkusuz sahil muhafaza spiral çizmeğe başlamadan önce, t_0 kaçakçı motoru görüldükten sonra geçen zaman olmak üzere, orijinden $v_1 t$ kadar uzağa gitmelidir. Bu hatırlatmalardan yararlanabilmek için, sahil muhafazanın konumu,

$$x = r(t)\cos\theta(t), \quad y = r(t)\sin\theta(t)$$

kutupsal koordinat fonksiyonlarıyla izlenmelidir.

99. Bir kış sabahı kar yağmağa başlar ve aynı hızla bütün gün devam eder. Öğleyin, bıçak genişliği w m olan ve saatte $c\ m^3$ kar küreyebilen bir kar mücadele aracı çalışmağa başlar. Saat 13.00'da 3 km ilerlemiş olur ve 14.00'a kadar 1,5 km daha gider. Kar ne zaman yağmağa başlamıştır? *Hatırlatma:* t_0 kar yağmağa başladıktan sonra öğleye kadar geçen zaman ise ve t de öğleden sonraki saatleri sayıyorsa, s m/saat karın sabit yağma hızı, $x(t)$ kar derinliği, $y(t)$ metre cinsinden aracın aldığı yol ise,

$$y = s(t_0 + t), \qquad wydx = cdt$$

olacaktır.

100. V insan vücudundaki sıvı miktarı, Q da bu sıvı içinde düzgün dağılmış glükoz yoğunluğu olsun. Vücuttaki dokuların bu glükozu, mevcut glükoz yoğunluğu ile orantılı olarak emdiği bilinmektedir. Glükoz düzeyi çok düşük olduğu zaman (hastalık hallerinin birçoğunda durum böyledir), damarlardan glükoz zerketmek gerekir. Bir hastanın damarından dakikada A mg glükoz verildiğini ve bu işlemin vücut sıvısında önemli bir artış meydana getirmediğini varsayalım. Q_0 işlem başlangıcındaki glükoz yoğunluğu olduğuna göre, herhangi bir t anında vücut sıvısı içinde bulunan glükozun yoğunluğunu, zamanın fonksiyonu olarak bulunuz.

101. V hacminde sıvı dolu bir hücrenin, yoğunluğu c olan bir çözelti içine tamamen batırıldığını düşünelim. Çözelti hücre içine **Fick yasası** gereğince nüfuz eder: *Bir çözeltinin ince bir zardan bu zara dik doğrultuda nüfuz hızı, zarın alanı ve çözeltideki maddenin iki ortamdaki yoğunlukları farkı ile orantılıdır.* c'nin sabit kaldığını varsayarak, çözeltideki maddenin nüfuzunun, y bu düzgün dağılı maddenin hücre içindeki yoğunluğu, k da geçirgenlik katsayısı olmak üzere

$$\frac{dy}{dt} = k\frac{A}{V}(c - y)$$

diferansiyel denklemine göre olacağını gösteriniz. Maddenin hücre içindeki başlangıç yoğunluğunun $y_0(< c)$ olduğunu varsayarak bu diferansiyel denklemi çözünüz.

102. 101. problemde dış ortamdaki çözelti içindeki madde yoğunluğu 0.05, hücre içindeki yoğunluğu 0.01 ise ve 10 dakika sonra 0.02'ye çıkıyorsa, hücre içi yoğunluğun 0.03 ve 0.04 olması için ne kadar zaman gereklidir?

103. Difüzyon modelinde, aynı A alanlı sınırı paylaşan, birbirinin aynı V hacimli iki bölme bulunur. İki bölme arasıdaki sınır, geçirgen bir zardır. Bölmelerin geri kalan sınırları ise geçirgen değildir. Başlangıçta bölmelere, aynı maddenin farklı yoğunluklardaki çözeltileri konur. Yoğunluklar başlangıçta x_0, y_0 ve t anında x, y olsunlar. Fick yasasını kullanarak iki bölme arasındaki difüzyon işleminin:

$$x + y = x_0 + y_0, \quad \frac{dx}{dt} = k\frac{A}{V}(x_0 + y_0 - 2x)$$

denklemlerine göre olacağını gösteriniz. Bu denklemleri çözünüz ve her iki bölmedeki yoğunlukları zamanın fonksiyonu olarak bulunuz.

104. 103. problemdeki başlangıç yoğunlukları $x_0 = 0,\ \ y_0 = 0.10$ olduğuna ve 20 dakika sonra 0.02 ve 0.08 olarak ölçüldüklerine göre, bu değerlerin 0.04 ve 0.06 düzeyine ulaşması için ne kadar zaman geçmelidir?

105. 103. problemdeki bölmeler 20 cm boyunda, 4 cm yarıçaplı eş silindirler ise, ve birbirlerine dairesel yüzlerinden biri ile deyiyorlarsa, $x_0 = 03, y_0 = 0.12$ ve 30 dakika sonra 0.05 ve 0.10 olarak gözlenmişlerse, k geçirgenlik katsayısının değeri nedir?

106. 103. problemi, daha yoğun olan çözeltiyi bulunduran bölme diğerinin hacimce üç katı olması halinde çözünüz.

107. Kamış şekerinin inversiyonu sırasında ham şeker hidroliz ile bir dekstroz ve leviloz karışımına dönüşür. Dönüşüm hızı henüz dönüşmemiş ham şeker miktarı ile orantılıdır. 1000 kg ham şeker 10 saat sonra 800 kg'a inmişse, 24 saat dolduğu anda ne kadar ham şeker kalacaktır?

108. **Young elastiklik modülü** E olan, her tarafındaki yapısı aynı, l uzunluğunda bir çubuğun ekseni, x-ekseni boyuncadır ve çubuğun

her kesitinin sentroidi, bu eksen üzerinde bulunmaktadır. Çubuğun x=0 daki ucu hareket etmeyecek şekilde duvara saplanmıştır. x=l ucundaki kesite boyuna etkiyen F kuvveti düzgün dağılmıştır. C çubuğun, F kuvveti etkimezden önce, sabit ucundan x kadar uzaktaki kesiti olsun (Şekil 3.8.). F kuvveti uygulanınca C, x doğrultusunda $u(x)$ kadar yerdeğiştirmektedir. **(a)** $u(x)$'i, C'nin $A(x)$ alanı cinsinden hesaplayınız.

$l = 10$ için $u(10)$'u, C kesiti

(b) bir kenarı $1 - x/20$ olan bir kare,

(c) yarıçapı $1 - x/20$ olan bir çember olması halinde hesaplayınız.

Hatırlatma: Tanım gereğince **gerilme** birim alan başına kuvvet, **şekil değiştirme** de birim boy başına uzamadır. E=gerilme/şekil değiştirme dir.

Şekil 3.8.

KUNMASI TAVSİYE EDİLEN KİTAPLAR

Agnew (1)
Kaplan (30)
Rainville (45)
Spiegel (50)

Bölüm 4

İki ve Daha Yüksek Basamak Denklemler

Adî diferansiyel denklemler konusu, büyük teorik ve uygulama önemi olan bir konudur. Teorik bakımdan konu, sadelik ve güzellik anıtıdır. Uygulama bakımından, lineer diferansiyel denklemler fen bilimleri ve mühendisliğin bir çok uygulamasında kendilerini gösterirler. Bereket versin bu şekilde ortaya çıkan diferansiyel denklemlerin çoğu, lineer sabit katsayılı denen özel bir türdendir. Bu tür denklemler için doğrudan çözüm yöntemleri mevcuttur. Bu bölümün amacı böyle yöntemlerden bazılarını incelemektir. Ancak önce, bölümün başından sonuna kadar bize lazım olacak temel teoremleri incelememiz gerekiyor. İspatlarını 11. Bölüm'e bırakarak, bu önemli teoremlerin ifadelerini ve uygulanışlarını vermekle işe başlıyoruz.

4.1 Lineer Denklemlerin Temel Teorisi

A. Tanım ve Temel Varlık Teoremi.

TANIM. *n. basamaktan lineer diferansiyel denklem*'ler, $a_0 \not\equiv 0$ olmak üzere

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x), \qquad (4.1)$$

şeklinde denklemlerdir.

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ fonksiyonlarının bir $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli fonksiyonlar ve $a_0(x) \neq 0, \quad \forall x \in [a, b]$ olduğunu kabul edeceğiz. Denklemin sağ yanına *homojen olmayan terim* denir. $b(x) \equiv 0$ ise denklem,

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0$$

haline gelir ve buna *homojen denklem* denir.

Örnek 4.1.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + x^2 y = e^x$$

ikinci basamaktan lineer bir diferansiyel denklemdir.

Örnek 4.2.

$$\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 5y = \sin x$$

üçüncü basamaktan lineer bir diferansiyel denklemdir.

Şimdi n. basamaktan lineer diferansiyel denklemlere ait başlangıç değer problemlerine ilişkin temel varlık teoremini ifade edelim:

TEOREM 4.1.

Hipotez 1. $a_0 \not\equiv 0$ olmak üzere

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x), \tag{4.1}$$

denklemini gözönüne alalım. Burada $a_0, a_1, \ldots, a_n$ fonksiyonları, bir $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli gerçel fonksiyonlar ve $a_0(x) \neq 0, \quad \forall x \in [a, b]$ olmaktadır.

2. x_0 noktası $a \leq x \leq b$ aralığının herhangi bir noktası ve $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$'ler de n tane keyfî sabit olsun.

Hüküm. (4.1) diferansiyel denkleminin

$$f(x_0) = c_0, f'(x_0) = c_1, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$$

olacak şekilde bir tek f çözümü vardır.

(4.1)'deki gibi n. basamaktan, katsayıları ve homojen olmayan terimi x ekseninin belli bir aralığı üzerinde, Teorem 4.1'in 1. hipotezinde bahsedilen süreklilik özelliklerini gösteren lineer bir diferansiyel denklem incelemekte olduğumuzu varsayalım. O zaman bu aralıkta *herhangi* bir x_0 noktası ve *herhangi* n tane c_0, c_1, $\ldots$, c_{n-1} gerçel sayısı verildiğinde bu teorem bize diferansiyel denklemin, $x = x_0$ noktasında c_0'a eşit olan, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ sayılarının herbiri için de k. türevleri c_k değerlerini alan *bir tek çözüm*'ü bulunacağını garanti etmektedir. Yine bu teorem, bu tek çözümün, yukarıda bahsedilen aralığın *her x noktasında* tanımlı olacağını da söylemektedir.

Örnek 4.3.

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + x^3y = e^x \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = -5 \end{cases}$$

başlangıç değer problemini ele alalım.

Bu ikinci basamak diferansiyel denklemin e^x homojen olmayan terimi gibi, 1, $3x$, x^3 katsayıları da $-\infty < x < +\infty$ aralığının her x noktası için sürekli fonksiyonlardır. Burada x_0 noktası, bu aralıkta bulunduğu belli olan $x = 1$ noktası; c_0, c_1 gerçel sayıları da, sırasıyla $2, -5$'tir. Böylece Teorem 1.1 bize, verilen problemin çözümünün tek ve $-\infty < x < +\infty$ aralığının her x noktasında tanımlı olduğunu söylüyor.

Örnek 4.4.

$$\begin{cases} 2\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{d^2y}{dx^2} + 3x^2\frac{dy}{dx} - 5y = \sin x \\ y(4) = 3 \\ y'(4) = 5 \\ y''(4) = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

başlangıç değer problemini ele alalım.

Buradaki problemimiz üçüncü basamaktandır. $\sin x$ homojen olmayan terimi gibi; 2, x, $3x^2$, -5 katsayıları da $-\infty < x < +\infty$ aralığının her x noktası için sürekli fonksiyonlardır. Bu problemde x_0 noktası, bu aralıkta bulunduğu belli olan $x = 4$ noktası; c_0, c_1, c_2 gerçel sayıları da sırasıyla 3, 5, $-\frac{7}{2}$'dir. Böylece Teorem 1.1 bize, verilen problemin çözümünün tek ve $-\infty < x < +\infty$ aralığının her x noktasında tanımlı olduğunu söyler.

Teorem 4.1'in yararlı bir sonucu şudur:

SONUÇ TEOREM.

Hipotez 1. f fonksiyonu

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0 \qquad (4.2)$$

homojen denkleminin; x_0 noktası, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ fonksiyonlarının hepsinin de sürekli ve $a_0(x) \neq 0$ olduğu bir $a \leq x \leq b$ aralığında bulunmak üzere,

$$f(x_0) = 0,\ f'(x_0) = 0,\ \ldots,\ f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

olacak şekilde bir çözümü olsun.

Hüküm. $a \leq x \leq b$ aralığındaki her x için $f(x) = 0$ olur.

(4.2)'deki gibi n. basamaktan, katsayıları x ekseninin belli bir aralığı üzerinde sürekli, homojen bir lineer bir diferansiyel denklem incelemekte olduğumuzu varsayalım. Ayrıca bu denklemin, kendisi ve $n-1$'inciye kadar bütün türevleri bu aralığın bir x_0 noktasında sıfır değerini alan, bir f çözümünün bulunduğunu kabul edelim. Sonuç teorem bize bu çözümün, yukarıda bahsedilen aralığın *her x noktasında*, $f(x) = 0$ olan *belli çözüm* olacağını söylemektedir.

Örnek 4.5.

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + x^2y = 0$$

üçüncü basamak homojen denkleminin

$$f(2) = f'(2) = f''(2) = 0$$

şartını sağlayan çözümü, *her x noktasında* $f(x) = 0$ olan belli çözümdür.

B. Homojen Denklem.

Şimdi (4.2) homojen denklemi ile ilgili temel sonuçları ele alacağız. Önce şu temel teoremi ifade edelim:

TEOREM 4.2. Lineer Homojen Diferansiyel Denklemler İçin Temel Teorem.

Hipotez 1. $f_1, f_2, \ldots, f_m$'ler (4.2)'deki lineer homojen diferansiyel denkleminin herhangi m tane çözümü olsun.

Hüküm. $c_1, c_2, \ldots, c_m$'ler m tane keyfî sabit olmak üzere

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_m f_m$$

de (4.2) diferansiyel denkleminin bir çözümüdür.

Teorem 4.2 bize, (4.2) denkleminin bilinen m tane çözümünün herbiri keyfî bir sabitle çarpılıp sonuçlar toplanırsa, elde edilen toplamın da (4.2) denkleminin bir çözümü olacağını söylüyor. Lineer bileşim kavramını kullanarak bu teoremi daha basit hale getirebiliriz.

TANIM. *Lineer Bileşim*: $c_1, c_2, \ldots, c_m$'ler m tane keyfî sabit ve $f_1, f_2, \ldots, f_m$ de m tane fonksiyon ise

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_m f_m$$

ifadesine $f_1, f_2, \ldots, f_m$'lerin *lineer bileşim*'i denir.

Bu kavramı kullanarak Teorem 4.2'yi yeniden şöyle ifade edebiliriz:

TEOREM 4.2. (Yeni ifadesi) (4.2) homojen lineer diferansiyel denkleminin çözümlerinin herhangi lineer bileşimleri de aynı denklemin bir çözümüdür.

Örnek 4.6. $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

denkleminin çözümleri olduğu kolayca gösterilebilir. Teorem 4.2 bize herhangi c_1, c_2 sabitleri için $c_1 \sin x + c_2 \cos x$ 'in de bir çözüm olduğunu söylüyor. Mesela,

$$5 \sin x + 6 \cos x$$

de bir çözümdür.

Örnek 4.7. e^x, e^{-x} ve e^{2x} fonksiyonlarının

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

denkleminin çözümleri olduğu kolayca gösterilebilir. Teorem 4.2 bize herhangi c_1, c_2, c_3 sabitleri için $c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}$ 'in de bir çözüm olduğunu söylüyor. Mesela,

$$2e^x - 3e^{-x} + \frac{2}{3}e^{2x}$$

de bir çözümdür.

Şimdi (4.2) denkleminin genel çözümünün nelerden oluşacağını göreceğiz. Bunu anlamak için önce *lineer bağımlılık* ve *lineer bağımsızlık* kavramlarını tanımlamalıyız.

TANIM. *hepsi birden sıfır olmayan* n tane $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabiti $a \leq x \leq b$ aralığındaki her x için

$$c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_nf_n = 0$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonlarına $a \leq x \leq b$ aralığında *lineer bağımlı*'dırlar denir.

Özel olarak, c_1, c_2 sabitleri $a \leq x \leq b$ aralığındaki her x için

$$c_1f_1 + c_2f_2 = 0$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa, f_1, f_2 fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığında lineer bağımlıdırlar.

Örnek 4.8. x ve $2x$ fonksiyonları $0 \leq x \leq 1$ aralığında lineer bağımlıdırlar. Çünkü $0 \leq x \leq 1$ aralığındaki her x için

$$c_1x + c_2(2x) = 0$$

olacak şekilde ikisi birden sıfır olmayan c_1, c_2 sayıları bulunabilir. Mesela $c_1 = 2,\ c_2 = -1$ alınabilir.

Örnek 4.9. $\sin x,\ 3\sin x$ ve $-\sin x$ fonksiyonlarının $-1 \leq x \leq 2$ aralığında lineer bağımlı olduklarını görüyoruz. Çünkü $-1 \leq x \leq 2$ aralığındaki her x için

$$c_1 \sin x + c_2(3\sin x) + c_3(-\sin x) = 0$$

olacak şekilde üçü birden sıfır olmayan c_1, c_2, c_3 sayıları bulunabilir. Mesela $c_1 = 1,\ c_2 = 1,\ c_3 = 4$ alınabilir.

TANIM. $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığında lineer bağımlı değillerse, bu aralıkta *lineer bağımsız*'dırlar denir. Yani $a \leq x \leq b$ aralığındaki her x için

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0$$

olması,

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$$

olmasını gerektiriyorsa, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığında *lineer bağımsız*'dırlar denir. (Başka bir deyişle bir takım fonksiyonların özdeş olarak sıfır olan yegane lineer bileşimleri,

$$0.f_1 + 0.f_2 + \ldots + 0.f_n = 0$$

"sıfır" lineer bileşim ise, bu fonksiyonlar lineer bağımsızdır.)

Örnek 4.9. $x,\ x^2$ fonksiyonlarının $0 \leq x \leq 1$ aralığında lineer bağımsız olduklarını görüyoruz. Çünkü $0 \leq x \leq 1$ aralığındaki her x için $c_1 x + c_2 x^2 = 0$ olması, $c_1 = c_2 = 0$ olmasını gerektirir.

Bundan sonraki teoremimiz, n. basamaktan homojen lineer diferansiyel denklemlerin lineer bağımsız çözüm takımlarının varlığı ve böyle lineer bağımsız çözüm takımlarının önemi ile ilgili.

TEOREM 4.3. (4.2)'deki n. basamak homojen lineer diferansiyel denklemin daima n tane lineer bağımsız çözümü vardır. Ayrıca $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları, (4.2) denkleminin n tane lineer bağımsız çözümü ise, (4.2) denkleminin her f çözümü $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabitlerini uygun seçmek suretiyle, bu çözümlerin lineer bileşimleri olarak

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n$$

şeklinde yazılabilir.

n. basamaktan bir homojen lineer diferansiyel denklem verildiğinde, bu teorem bize, n tane lineer bağımsız çözümün bizzat var olduğunu garanti etmektedir. Ayrıca teorem buradan da öteye geçerek, (4.2)'nin nasıl bulunmuş olursa olsun, herhangi bir çözümünün; $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabitlerini uygun seçmek suretiyle bu çözümlerin lineer bileşimleri olarak yazılabileceğini söylemektedir.

Şimdi $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları (4.2) denkleminin n tane lineer bağımsız çözümünün bir takımı olsun. Teorem 4.2'ye göre, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ keyfî sabitler olmak üzere

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n \tag{4.3}$$

lineer bileşimi de (4.2) denkleminin bir çözümüdür. Ayrıca Teorem 4.3'e göre, (4.2) denkleminin her f çözümü $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabitlerini uygun seçmek suretiyle bu çözümlerin lineer bileşimleri olarak (4.3) şeklinde yazılabilir. Böylece, (4.2)'nin n tane lineer bağımsız çözümünün bir lineer bileşimi olan (4.3) ifadesi, (4.2) denkleminin bir genel çözümü gibi duruyor. (4.3)'ü oluşturan ve n tane olan $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları lineer bağımsız olduklarından (4.3) çözümü, n. basamaktan bir diferansiyel denklemin n tane *esaslı keyfî sabit* bulunduran çözümüdür. Böylece, n. basamaktan bir homojen lineer diferansiyel denklemin genel çözümünün tanımını şöyle yapabiliriz:

TANIM. $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığında (4.2)'deki n. basamaktan homojen lineer diferansiyel denklemin n tane lineer bağımsız çözümü ise; $c_1, c_2, \ldots, c_n$'ler keyfî sabitler olmak üzere

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n, \; a \leq x \leq b$$

ile tanımlı f fonksiyonu $a \leq x \leq b$ aralığında (4.2)'nin bir *genel çözüm*'üdür.

Böylece (4.2) denklemin n tane lineer bağımsız çözümü bilindiğinde, denklemin genel çözümünü, bu n tane çözümün bir lineer bileşimi olarak hemen yazabiliriz.

Örnek 4.11. $-\infty < x < +\infty$ aralığının her x noktasında $\sin x$ ve

$\cos x$ fonksiyonlarının,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

denkleminin çözümleri olduğunu gözlemiştik. Bu fonksiyonların lineer bağımsız olduklarını da gösterebiliriz. Böylece genel çözüm, c_1, c_2 keyfî sabitler olmak üzere

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

lineer bileşimi olarak yazılabilir. Bu durumu $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ ile gösteririz.

Örnek 4.12.

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

denkleminin e^x, e^{-x} ve e^{2x} çözümlerinin, $-\infty < x < +\infty$ aralığının her x noktasında lineer bağımsız oldukları gösterilebilir. Böylece genel çözüm, c_1, c_2, c_3'ler keyfî sabitler olmak üzere

$$c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}$$

lineer bileşimi olarak yazılabilir. Bu durumu

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}$$

ile gösteririz.

Bundan sonraki teorem, (4.2) denkleminin n tane çözümünün lineer bağımsız olup olmadığını anlamak için bir ölçüt sağlar. Önce bir fonksiyon kümesinin Wronskian'ını tanımlayalım.

TANIM. $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları, $a \leq x \leq b$ gerçel aralığında $n-1$.'ye kadar türeve sahip, n tane gerçel fonksiyon olsun. Üsler türevleri göstermek üzere

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

determinantına, bu n tane fonksiyonun *Wronskian*'ı denir. W fonksiyonunun kendisinin de $a \leq x \leq b$ gerçel aralığında tanımlı ve değerleri $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ ile gösterilen gerçel değerli bir fonksiyon olduğunu görüyoruz.

TEOREM 4.4. (4.2)'deki homojen lineer diferansiyel denklemin $f_1, f_2, \ldots, f_n$ çözümlerinin, $a \leq x \leq b$ gerçel aralığında lineer bağımsız olmaları için gerekl ve yeter şart, Wronskianlarının, $a \leq x \leq b$ aralığındaki herhangi bir x noktasında sıfırdan farklı olmasıdır.

Buna şunu da ekleyebiliriz:

TEOREM 4.5. (4.2)'nin $f_1, f_2, \ldots, f_n$ çözümlerinin Wronskian'ı, bir $a \leq x \leq b$ gerçel aralığında ya özdeş olarak sıfırdır, ya da aralığın hiçbir yerinde sıfır olamaz.

Böylece (4.2) denklemin n tane çözümünü bulabilmişsek, bunların lineer bağımsız olup olmadığını anlamak için Teorem 4.4 ya da Teorem 4.5'i kullanabiliriz. Lineer bağımsız iseler, denklemin genel çözümünü bu n tane çözümün bir lineer bileşimi olarak hemen yazabiliriz.

Elimizde ikinci basamaktan

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0$$

genel homojen lineer diferansiyel denklem bulunması halinde bu denklemin f_1, f_2 çözümlerinin Wronskian'ı

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = f_1 f_2' - f_1' f_2$$

olur.

Örnek 4.13.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

denkleminin $\sin x$ ve $\cos x$ çözümlerinin lineer bağımsız olduklarını göstermek için Teorem 4.4'ü uygulayacağız.

$$W(\sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$$

olur ki, $W(\sin x, \cos x) \neq 0$ olduğundan $\sin x$ ve $\cos x$ çözümlerinin lineer bağımsız olduklarını sonucuna varırız.

Örnek 4.14.

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

denkleminin e^x, e^{-x} ve e^{2x} çözümleri $-\infty < x < +\infty$ aralığının her x noktasında lineer bağımsızdır. Çünkü,

$$W(e^x, e^{-x}, e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -6e^{2x} \neq 0$$

olmaktadır.

C. Mertebe Düşürme

4.2 kesiminde iki ve daha yüksek basamaktan denklemlerin açık çözümlerini elde etme yöntemlerini incelemeğe başlayacağız. Orada ve ondan sonraki kısımlarda aşağıdaki mertebe düşürme teoreminin çok faydalı olacağını göreceğiz.

TEOREM 4.6.

Hipotez 1. f fonksiyonu

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0 \tag{4.2}$$

n. basamak homojen lineer diferansiyel denkleminin sıfırdan farklı bir çözümü olsun.

Hüküm. $y = fu$ dönüşümü (4.2) denklemini, $w = \frac{du}{dx}$ bağlı değişkeni cinsinden $n-1$. basamaktan homojen bir lineer diferansiyel denkleme dönüştürür.

Bu teorem bize, (4.2)'deki n. basamak homojen lineer diferansiyel denklemin sıfır olmayan bir çözümü bilindiğinde, bu denklemi uygun bir dönüşümle, ilk denklemden bir basamak daha düşük basamaktan başka bir homojen lineer diferansiyel denkleme dönüştürebileceğimizi söylemektedir. Bu teorem işimize en çok ikinci basamak lineer denklemlerde (n=2 hali) yarayacağından, bu durumu şimdi ayrıntılı olarak inceleyeceğiz. f fonksiyonu

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{d^y}{dx}+a_2(x)y=0 \tag{4.4}$$

2. basamak homojen lineer diferansiyel denkleminin sıfırdan farklı bir çözümü olsun. f fonksiyonu (4.4)'ün bilinen çözümü, u da x'in biraz sonra belirlenecek bir fonksiyonu olmak üzere

$$y=fu \tag{4.5}$$

dönüşümünü yapalım. Buradan türev alarak

$$\frac{dy}{dx}=f\frac{du}{dx}+u\frac{df}{dx} \tag{4.6}$$

ve

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{df}{dx}\frac{du}{dx}+\frac{d^2f}{dx^2}u \tag{4.7}$$

elde ederiz. (4.5), (4.6) ve (4.7)'yi (4.4)'te yerlerine yazarsak,

$$a_0\left[f\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{df}{dx}\frac{du}{dx}+\frac{d^2f}{dx^2}u\right]+a_1\left[f\frac{du}{dx}+u\frac{df}{dx}\right]+a_2fu=0$$

veya

$$a_0f\frac{d^2u}{dx^2}+\left[2a_0\frac{df}{dx}+a_1f\right]\frac{du}{dx}+\left[a_0\frac{d^2f}{dx^2}u+a_1\frac{df}{dx}+a_2f\right]u=0$$

elde edilir. f fonksiyonu (4.4)'ün çözümü olduğundan, u'nun katsayısı sıfırdır ve bu sonuncu denklem

$$a_0f\frac{d^2u}{dx^2}+\left[2a_0\frac{df}{dx}+a_1f\right]\frac{du}{dx}=0$$

halini alır. $w=\frac{du}{dx}$ dersek bu denklem

$$a_0f\frac{dw}{dx}+\left[2a_0\frac{df}{dx}+a_1f\right]w=0 \tag{4.8}$$

olur. Bu, w bağlı değişkeni cinsinden birinci basamaktan homojen bir lineer diferansiyel denklemdir. Bu denklem aynı zamanda ayrılabilen bir denklemdir. $f \neq 0$, $a_0 \neq 0$ kabul ederek ve df/dx'i f' ile göstererek

$$\frac{dw}{dx} = -\left[2\frac{f'}{f} + \frac{a_1}{a_0}\right] dx$$

yazabiliriz. Bunu integre edince de

$$\ln|w| = -\ln f^2 - \int \frac{a_1}{a_0} dx + \ln|c| \quad \text{veya} \quad w = \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{f^2}$$

buluruz. Bu, (4.8) denkleminin genel çözümüdür. $c = 1$'e karşılık olan özel çözümü alır, $w = \frac{du}{dx}$ olduğunu hatırlar ve bir kere daha integre edersek,

$$u = \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{f^2} dx$$

ve son olarak (4.5)'ten

$$y = f \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{f^2} dx \tag{4.9}$$

elde ederiz. (4.9)'un sağ tarafında bulunan ve bundan sonra g ile göstereceğimiz fonksiyon, başlangıçtaki (4.4) ikinci basamak denkleminin çözümdür. Dahası, bu yeni g çözümü ile eski f çözümü lineer bağımsızdır. Çünkü

$$W(f,g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & fu \\ f' & fu' + f'u \end{vmatrix} = f^2 u' = e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx} \neq 0$$

olmaktadır. Böylece

$$c_1 f + c_2 g$$

(4.4) denkleminin genel çözümüdür. Şimdi yukarıdaki tartışmayı bir teorem halinde özetleyelim.

TEOREM 4.7.

Hipotez 1. f fonksiyonu

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{d^y}{dx} + a_2(x)y = 0 \tag{4.4}$$

2. basamak homojen lineer diferansiyel denkleminin sıfırdan farklı bir çözümü olsun.

Hüküm 1. $y = fu$ dönüşümü (4.4) denklemini, $w = \frac{du}{dx}$ bağlı değişkeni cinsinden

$$a_0 f\frac{dw}{dx} + \left[2a_0\frac{df}{dx} + a_1 f\right] w = 0 \tag{4.8}$$

birinci basamaktan homojen lineer diferansiyel denklemine dönüştürür.

Hüküm 2. (4.8) denkleminin

$$w = \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0}dx}}{f^2}$$

özel çözümü

$$u = \int \omega \; dx = \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0}dx}}{f^2} dx$$

olmak üzere u fonksiyonunu verir. $g = fu$ ile tanımlı g fonksiyonu artık, (4.4) ikinci basamak denkleminin bir çözümdür.

Hüküm 3. (4.4) denkleminin önceden bilinen f çözümü ile yeni g çözümü lineer bağımsızdır. Böylece (4.4) denkleminin genel çözümü

$$c_1 f + c_2 g$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi hem yukarıdaki teoremin kullanışlılığını vurgulayalım ve hem de kullanım sınırlarını belirtelim. Teoremin faydasını buraya kadar zaten anlamış bulunuyoruz. Teorem bize, (4.4) ikinci basamak denkleminin bir çözümü bilindiğinde, denklemin bundan lineer bağımsız ikinci çözümünü ve böylece genel çözümünü elde etmek üzere mertebe düşürebileceğimizi söylemektedir. Diğer taraftan, teoremin kullanımındaki sınırlar da açıkça görülmektedir. Teoremin uygulanabilmesi için (4.4) denkleminin bir çözümünün önceden biliniyor olması gerekmektedir. Denklemin bir çözümü önceden nasıl bilinebilir? Genel olarak bilinemez. Fakat bazı hallerde denklemin kendisi, ya da denklemin ilgili olduğu fiziksel problem, mesela üstel fonksiyon veya lineer fonksiyon gibi belli özel tipte bir çözümün varlığını bize haber verir. Ancak bu durumlar karşımıza pek sık çıkmaz ve bu yollarla bir çözüm bulunamazsa, teoremin bize hiçbir yararı olmayacaktır.

Örnek 4.15. $y = x$'in

$$(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \tag{4.10}$$

denkleminin bir çözümü olduğu söylenmiştir. Mertebe düşürerek bununla lineer bağımsız olan ikinci bir çözüm bulunuz.

Çözüm. Önce $y = x$ fonksiyonunun (4.10) denklemini gerçekten sağladığını görelim. Sonra

$$y = xu, \quad \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}$$

ifadelerini (4.10) da yerlerine yazarsak,

$$(x^2+1)\left(x\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\right) - 2x\left(x\frac{du}{dx} + u\right) + 2xu = 0$$

veya

$$x(x^2+1)\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx} = 0$$

elde ederiz. $w = \frac{du}{dx}$ dersek

$$x(x^2+1)\frac{dw}{dx} + 2w = 0$$

birinci basamaktan homojen lineer diferansiyel denklemini buluruz. Bunu değişkenleri ayrılabilen bir denklem olarak çözersek

$$\frac{dw}{w} = -\frac{2dx}{x(x^2+1)}$$

veya

$$\frac{dw}{w} = \left[-\frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2+1}\right] dx$$

bulunur. Bunu integre edersek genel çözüm

$$w = \frac{c(x^2+1)}{x^2}$$

olur. $c = 1$ seçer, $w = \frac{du}{dx}$ olduğunu hatırlar ve sonucu integre edersek,

$$u = x - \frac{1}{x}$$

buluruz. Şimdi, f bilinen çözüm x olmak üzere, $g = fu$ fonksiyonunu yaparak

$$g(x) = x\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 - 1$$

elde edelim. Teorem 7'den biliyoruz ki bu, istenen ikinci lineer bağımsız çözümdür. Böylece(4.10) denkleminin genel çözümü, f ve g fonksiyonlarının $c_1 f + c_2 g$ lineer bileşimi olarak

$$y = c_1 x + c_2(x^2 - 1)$$

şeklinde yazılabilir.

D. *Homojen Olmayan Denklem*

Şimdi kısaca

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x), \qquad (4.1)$$

homojen olmayan denklemine geri dönelim. Bu denklemle ilgili temel teorem şudur:

TEOREM 4.8.

Hipotezler. (i) v fonksiyonu, (4.1) ile verilen n. basamaktan homojen olmayan lineer diferansiyel denklemin herhangi bir çözümü olsun. u da bu denkleme karşılık gelen

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0, \qquad (4.2)$$

homojen denkleminin herhangi bir çözümü olsun.

Hüküm. $u+v$, verilen (4.1) homojen olmayan lineer diferansiyel denkleminin bir çözümüdür.

Örnek 4.16. $y = x$'in,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x$$

homojen olmayan lineer diferansiyel denkleminin bir çözümü,
$y = \sin x$'in de bu denkleme karşılık gelen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

homojen denkleminin herhangi bir çözümü olduğunu görüyoruz. O zaman Teorem 4.8'e göre

$$\sin x + x$$

toplamı da

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x$$

homojen olmayan lineer diferansiyel denkleminin bir çözümüdür.
Yerine koyarak bunu kolayca doğrulayabiliriz.

Şimdi u'nun (4.2) homojen denkleminin bir *genel çözümü*, yani n tane lineer bağımsız çözümünün genel bir lineer bileşimi olduğunu kabul edelim. Hiç bir keyfî sabit bulundurmayan v de, (4.1) homojen olmayan lineer diferansiyel denkleminin her hangi bir özel çözümü olsun. Teorem (4.8)'i kullanarak $u+v$'nin, n. basamak homojen olmayan lineer diferansiyel denklemin bir çözümü olduğunu ve n tane keyfî sabit bulundurduğunu görürüz. Böyle bir çözüme (4.1) denkleminin *genel çözüm*'ü diyeceğiz. Bunu aşağıdaki tanımla özetleyelim:

TANIM. n. basamaktan

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x), \qquad (4.1)$$

homojen olmayan denklemini ve ona ilişkin

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0, \qquad (4.2)$$

homojen denklemini ele alalım.

(I) (4.2) denkleminin genel çözümüne, (4.1) denkleminin *tümleyen fonksiyon*'u denir. Bunu y_c ile göstereceğiz.

(II) (4.1) denkleminin hiç bir keyfî sabit bulundurmayan çözümüne, (4.1) denkleminin *özel integral*'i denir. Bunu y_p ile göstereceğiz.

(III) (4.1) denkleminin, y_c tümleyen fonksiyonu ve y_p de özel integrali olmak üzere $y_c + y_p$ çözümüne, *genel çözüm*'ü denir.

Böylece (4.1) denkleminin genel çözümünü bulmak için şunları bulmamız yeter:
(a) *Tümleyen fonksiyon*, yani (4.1) denklemine ilişkin (4.2) homojen denkleminin, n tane lineer bağımsız çözümünün genel bir lineer bileşimi; ve
(b) *Özel integral*, yani (4.1) denkleminin hiç bir keyfî sabit bulundurmayan çözümü.

Örnek 4.17.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x$$

denklemini gözönüne alalım. Tümleyen fonksiyon olan

$$y_c = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

verilen denkleme ilişkin $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ homojen denkleminin genel çözümüdür. Bir özel integral $y_p = x$ olarak alınabilir ve verilen denklemin genel çözümü şöyledir:

$$y = y_c + y_p = c_1 \sin x + c_2 \cos x + x$$

Bu bölümün geri kalan kısımlarında, genel çözümün iki parçasının elde edilmesine yarayan yöntemlerin incelenmesine devam edilecektir.

ALIŞTIRMALAR

1. Teorem 4.1, aşağıdaki iki denklemden sadece birine uygulanabilir. Bu denklemi bulunuz ve bu durumda teoremden çıkarılabilecek sonuçları titiz bir şekilde ifade ediniz. Teoremin öteki probleme niçin uygulanamayacağını açıklayınız.

(a)

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^x \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 7 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^x \\ y(0) = 5 \\ y'(1) = 7 \end{cases}$$

2. Sözlü olarak cevaplayınız:Aşağıdaki başlangıç değer probleminin çözümü nedir? Niçin?

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + x^2y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

3. $m = n = 2$ olması halinde Teorem 4.2'yi ispat ediniz. Yani $f_1(x)$, $f_2(x)$ fonksiyonları

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{d^y}{dx} + a_2(x)y = 0$$

denkleminin iki çözümü ise, c_1, c_2 keyfî sabitler olmak üzere $c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$'in de aynı denklemin bir çözümü olacağını kanıtlayınız.

4.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

diferansiyel denklemi gözönüne alınıyor.

(a) e^{2x} ve e^{3x} fonksiyonlarının $-\infty < x < \infty$ aralığında bu denklemin lineer bağımsız çözümleri olduklarını gösteriniz.

(b) Verilen denklemin genel çözümünü yazınız.

(c) $y(0) = 2,\ y'(0) = 3$ şartlarını sağlayan çözümü bulunuz. Bu çözüm niçin tektir?

5.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$$

diferansiyel denklemi gözönüne alınıyor.

(a) x^2 ve $\frac{1}{x^2}$ fonksiyonlarının, bu denklemin $0 < x < \infty$ aralığında tanımlı, lineer bağımsız çözümleri olduklarını gösteriniz.

(b) Verilen denklemin genel çözümünü yazınız.

(c) $y(2) = 3,\ y'(2) = -1$ şartlarını sağlayan çözümü bulunuz. Bu çözüm hangi aralıkta tanımlıdır?

6. e^x ve e^{4x} fonksiyonlarının

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

diferansiyel denkleminin çözümleri oldukları verilmiştir.

(a) Bu çözümlerin $-\infty < x < \infty$ aralığında lineer bağımsız olduklarını gösteriniz.

(b) $2e^x - 3e^{4x}$ fonksiyonunun da verilen diferansiyel denklemin bir çözümü olduğunu hemen söylememize imkan veren teorem hangisidir?

(c) (b)'deki çözümle e^x fonksiyonunun da, $-\infty < x < \infty$ aralığında lineer bağımsız olduklarını gösteriniz.

7. e^{-x}, e^{3x} ve e^{4x} fonksiyonlarının

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

diferansiyel denkleminin çözümleri oldukları verilmiştir. Bu çözümlerin $-\infty < x < \infty$ aralığında lineer bağımsız olduklarını gösteriniz ve genel çözümü yazınız.

8. $f(x) = x$'in bir çözüm olduğu verildiğine göre Teorem 4.6'yı

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

denklemi üzerinde doğrulayınız.

9. $y = e^{2x}$'in

$$(2x+1)\frac{d^2y}{dx^2} - 4(x+1)\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

denkleminin bir çözümü olduğu verildiğine göre, mertebe düşürerek verilenle lineer bağımsız bir çözüm daha bulunuz. Genel çözümü yazınız.

10. $y = x^2$'nin

$$(x^3-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - (x^3+2x^2-2x)\frac{dy}{dx} + (2x^2+2x-2)y = 0$$

denkleminin bir çözümü olduğu verildiğine göre, mertebe düşürerek verilenle lineer bağımsız bir çözüm daha bulunuz. Genel çözümü yazınız.

11. $n = 2$ olması halinde Teorem 4.8'i ispat ediniz. Yani u fonksiyonu

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{d^y}{dx} + a_2(x)y = 0$$

homojen denkleminin bir çözümü ve v de

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{d^y}{dx} + a_2(x)y = b(x)$$

denkleminin herhangi bir çözümü ise, $u + v$'nin son yazılan homojen olmayan lineer diferansiyel denkleminin bir çözümü olacağını ispat ediniz.

12.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$$

diferansiyel denklemi gözönüne alınıyor.

(a) e^x ve e^{2x} fonksiyonlarının, bu denkleme karşılık olan

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

homojen denkleminin çözümleri olduklarını gösteriniz.

(b) Verilen homojen olmayan lineer diferansiyel denkleminin tümleyen fonksiyonu nedir?

(c) $2x^2 + 6x + 7$'nin verilen denklemin bir özel integrali olduğunu gösteriniz.

(ç) Verilen denklemin genel çözümünü yazınız.

EK ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki denklemlerin Teorem 4.1'in hipotezlerini sağladıkları aralıkları bulunuz.

1. $x^2y''' - 3xy'' + 4y = \cosh x$
2. $(1 + x^2)y''' + xy'' - xy' + y = 0$
3. $\sqrt{x}y'' - 6xy' + 10y = \ln(1 - x)$
4. $(1 + x^4)y^{iv} + x^2y'' + y = e^x$
5. $y'' + 7xy' - 11y = \ln \sin \pi x$
6. $y^{iv} + (1+ \mid x \mid)y = \sqrt{x^2}$
7. $y''' - \sqrt{-x}y''+ \mid x \mid y' + y = \ln x$
8. $(\ln \cosh x)y''' + x^2y'' - xy' = \sinh x$
9. $(x^2 - e^2)y'' + (\ln \mid x \mid -2 \ln e)y' + (csch\ x)y = 0$
10. $(3!3 - 3 \ln x)y''' + (16 \cos x)^2y' + 23y = 5 \tan^{-1} x$

11. $y_1 = 1 + \cos 2x$ ve $y_2 = 2\cos^2 x$ fonksiyonlarının, $(-\infty, \infty)$ aralığında, $y'' + 4y = 4$ diferansiyel denklemini ve $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ koşullarını sağladıklarını gösteriniz. Bundan yararlanarak, x'in her gerçel değeri için

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$$

olduğunu kanıtlayınız.

Göz kontrolu ile aşağıdaki başlangıç değer problemlerinin tek çözümlerini bulunuz.

12. $y''' - 5x^2y'' + xy' + (\cos x)y = 0, \quad y(-2) = y'(-2) = y''(-2) = 0$
13. $y'' - 2y' + 2y = e^x, \quad y(0) = y'(0) = 1$
14. $y''' - xy'' + 2y' - y = 6 - x^3, \quad y(1) = y'(1) = y''(1) = 6$
15. $y'' + y = 0, \quad y(-\ln 2) = 1,\ y'(-\ln 2) = 0$
16. $x^2y'' + xy' + y = \ln x, \quad y(1/e) = -1,\ y'(1/e) = e$

17. $y_1(x) = x^4 - x^3, \quad -2 \le x \le 2$ ve

$$y_2(x) = \begin{cases} x^3 - x^4, & -2 \le x \le 0 \\ x^4 - x^3, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

olduğunu varsayarak, y_1 ve y_2 nin ikisinin de $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$ denkleminin $y(1) = 0, y'(1) = 1$ koşullarını sağlayan çözümleri olduğunu gösteriniz. y_1 ve y_2 nin farklı olması Varlık ve Teklik Teoremi ile çelişir mi? Açıklayınız.

18. Varlık ve Teklik Teoremi

$$(12 - x)^2y^{iv} - 8(12 - x)y''' + 12y'' = 0,$$

$$y(12) = y'(12) = y''(12) = y'''(12) = 0$$

başlangıç değer probleminin çözümünün tek olmasını garanti eder mi?

Çözüm Aileleri

1. (a) $(-\infty, \infty)$ aralığında, $y_1 = x^2 + 2$ ile $y_2 = 3$ ün her lineer bileşiminin $xy'' - y' = 0$ denkleminin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

(b) $(-\infty, \infty)$ aralığında, $y_1 = x^2 + 2$ ile $y_2 = 3$'ün, $xy'' - y' = 0$ denkleminin çözümü olacak şekilde bir lineer bileşimi var mıdır?

2. (a) $(-\infty, \infty)$ aralığında $\cos x$, $\sin x$, $\cosh x$, $\sinh x$ fonksiyonlarının hepsinin de $(y'')^2 - y^2 = 0$ denkleminin çözümü olduğunu gösteriniz.

(b) Bu çözümlerin hangi lineer bileşimi, denklemin genel çözümüdür?

(c) e^x ve e^{-x}'in her lineer bileşimi, bu denkleminin bir çözümü müdür?

3.'den 5.'ye kadar problemlerde uygun aralıklarda, a ve b sabitlerinin her değeri için, y_1 ile y_2 fonksiyonlarının verilen diferansiyel denklemin çözümü olduklarını, fakat y_1+y_2'nin sadece birinci denklemi sağladığını gösteriniz.

3. $xy'' = y', \quad 2yy'' = (y')^2; \quad y_1 = a,\ y_2 = bx^2$

4. $2xy'' + y' = 0, \quad 8x^3(y'')^2 - yy' = 0; \quad y_1 = a,\ y_2 = b\sqrt{x}$

5. $(x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad 2yy'' - (y')^2 = 0;$
$y_1 = a(x-1)^2,\ y_2 = b(x+1)^2$

6. $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olduklarını en az iki yoldan gösteriniz.

7. $\sinh x$ ve $\cosh x$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olduklarını en az iki yoldan gösteriniz.

8. $x+1, \quad x+2$ ve $2x+1$ fonksiyonlarının lineer bağımlı olduklarını gösteriniz. Bu fonksiyonların sağladığı en küçük basamaktan bir diferansiyel denklem yazınız.

9-16. problemlerde tanım aralıkları verilmiş fonksiyon kümelerinin lineer bağımsız olup olmadıklarını araştırınız. Lineer bağımlılığı gösteren bir bağıntı veriniz.

9. $\{e^x,\ e^{-x}\}, \quad (-\infty, \infty)$

10. $\{x^2,\ x^2-1,\ x^2+x+1\}, \quad (-\infty, \infty)$

11. $\{x^2-1,\ x^2+x+1,\ x^2+3x+5\}, \quad (-\infty, \infty)$

12. $\{\frac{1}{x+1},\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{x-2}\} \quad x < -1$

13. $\{\cos x \sin 2x,\ 2\sin x \cos 2x,\ \sin 3x\} \quad (-\infty, \infty)$

14. $\{\ln(x-1),\ 2\ln(x+1),\ \ln(x^2-1)\}, \quad (-\infty, \infty)$

15. $\{1,\ x,\ x^2\}, \quad (-\infty, \infty)$

16. $\{x^3,\ |\, x\,|^3\}, \quad (-\infty, \infty)$

17. $p_1(x)$ ya da $p_2(x)$ o noktada süreksiz olmadıkça, $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ diferansiyel denkleminin lineer bağımsız iki çözümünün birlikte sıfır oldukları bir noktanın bulunamayacağını gösteriniz.

18. $p_1(x)$ ya da $p_2(x)$ o noktada süreksiz olmadıkça, $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ diferansiyel denkleminin lineer bağımsız iki çözümünün birlikte ekstremum değer aldıkları bir noktanın bulunamayacağını gösteriniz.

19. İki fonksiyonun Wronskianı bir aralıkta sıfırdan farklı ise, bu fonksiyonların aralığın hiç bir noktasında katlı sıfırlarının bulunamayacağını gösteriniz.

20. $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ diferansiyel denkleminin iki lineer bağımsız çözümü veriliyor. Bu iki çözümden birinin iki sıfırı arasında muhakkak diğer çözümün bir sıfırı bulunacağını gösteriniz.

21. $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ diferansiyel denkleminin iki lineer bağımsız çözümünün oranı, bir aralığın tüm noktalarında mevcut ise, bu oranın aralığın her noktasında monoton artan ya da monoton azalan olacağını gösteriniz.

22. $ax + by = 0, \quad cx + dy = 0$ homojen cebirsel lineer denklem sisteminin $x = 0,\ y = 0$ dan başka bir çözümünün bulunabilmesi için gerek ve yeter koşul, sistemin katsayılar matrisinin determinantının

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0$$

olmasıdır. İspat ediniz.

23. y_1 ve y_2 nin Wronskianları sıfır değilse, $y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$ ve $y_4 = k_1y_1 + k_2y_2$ fonksiyonlarının sıfırdan farklı bir Wronskianları olması için gerek ve yeter koşulun, $c_1k_2 - c_2k_1 \neq 0$ olacağını gösteriniz.

24. e^{mx} ve xe^{mx} fonksiyonlarının Wronskianlarını herhangi bir genel x noktasında hesaplayınız.

25. e^x, e^{-x} ve xe^{2x} fonksiyonlarının Wronskianlarını herhangi bir genel x noktasında hesaplayınız.

26. $y_1 = \sin 2x$, $y_2 = \cos 2x$ fonksiyonlarının $y'' + y = 0$ denkleminin çözümleri olduğunu gösteriniz ve Wronskianlarının Abel formülünü sağladığını kanıtlayınız.

27. $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$ fonksiyonlarının $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ denkleminin çözümleri olduğunu gösteriniz ve Wronskianlarının Abel formülünü sağladığını kanıtlayınız.

28. Abel formülünü $n = 3$ halinde elde ediniz.

29. $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ normal denkleminin bir çözümü bilinirken ikinci bir çözümünün bulunması için Abel formülünün nasıl kullanılacağını anlatınız.

30. Verilen çözümü ve 29. problemdeki yöntemi kullanarak, aşağıdaki diferansiyel denklemlerin tam çözümlarini bulunuz.

(a) $(1 + x)y'' + xy' - y = 0; \quad y = x$

(b) $xy'' + y' = 0; \quad y = 1$

(c) $x^2y'' - xy' - 3y = 0; \quad y = 1/x$

(d) $y'' + \tan xy' - (6\cot^2 x)y = 0; \quad y = \sin^3 x$

(e) $y'' = (2\cot x - \tan x)y'; \quad y = 1$

(f) $x^2y'' + x^3y' - 2(1 + x^2)y = 0; \quad y = x^2$

31. $r(x)$, sonlu ya da sonsuz olabilen bir I aralığında sürekli türeve sahip pozitif bir fonksiyon, $q_2(x) \geq q_1(x)$ de I aralığında özdeş olarak eşit olmayan sürekli fonksiyonlar olsunlar. y_1,

$$[r(x)y']' + q_1(x)y = 0$$

ve y_2 de

$$[r(x)y']' + q_2(x)y = 0$$

denkleminin bir çözümü ise, y_1'in I'daki herhangi iki ardışık sıfırı arasında, y_2'nin en az bir sıfırının bulunacağını gösteriniz. *Hatırlatma: a* ve b, y_1'in ardışık iki sıfırı olsun. y_2 de a ile b arasında hiçbir noktada sıfır olmasın. Önce y_1 ve y_2'nin ikisinin birden (a, b) aralığında pozitif alınabileceğini görünüz. Sonra bunları kendi diferansiyel denklemlerinde yerlerine koyarak ve sonuçları bir araya getirerek

$$r(x)[y_1'(x)y_2(x) - y_2'(x)y_1(x)] \,|_a^b = \int_a^b [q_2(x) - q_1(x)]y_1(x)y_2(x)dx$$

olacağını gösteriniz. Buradan da ispatı bitirecek olan çelişkiyi çıkarınız. Bu önerme "**Sturm karşılaştırma teoremi**" olarak bilinir.

32. $q(x) \leq 0$ ise, $y'' + q(x)y = 0$ denkleminin birden fazla sıfıra sahip, sıfırdan farklı çözümü olamayacağını gösteriniz. *Hatırlatma:* 31. problemin sonucunu $y''+q(x)y = 0$ ve $y'' = 0$ denklemlerine uygulayınız.

Aşağıdaki denklemlerden herbirinin karşılarındaki fonksiyon çiftlerini çözüm kabul ettiklerini gösteriniz ve her seferinde iki ayrı taban kullanarak iki ayrı genel çözüm yazınız.

33. $y'' - y = 0, \qquad y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$
34. $y'' - 3y' + 2y = 0, \qquad y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}$
35. $y'' + y = 0, \qquad y_1 = \sin(x + \frac{\pi}{4}), y_2 = \sin(x - \frac{\pi}{4})$
36. $x^2y'' + xy' - y = 0, \qquad y_1 = x, y_2 = 1/x$

38. Temel varlık teoremi, hipotezindeki şartları bir I aralığında sağlayan, n. basamaktan bir lineer diferansiyel denklemin en azından n tane lineer bağımsız çözümü olacağını garanti etmektedir. Siz bu lineer bağımsız çözümlerin n taneden fazla olamayacağını kanıtlayınız.

4.2 Lineer Homojen Denklemler

A. *Giriş*

Bu kısımda n. basamak homojen lineer diferansiyel denklemlerin katsayıları sabitler olan özel bir çeşidini inceleyeceğiz. Böylece ilgilendiğimiz denklem $a_0, a_1, \ldots, a_n$'ler gerçel sabitler olmak üzere

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0, \tag{4.11}$$

şeklinde olacak. Bu denklemin genel çözümünün açıkça bulunabileceğini göstereceğiz.

Bir diferansiyel denklemin çözümlerini bulmaya çalışırken doğal olarak, bilinen tipte fonksiyonlardan birinin, bu denklemin çözümü olmanın şartlarını sağlayıp sağlamadığını araştırırız. (4.11) denklemi bizden, türevleri alınıp a_i'lerle çarpılarak elde edilen $a_i \frac{d^{n-i} f}{dx^{n-i}}$ terimleri toplandığında sıfır olacak şekilde bir f fonksiyonu istiyor. Bunun için türevleri kendisinin katları olan bir fonksiyona ihtiyacımız var. Her x için

$$\frac{d^k}{dx^k}[f(x)] = cf(x)$$

özelliğini gösteren bir fonksiyon biliyor muyuz? $f(x) = e^{mx}$ üstel fonksiyonu için

$$\frac{d^k}{dx^k}[e^{mx}] = m^k e^{mx}$$

olduğundan, bu sorunun cevabı "evet"tir. Böylece (4.11) denkleminin çözümlerini, m sayısını, e^{mx} fonksiyonu denklemi sağlayacak şekilde seçmek üzere $y = e^{mx}$ biçiminde fonksiyonlar arasından aramalıyız. O zaman

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m^2 e^{mx}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n} = m^n e^{mx}$$

olur ve bunları (4.11)'de yerlerine koyarsak

$$a_0 m^n e^{mx} + a_1 m^{n-1} e^{mx} + \ldots + a_{n-1} m e^{mx} + a_n e^{mx} = 0$$

veya

$$e^{mx} \left(a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \ldots + a_{n-1} m + a_n \right) = 0$$

buluruz. $e^{mx} \neq 0$ olduğundan, m değişkeni cinsinden

$$a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \ldots + a_{n-1} m + a_n = 0 \tag{4.12}$$

polinom denklemini elde ederiz. Bu denkleme, verilen (4.11) diferansiyel denkleminin *yardımcı denklem*'i, ya da *karakteristik denklem*'i denir. $y = e^{mx}$ fonksiyonu (4.11) denkleminin bir çözümü ise, m sayısı (4.12)'yi sağlamalıdır. Böylece (4.11) denklemini çözmek için (4.12) yardımcı denklemini yazar ve oradan m'yi çözeriz. (4.12) denklemini, (4.11)'deki k. türev yerine m^k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ yazarak kolayca elde edebileceğimiz görülmektedir. (4.12) denkleminin köklerinin gerçel ve farklı, gerçel ve katlı ve kompleks olmasına göre üç farklı durum ortaya çıkar.

B. I. Hal: Farklı Gerçel Kökler

(4.12) denkleminin köklerinin

$$m_1, m_2, \ldots, m_n$$

gibi n tane farklı gerçel sayı olduğunu kabul edelim. O zaman

$$e^{m_1 x},\ e^{m_2 x}, \ldots,\ e^{m_n x}$$

fonksiyonları (4.11) denkleminin n tane farklı çözümü olurlar. Bunlar için Wronski determinantını yazarsak, lineer bağımsız olduklarını görürüz. Böylece şu sonucu elde ederiz:

TEOREM 4.9. (4.11)'deki n. basamak sabit katsayılı homojen lineer diferansiyel denkleme ait karakteristik denklemin; $m_1, m_2, \ldots, m_n$ gibi n tane farklı gerçel kökü varsa, (4.11) denkleminin genel çözümü, $c_1, c_2, \ldots, c_n$'ler keyfî sabitler olmak üzere

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots + c_n e^{m_n x}$$

fonksiyonudur.

Örnek 4.18.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım. Karakteristik denklem

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

olduğundan

$$(m-1)(m-2) = 0, \quad m_1 = 1, \quad m_2 = 2$$

bulunur. Kökler gerçel ve farklı olduğundan e^x ve e^{2x} fonksiyonları denklemin çözümleridir. Böylece genel çözüm

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

olarak yazılabilir. e^x ve e^{2x} fonksiyonlarının gerçekten lineer bağımsız olduklarını şöyle gösterebiliriz: Bunların Wronski determinantı,

$$W(e^x, e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x} \neq 0$$

olur ki, Teorem 4.4'e göre bu çözümler lineer bağımsızdır.

Örnek 4.19.

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım. Karakteristik denklem

$$m^3 - 4m^2 + m + 6 = 0$$

olduğundan, son katsayı 6'nın çarpanları arasından -1'in bir kök olduğunu anladıktan sonra, polinom bölmesi yaparak

$$(m+1)(m^2 - 5m + 62) = 0, \quad m_1 = -1, \quad m_2 = 2, \quad m_3 = 3$$

bulunur. Kökler gerçel ve farklı olduğundan e^x, e^{2x} ve e^{3x} fonksiyonları denklemin çözümleridir. Böylece genel çözüm şöyle yazılabilir:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

C. II: Hal. Katlı Gerçel Kökler

Bu halin incelemesine basit bir örnekle başlayacağız.

Örnek 4.20. *Başlangıç örneği*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0 \tag{4.13}$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım. Karakteristik denklem

$$m^2 - 6m + 9 = 0$$

olduğundan

$$(m-3)^2 = 0, \quad m_1 = m_2 = 3$$

bulunur. Kökler gerçeldir ama farklı değillerdir. m_1 için e^{3x} çözümünü elde ederken, m_2 için de yine e^{3x} çözümü bulunur. Bu iki çözümün $y = c_1e^{3x} + c_2e^{3x}$ lineer bileşimi, iki *lineer bağımsız* çözümün lineer bileşimi olmadığından genel çözüm değildir. Aslında $y = c_1e^{3x}+c_2e^{3x}$ lineer bileşimini, $c_0 = c_1 + c_2$ olmak üzere $y = c_0e^{3x}$ şeklinde bir parametreye bağlı olarak yazabiliriz. *Bir tek* keyfî sabit bulunduran bu fonksiyon, kuşkusuz bu *ikinci* basamak denklemin genel çözümü değildir.

Buradaki birinci çözüm ile lineer bağımsız bir çözüm bulmalıyız ama, bunu nasıl gerçekleştireceğiz? Elimizde halihazırda e^{3x} gibi bir çözüm bulunduğundan, basamak düşürmek üzere Teorem 4.7'yi uygulayabiliriz. u şimdi belirlenecek bir fonksiyon olmak üzere

$$y = e^{3x}u$$

diyelim. O zaman

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x}\frac{du}{dx} + 3e^{3x}u, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{3x}\frac{d^2u}{dx^2} + 6e^{3x}\frac{du}{dx} + 9e^{3x}u$$

olur ki bunu (4.13)'te yerine koyarak

$$\left(e^{3x}\frac{d^2u}{dx^2} + 6e^{3x}\frac{du}{dx} + 9e^{3x}u\right) - 6\left(e^{3x}\frac{du}{dx} + 3e^{3x}u\right) + 9e^{3x}u = 0$$

yahut

$$e^{3x}\frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

elde ederiz. $w = \frac{du}{dx}$ dersek bu denklem

$$e^{3x}\frac{dw}{dx} = 0, \quad \text{veya} \quad \frac{dw}{dx} = 0$$

haline gelir ki, bu birinci basamak denklemin genel çözümü, c bir keyfî sabit olmak üzere sadece $w = c$'dir. Bir özel çözüm olarak $w = 1$ alır ve $w = \frac{du}{dx}$ olduğunu hatırlarsak, c_0 bir keyfî sabit olmak üzere

$$u = x + c_0$$

bulunur. Teorem 4.7'den, c_0'ın her seçimi için $ue^{3x} = (x + c_0)e^{3x}$ fonksiyonunun, (4.13)'te verilen ikinci basamak denklemin bir çözümü olduğunu biliriz. Yine aynı teorem bu çözümün önceki bilinen çözüm ile lineer bağımsız olduğunu söyler. $c_0 = 0$ alarak

$$y = xe^{3x} \tag{4.14}$$

çözümünü elde ederiz. Böylece *katlı kök* olan 3'e karşılık (4.13) denklemine

$$e^{3x}, \quad \text{ve} \quad xe^{3x}$$

lineer bağımsız çözümlerini buluruz.

Buradan (4.13) denkleminin genel çözümü

$$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}, \quad \text{veya} \quad y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} \tag{4.15}$$

olarak elde edilir.

Bu örneği rehber alarak yeniden, (4.11)'deki n. basamak denkleme dönelim. m, (4.12) karakteristik denkleminin *iki katlı* gerçel kökü ise, e^{mx} ve xe^{mx} fonksiyonlarının bu köke karşılık lineer bağımsız çözümler olmalarını bekleriz. Durum gerçekten böyledir. (4.12)'nin iki katlı gerçel kökü m, ve diğer $(n-2)$ tane farklı gerçel kökü

$$m_1, \ m_2, \ldots, \ m_{n-2}$$

ise, (4.11) denkleminin lineer bağımsız çözümleri

$$e^{mx}, \ xe^{mx}, \ e^{m_1x}, \ e^{m_2x}, \ldots, \ e^{m_{n-2}x}$$

olacak ve genel çözüm;

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx} + c_3 e^{m_1 x} + c_4 e^{m_2 x} + \ldots c_n e^{m_{n-2} x}$$

veya

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{mx} + c_3 e^{m_1 x} + c_4 e^{m_2 x} + \ldots c_n e^{m_{n-2} x}$$

olarak yazılabilecektir.

Benzer olarak (4.12) karakteristik denkleminin m gibi *üç katlı* bir gerçel kökü varsa,

$$e^{mx}, \quad x e^{mx}, \quad \text{ve} \quad x^2 e^{mx}$$

fonksiyonları bu köke karşılık olan lineer bağımsız çözümlerdir ve genel çözümün bu köke karşılık olan parçası;

$$(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{mx}$$

olacaktır. Böyle devam edersek bu II. haldeki durumu şu teoremde özetleyebiliriz:

TEOREM 4.10. (i) (4.11)'deki n. basamak sabit katsayılı homojen lineer diferansiyel denkleme ait (4.12) karakteristik denkleminin m gerçel kökü k katlı ise, (4.11) denkleminin genel çözümünün bu köke karşılık olan parçası;

$$(c_1 + c_2 x + \ldots + c_k x^{k-1}) e^{mx}$$

olur.

(ii) (4.12) karakteristik denkleminin geri kalan kökleri gerçel ve farklı $m_{k+1}, \ldots, m_n$ sayıları ise, (4.11) denkleminin denkleminin genel çözümü

$$y = (c_1 + c_2 x + \ldots + c_k x^{k-1}) e^{mx} + c_{k+1} e^{m_{k+1} x} + c_{k+2} e^{m_{k+2} x} + \ldots + c_n e^{m_n x}$$

fonksiyonudur.

(iii) (4.12) karakteristik denkleminin geri kalan köklerinden bazıları daha gerçel ve katlı ise, çözümünün bu köklere karşılık olan parçaları (i). kısımda m için bulunana benzer ifadelerdir.

Şimdi bazı örnekler ele alacağız.

Örnek 4.21.

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 18y = 0$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım.

$$m^3 - 4m^2 - 3m + 18 = 0$$

karakteristik denkleminin kökleri $3,\ 3,\ -2$ olduğundan genel çözüm

$$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + c_3e^{-2x} \quad \text{veya} \quad y = (c_1 + c_2x)e^{3x} + c_3e^{-2x}$$

olarak yazılabilir.

Örnek 4.22.

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 5\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 8y = 0$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım.

$$m^4 - 5m^3 + 6m^2 + 4m - 8 = 0$$

karakteristik denkleminin kökleri $2,\ 2,\ 2,\ -1$ olduğundan denklemin genel çözümünün bu köke karşılık olan parçası;

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{2x}$$

ve -1 basit köküne karşılık olan parçası;

$$y = c_4e^{-x}$$

olur ki genel çözüm

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{2x} + c_4e^{-x}$$

şeklinde yazılabilir.

D. III. Hal: Eşlenik Kompleks Kökler

(4.12) karakteristik denkleminin; a, b sayıları gerçel ve $i^2 = -1$ olmak üzere, $a + ib$ kompleks sayısını katlı olmayan kök kabul ettiğini varsayalım. Karakteristik denklemin katsayıları gerçel olduğundan, $a-ib$ eşlenik kompleks sayısı da katlı olmayan bir köktür. O zaman denklemin genel çözümünün bu köklere karşılık olan parçası; k_1, k_2 keyfî sabitler olmak üzere

$$k_1 e^{(a+ib)x} + k_2 e^{(a-ib)x}$$

olacaktır. $e^{(a+ib)x}$ ve $e^{(a-ib)x}$ ile tanımlı fonksiyonlar x gerçel değişkeninin kompleks fonksiyonlarıdır. Bunları lineer bağımsız iki gerçel fonksiyonla değiştirmek isteriz. Bunu, her θ için doğru olan

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

Euler Formülü'nü[1] kullanarak gerçekleştirebiliriz:

$$k_1 e^{(a+ib)x} + k_2 e^{(a-ib)x} = k_1 e^{ax} e^{ibx} + k_2 e^{ax} e^{-ibx} = e^{ax}\left[k_1 e^{ibx} + k_2 e^{-ibx}\right]$$

$$= e^{ax}\left[k_1(\cos bx + i\sin bx) + k_2(\cos bx - i\sin bx)\right]$$

$$= e^{ax}\left[(k_1 + k_2)\cos bx + i(k_1 - k_2)\sin bx\right] = e^{ax}\left[c_1 \sin bx + c_2 \cos bx +\right]$$

Burada $c_1 = i(k_1 - k_2)$, $c_2 = k_1 + k_2$ yeni keyfî sabitlerdir. Böylece (4.11) denkleminin genel çözümünün, $a + ib$ katsız kompleks köküne karşılık olan parçası;

$$e^{ax}\left[c_1 \sin bx + c_2 \cos bx\right]$$

olur. Bunu II. haldeki sonuçlarla birleştirirsek, II. hali de içine alan şu teoremi elde ederiz:

TEOREM 4.11. (i) (4.11)'deki n. basamak sabit katsayılı homojen lineer diferansiyel denklemine ait, (4.12) karakteristik denkleminin ikisi de katlı olmayan $a + ib$, $a - ib$ kompleks kökleri varsa, (4.11) denkleminin genel çözümünün bu köklere karşılık olan parçası;

$$e^{ax}(c_1 \sin bx + c_2 \cos bx)$$

[1] Bu temel özdeşliği ve kompleks üsler için $e^{ax+ibx} = e^{ax}e^{ibx}$ olacağı gerçeğini kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinden ödünç alıyoruz.

olur.

(ii) Öte yandan $a+ib$ ve $a-ib$ kompleks köklerinin herbiri k katlı ise, (4.11) denkleminin genel çözümünün bu köklere karşılık olan parçası;

$$e^{ax}\left[\left(c_1+\ldots+c_kx^{k-1}\right)\sin bx+\left(c_{k+1}+\ldots+c_{2k}x^{k-1}\right)\cos bx\right]$$

olur.

Şimdi bazı örnekler ele alacağız.

Örnek 4.23.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım. Bu denklemi daha önce 4.1 kısmındaki teoremler için kullanmıştık. Şimdi onun çözümünü Teorem 4.11'i kullanarak elde edelim.

$$m^2+1=0$$

karakteristik denkleminin kökleri $m=\pm i$ olduğundan bunlar $a=0,\ b=1$ olmak üzere $a+ib$ ve $a-ib$ şeklindeki katsız kompleks köklerdir. Böylece genel çözüm

$$y=e^{0.x}(c_1\sin 1.x+c_2\cos 1.x)$$

veya kısaca

$$y=c_1\sin x+c_2\cos x$$

olarak yazılabilir.

Örnek 4.24.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+25y=0$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım.

$$m^2-6m+25=0$$

karakteristik denkleminin kökleri $m=3\pm 4i$ olduğundan bunlar, $a=3,\ b=4$ olmak üzere, $a+ib$ ve $a-ib$ şeklinde katsız kompleks köklerdir. Böylece genel çözüm

$$y=e^{3x}(c_1\sin 4x+c_2\cos 4x)$$

olarak yazılabilir.

Örnek 4.25.

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 14\frac{d^2y}{dx^2} - 20\frac{dy}{dx} + 25y = 0$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım.

$$m^4 - 4m^3 + 14m^2 - 20m + 25 = 0$$

karakteristik denkleminin kökleri herbiri ikişer katlı olan $1 \pm 2i$ kompleks sayıları olduğundan bunlar, $a = 1,\ b = 2$ olmak üzere $a + ib$ ve $a - ib$ şeklindeki iki katlı kompleks köklerdir. Böylece genel çözüm şöyledir:

$$y = e^x[(c_1 + c_2x)\sin 2x + (c_3 + c_4x)\cos 2x]$$

E. Bir Başlangıç Değer Problemi

Şimdi n. basamak sabit katsayılı homojen lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri ile ilgili sonuçları, bu denklemle yazılmış bir başlangıç değer probleminin çözümüne uygulayalım.

Örnek 4.26.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 25y = 0 \qquad (4.16)$$

$$y(0) = -3 \qquad (4.17)$$

$$y'(0) = -1 \qquad (4.18)$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

Önce Teorem 4.1'e göre, bu problemin $-\infty < x < \infty$ aralığındaki her x için tanımlı, tek bir çözümü vardır. Şimdi bu çözümü bulacağız. Yani, (4.16) denkleminin (4.17) ve (4.18) şartlarını sağlayan özel çözümünü arayacağız. Biraz önce 4.24 örneğinde, (4.16) diferansiyel denkleminin genel çözümünün

$$y = e^{3x}(c_1 \sin 4x + c_2 \cos 4x) \qquad (4.19)$$

oduğunu bulmuştuk. Buradan

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x}[(3c_1 - 4c_2)\sin 4x + (4c_1 + 3c_2)\cos 4x] \tag{4.20}$$

elde edilir. Şimdi başlangıç şartlarını uygulayalım. (4.17)'deki $y(0) = -3$ şartını (4.19)'a uygularsak,

$$-3 = e^0(c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0)$$

olur ki, bu da hemen

$$c_2 = -3 \tag{4.21}$$

haline gelir. (4.18)'deki $y'(0) = -1$ şartını (4.20)'ye uygularsak,

$$-1 = e^0[(3c_1 - 4c_2)\sin 0 + (4c_1 + 3c_2)\cos 0]$$

olur ki,

$$4c_1 + 3c_2 = -1 \tag{4.22}$$

verir. (4.21) ve (4.22)'den c_1, c_2'yi çözersek

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -3 \end{cases}$$

olur. c_1, c_2'nin bu değerlerini (4.19) eşitliğinde yerlerine koyarsak, verilen başlangıç değer probleminin çözümü

$$y = e^{3x}(2\sin 4x - 3\cos 4x)$$

olarak elde edilir. Bu sonucu, $\sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$ ile çarpıp bölmekle

$$y = \sqrt{13}e^{3x}\left[\frac{2}{\sqrt{13}}\sin 4x - \frac{3}{\sqrt{13}}\cos 4x\right]$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. O zaman sonuç, ϕ açısı

$$\begin{cases} \sin\phi = -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \cos\phi = \frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

olmak üzere $y = \sqrt{13}e^{3x}\sin(4x + \phi)$ olarak yazılabilir.

ALIŞTIRMALAR

1'den 24'e kadar problemlerdeki diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$
2. $y'' - 2y' - 3y = 0$
3. $4y'' - 12y' + 5y = 0$
4. $3y'' - 14y' - 5y = 0$
5. $y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$
6. $y''' - 6y'' + 5y' + 12y = 0$
7. $y'' - 8y' + 16y = 0$
8. $4y'' + 4y' + y = 0$
9. $y'' - 4y' + 13y = 0$

10 $y'' + 6y' + 25y = 0$

11. $y'' + 9y = 0$
12. $4y'' + y = 0$
13. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 0$
14. $4y''' + 4y'' - 7y' + 2y = 0$
15. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$
16. $4y''' + 4y'' + 5y' + 6y = 0$
17. $y''' - y'' + y' - y = 0$
18. $4y^{iv} + 8y'' + 16y = 0$
19. $4y^{iv} + y = 0$
20. $4y^{v} = 0$

21. $y^{v} - 2y^{iv} + y''' = 0$
22. $4y^{iv} - y''' - 3y'' + y' + 2y = 0$
23. $y^{iv} - 3y''' - 2y'' + 2y' + 12y = 0$
24. $y^{iv} + 6y''' + 15y'' + 20y' + 12y = 0$

25'den 30'a kadar başlangıç değer problemlerini çözünüz.

25. $\begin{cases} y'' - y' - 12y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 9y'' - 6y' + y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

27. $\begin{cases} y'' - 4y' + 29y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4y'' + 4y' + 37y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -4 \end{cases}$

29.
$$\begin{cases} y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 2 \end{cases}$$

30.
$$\begin{cases} y''' - 29y'' + 4y' - 8y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

31. 10. mertebeden sabit katsayılı bir homojen lineer diferansiyel denklemin karakteristik denkleminin kökleri

$$4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 2+3i,\ 2-3i,\ 2+3i,\ 2-3i,\ 2+3i,\ 2-3i$$

olduğuna göre, bu denklemin genel çözümünü bulunuz.

32. $\sin x$ fonksiyonunun

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

denkleminin bir çözümü olduğu bilinmektedir. Bu denklemin genel çözümünü bulunuz.

Verilen çözümlerinden yararlanarak aşağıdaki denklemlerin genel çözümlerini yazınız.

32. $(2x - x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = 0, \quad y_1 = x - 1$
33. $y'' + 2y' + y = 0, \quad y_1 = e^{-x}$
34. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad y_1 = e^x$
35. $4x^2y'' - 8xy' + 9y = 0, \quad y_1 = x^{3/2}$
36. $y''' - y'' - y' + y = 0, \quad y_1 = e^x$
37. $y'' - 4xy' + 2(2x^2 - 1)y = 0, \quad y_1 = e^{x^2}$
38. $x^2(1+x)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1 = x$

39. $(2x+1)y'' - (4x+4)y' + 4y = 0, \quad y_1 = e^{2x}$
40. $x^2y'' + xy' - 4y = 0, \quad y_1 = x^2$

41. $y_1, \quad a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ denkleminin bir çözümü ise $y = uy_1$ yerine koymasının, $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ homojen olmayan denklemini, bağlı değişkeni $v = u'$ olan bir birinci basamak lineer denkleme dönüştüreceğini gösteriniz.

41. problemdeki yöntemi kullanarak aşağıdaki denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

42.$y'' - y = e^{2x}, \quad y_1 = e^x$
43.$y'' - 3y' + 2y = e^x, \quad y_1 = e^x$
44.$xy'' + 2y' = \frac{1}{x}, \quad y_1 = 1$
45.$y'' - 3y' + 2y = e^x, \quad y_1 = e^{2x}$
46.$y'' - 3y' + 2y = xe^x, \quad y_1 = e^x$
47.$y'' + y = \cos x, \quad y_1 = \sin x$
48.$x^3y'' + xy' - y = 1, \quad y_1 = x$
49.$(x^3 + 2x^2)y'' + 2xy' - 2y = (x+1)^2, \quad y_1 = x$

50. 41. problemdeki yöntem, y_1 homojen denklemin değil de homojen olmayan denklemin bir çözümü olduğu zaman da doğru mudur?

EK ALIŞTIRMALAR

A) İkinci Basamaktan Sabit Katsayılı Homojen Denklemler

Aşağıdaki başlangıç değer problemlerinin çözümleri ile tanımlanan harmonik hareketlerin frekans ve genliklerini bulunuz.

1. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = -13,\ y'(0) = 0$
2. $y'' + 64y = 0, \quad y(0) = -3,\ y'(0) = 32$
3. $y'' + 49y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 21$
4. $y'' + 100\pi^2 y = 0, \quad y(0) = -10,\ y'(0) = -100\pi$

Operatörlerin özellikleri ile ilgili aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Dy ile yD arasındaki fark nedir?

2. $(D+1)(D-2)\cos x = (D-2)(D+1)\cos x =$ $(D^2 - D - 2)\cos x$ olduğunu gösteriniz.

3. $(D+1)(D^2+2)\sin 3x = (D^2+2)(D+1)\sin 3x =$ $(D^3 + D^2 + 2D + 2)\sin 3x$ olduğunu gösteriniz.

4. $(D+1)(D+x)e^x = (D+x)(D+1)e^x$ midir? Açıklayınız.

5. Hangi koşullar altında

$$[D + r_1(x)][D + r_2(x)]f(x) = [D + r_2(x)][D + r_1(x)]f(x)$$

olur?

6. $r(x)$'i öyle bulunuz ki, $y = e^x$, $[D+r(x)](D+x)y = 0$ denkleminin bir çözümü olsun.

7. $r(x)$'i öyle bulunuz ki, $y = e^x$, $(D+x)[D+r(x)]y = 0$ denkleminin bir çözümü olsun.

8. $(D-1/x)(D-1)y = 0$ denkleminin bir genel çözümünü bulunuz. *Hatırlatma:* $(D-1)y = 0$ denkleminin her çözümünün, asıl denklemin de bir çözümü olacağını görünüz. Denklemin ikinci çözümünü de basamak düşürme yoluyla bulunuz.

9. $(D-1)(D-1/x)y = 0$ denkleminin bir genel çözümünü bulunuz.

Aşağıdaki denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

1. $y'' = 0$	2. $y'' - 3y' + 2y = 0$
3. $y'' - 2y' + y = 0$	4. $y'' + y' - 2y = 0$
5. $y'' + 5y' + 4y = 0$	6. $y'' - 5y = 0$
7. $y'' + 5y = 0$	8. $(4D^2 + 4D + 1)y = 0$
9. $(9D^2 - 12D + 4)y = 0$	10. $10y'' + 6y' + y = 0$
11. $y'' + 10y' + 26y = 0$	12. $(225D^2 + 150D + 36)y = 0$

Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin verilen koşulları sağlayan özel çözümlerini bulunuz.

1. $y'' + 3y' - 4y = 0,$	$x = 0'$da	$y = 4,\ y' = -2$
2. $y'' + 4y = 0,$	$x = 0'$da	$y = 2,\ y' = 6$
3. $y'' - 4y = 0,$	$x = 0'$da	$y = 1,\ y' = -1$
4. $25y'' + 20y' + 4y = 0,$	$x = 0'$da	$y = y' = 0$
5. $(D^2 + 6D + 9)y = 0,$	$x = 0'$da	$y = 0,\ y' = 3$
6. $(D^2 + 2D + 5)y = 0,$	$x = 0'$da	$y = 1,\ \ x = \pi'$de $\ \ y = 0$
7. $(D^2 + 2D + 5)y = 0,$	$x = 0'$da	$y = 1,\ \ x = \pi'$de $\ \ y' = 0$

Aşağıdaki problemleri çözünüz.

1. $x_1 = x_0 + n\pi$ olmadıkça, $y'' + y = 0$ denkleminin, $x = x_0$'da $y = y_0,\ x = x_1$'de $y = y_1$ koşulunu sağlayan bir tek çözümü olduğunu gösteriniz.

2. λ'nın hangi değerleri için $y'' + \lambda^2 y = 0$ denkleminin, $y(0) = 0,\quad y(\pi) = 0$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı çözümü vardır?

3. λ'nın hangi değerleri için $y'' + \lambda^2 y = 0$ denkleminin, $y'(0) = 0,\quad y'(\pi) = 0$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı çözümü vardır?

4. λ'nın hangi değerleri için $y'' + \lambda^2 y = 0$ denkleminin, $y(0) = 0,\quad y'(\pi) = 0$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı çözümü vardır?

5. $y'' + \lambda^2 y = 0$ denklemini, $y(0) = 0,\ y(\pi) = y'(\pi)$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı çözüme sahip kılan yegane λ değerlerinin,

$$\tan \pi\lambda = \lambda$$

denkleminin kökleri olduğunu ve bu denklemin sonsuz çoklukta kökü bulunduğunu gösteriniz.

6. 2. problemi, $y'' - \lambda^2 y = 0$ denklemi için çözünüz.

7. 4. problemi, $y'' - \lambda^2 y = 0$ denklemi için çözünüz.

8. Bir I aralığında, ikinci basamaktan homojen bir lineer diferansiyel denklemin bir tam çözümü, $y = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ olsun.

$$W(f,g)\frac{d^2y}{dx^2} - \left[\frac{d}{dx}W(f,g)\right]\frac{dy}{dx} + W(f',g')y = 0$$

denkleminin, tam çözümü verilen fonksiyon gibi olan denklemlerden biri olduğunu gösteriniz.

9. $x(t)$ ve $y(t)$, $W(x, y)$ Wronskianlarının $W(t)$ değerinin sıfırdan farklı olduğu bir I aralığında sürekli türetilebilen fonksiyonlar olsunlar.

(a) $x(t) = r(t)\cos\theta(t)$, $y(t) = r(t)\sin\theta(t)$ kutupsal temsilini kullanarak $W(t) = r^2\frac{d\theta}{dt}$ olduğunu gösteriniz.

(b) $r(t) = e^{\rho t}$ ve $\theta(t) = qt$ ise $W(t) = qe^{2\rho t}$ olacağını gösteriniz.

(c) $x(t)$ nin herhangi iki ardışık sıfırı arasında $y(t)$ nin de bir sıfırı bulunacağını ve bunun tersinin de doğru olduğunu gösteriniz. *Yol gösterme:* (a) kısmının denklemlerini kullanınız, ya da kartezyen koordinatları $[x(t), y(t)]$, kutupsal koordinatları da $[r(t), \theta(t)]$ olan hareketli noktanın geometrik davranışına bakınız. Bu sonuç Sturm ayırma teoreminden hangi noktada ayrılır?

10. (a) Kompleks üstellerin de gerçel üsteller gibi davrandığını varsayarak

$$e^{(p+iq)x} = u(x) + iv(x), \quad e^{(p-iq)x} = u(x) - iv(x)$$

olacak şekilde $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını belirlemek için

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Euler formüllerini kullanınız.

(b) (a) şıkkındaki fonksiyonlar ne zaman $ay'' + by' + cy = 0$ denkleminin çözümü olur?

11. $y = e^{px}(A\cosh qx + B\sinh qx)$ fonksiyonunun, karakteristik denkleminin kökleri $m = p \pm q, q \neq 0$ olduğunda, $ay'' + by' + cy = 0$ denkleminin bir genel çözümü olacağını kanıtlayınız.

12. Karakteristik denkleminin kökleri gerçel ise, $ay'' + by' + cy = 0$ denkleminin sıfırdan farklı çözümlerinin birden fazla sıfıra sahip olamayacağını kanıtlayınız.

13. Karakteristik denkleminin m_1, m_2 kökleri farklı ise

$$y = \frac{e^{m_1 x} - e^{m_2 x}}{m_1 - m_2}$$

fonksiyonunun $ay''+by'+cy=0$ denkleminin bir özel çözümü olacağını kanıtlayınız.

14. (a) $(D-a)^2f(x)=e^{ax}D^2[e^{-ax}f(x)]$ olduğunu gösteriniz.

(b) $(D-a)^2[(c_1+c_2x)e^{ax}]=0$ olduğunu göstermek için (a)'daki sonucu kullanınız.

(c) Karakteristik denkleminin katlı kökleri olan bir diferansiyel denklemin bir tam çözümünü elde etmek için, (b)'deki sonucun nasıl kullanılacağını anlatınız.

15. (a) $D^2(xe^{mx})=m^2xe^{mx}+2me^{mx}$ olduğunu gösteriniz.

(b) (a)'daki sonucu kullanarak $P(D)$, D cinsinden ikinci dereceden bir polinom olduğu zaman;

$$P(D)(xe^{mx})=P(m)xe^{mx}+P'(m)e^{mx}$$

olduğunu gösteriniz.

(c) Karakteristik denkleminin katlı kökleri olan bir diferansiyel denklemin ikinci lineer bağımsız çözümünü elde etmek için (b) deki sonucun nasıl kullanılacağını anlatınız. *Hatırlatma:* $P(x)=0$ polinom denkleminin $x=r$ gibi bir katlı kökü varsa, bunun $P'(x)=0$ polinom denkleminin de bir kökü olduğunu hatırlayınız.

16. Eğer varsa D^0, D^{-1}, D^{-2}'lere ne anlam verebilirsiniz?

17. $y=-\frac{z'}{Pz}$ bağlı değişken dönüşümünün $y'=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$ Riccati denklemini ikinci basamaktan, lineer

$$z''-(Q+\frac{P'}{P})z'+PRz=0$$

denklemine dönüştüreceğini gösteriniz.

17. problemin çözümünü aşağıdaki denklemleri çözmek için kullanınız.

18. $xy'=x^2y^2-y+1$
19. $x^2y'=x^4y^2+(3x^2-2x)y+2$

20. $(\cos x)y' = (\cos^2 x)y^2 + (\sin x - 2\cos x)y + 5$

B) Aşağıdaki denklemlerden herbirinin genel çözümlerini bulunuz.

1. $y''' - 3y'' + y' + 5y = 0,$ 2. $y''' + 2y'' + y' + 2y = 0$
3. $y''' + 5y'' + 3y2 - 9y = 0,$ 4. $y''' - y'' + y' - y = 0$
5. $y''' + y = 0,$ 6. $y''' - 4y'' - 3y' + 18y = 0$
7. $y^{iv} + y = 0,$ 8. $(D^4 - 10D^2 + 9)y = 0$
9. $(4D^4 - 4D^3 - 3D^2 + 4D - 1)y = 0$
10. $y^v - 2y^{iv} - 8y''' + 16y'' + 16y - 32 = 0$
11. $y^{viii} - 2y^{vi} + y^{iv} = 0,$
12. $16y^{vi} + 8y^{iv} + y'' = 0,$
13. $(D^4 - 5D^3 + 6D^2 + 4D - 8)y = 0$
14. $(D-3)^3(D^2 + 4D - 8)y = 0$
15. $(D^2 + 25)^2(D^2 - 4D + 13)^3 y = 0$
16. $y^{iv} - 3y''' - 2y'' + 2y' + 12y = 0$

Aşağıdaki fonksiyonları çözüm kabul eden, gerçel sabit katsayılı homojen denklemler arasında, en küçük basamaktan diferansiyel denklemleri bulunuz.

17. $e^{3x} - e^{-x} + 2$ 18. $\cos 2x - \sin 3x$
19. $x - e^{-x} + e^{2x}$ 20. $e^{5x} - x^2 e^{2x}$
21. $xe^{-2x}\cos x$ 22. $x^3 e^{-x} + \sin 5x$

Aşağıdaki denklemlerin, verilen koşulları sağlayaan çözümlerini bulunuz.

23. $y''' - 3y' + 2y = 0; \quad x = 0'\text{da } y = 0, y' = 2, y'' = 0$
24. $D^3 - 2D^2 + D - 2)y = 0; \quad x = 0'\text{da } y = y' = y'' = 1$
25. $y^{iv} + 5y'' + 4y = 0; \quad x = 0'\text{da } y = 1, \quad x = \frac{\pi}{2}'\text{de } y' = 2$
26. $D^3 - 6D^2 + 11D - 6)y = 0; \quad x = 0'\text{da } y = y' = 0, \ y'' = 2$
27. $y''' - 3y'' + 4y = 0; \quad x = 0'\text{da } y = 1, \ y' = -8, \ y'' = -4$
28. $y''' - 4y'' + 6y' + 5y = 0; \quad x = 0'\text{da } y = 0, \ y' = y'' = 1$
29. $y''' + y'' = 0; \quad x = 0'\text{da } y = 2, \ y' = 1, \ y'' = -1$
30. $(D^2 + 10D + 169)^2 y = 0; \quad x = 0'\text{da } y = y' = y'' = 0, \ y''' = 288$

31. $y^{iv} - y''' = 0; \quad x = 0'$da $y = y' = 1,\ y'' = 3e,\ y''' = e$
32. $y^{v} - 9y''' + 4y'' + 12y' = 0; \quad x = 0'$da $y = 0,\ y' = 2,$
$y'' = -8,\ y''' = 26,\ y^{iv} = -80$

33. $y''' - y = 0 \quad x = 0'$da $y = y' = y'' = 1$ başlangıç değer probleminin çözümünün Maclaurin seri açılımını bulunuz ve çözümü teşhis ediniz. *Hatırlatma*: $y'''(0) = y(0)$ olduğunu gör ve diferansiyel denklemin türevini alarak $y^{iv}(0) = y(0)$ elde et. Bu şekilde devam ederek Maclaurin serisinin tüm katsayılarını bul.

34. şayet varsa, λ nın hangi değerleri için $y^{iv} - \lambda^4 y = 0, \quad y(0) = y''(0) = y(1) = y'(1) = 0$ başlangıç değer probleminin sıfırdan farklı çözümü vardır?

35. 34. problemi $y(0) = y''(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$ başlangıç koşulu için çözünüz.

36. $e^{m_1 x},\ e^{m_2 x},\ e^{m_3 x}$ fonksiyonlarının Wronskianlarının sıfırdan farklı olması için gerek ve yeter koşul; $m_1,\ m_2,\ m_3$'lerin farklı olmalarıdır, ispat ediniz.

37. $e^{mx}, xe^{mx}, x^2 e^{mx}$ fonksiyonlarının Wronskianlarının hiçbir zaman sıfır olmayacağını kanıtlayınız.

38. a ve m gerçel, $a \neq 0$ ise; $e^{mx},\ \cos ax,\ \sin ax$ fonksiyonlarının Wronskianlarının hiçbir zaman sıfır olmayacağını kanıtlayınız.

39. $\lambda \neq 0$ ise $\cos \lambda x,\ \sin \lambda x,\ \cosh \lambda x,\ \sinh \lambda x$ fonksiyonlarının Wronskianlarının hiçbir zaman sıfır olmayacağını kanıtlayınız.

40. $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ denkleminin lineer bağımsız üç çözümünü bulunuz ve Wronskianlarının Abel formülünü sağladığını göösteriniz.

Verilen çözümlerinden yararlanarak aşağıdaki denklemlerin genel çözümlerini yazınız.

41. $y'' - y' - 2y = 0, \quad y_1 = e^{-x}$

42. $(1 - 2x)y'' + 2y' + (2x - 3)y = 0, \quad y_1 = e^{x}$

43. $x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0, \quad y_1 = x$

4.3 Belirsiz Katsayilar Yöntemi

A. Yöntem.

Bu kısımda n. basamak homojen olmayan sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemleri inceleyeceğiz. Böylece ilgilendiğimiz denklem, $a_0, a_1, \ldots, a_n$'ler gerçel sabitler, $b(x)$ homojen olmayan terimi genellikle x'in sabit olmayan bir fonksiyonu olmak üzere

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = b(x), \tag{4.23}$$

şeklinde olacak. Bu denklemin genel çözümünün, y_c *tümleyen fonksiyon*, yani (4.23) denklemine karşılık olan homojen denklemin (bu denklemde b yerine sıfır konmakla elde edilen denklemin) genel çözümü, y_p'de (4.23) denkleminin bir *özel integral*'i, yani bu denklemin keyfi sabit bulundurmayan herhangi bir çözümü olmak üzere

$$y = y_c + y_p$$

şeklinde yazılabileceğini hatırlayalım. 4.2 kısmında tümleyen fonksiyonun nasıl bulunacağını gördük, şimdi özel integral bulma yöntemleri ile ilgileneceğiz.

Önce *belirsiz katsayılar yöntemi*'ni ele alacağız. Matematik bakımından konuşursak, bu yöntemin uygulanabildiği b fonksiyonlarının sınıfı oldukça kısıtlıdır. Ancak bu matematiksel bakımdan çok dar sınıf, çeşitli fiziksel uygulamalarda çok önemli olan ve çok sık çıkan fonksiyonları içine alır. Ayrıca bu yöntemin, uygulanabildiğinde çok kolay olma gibi, çok iyi bir yanı vardır.

Önce bazı tanımlar verelim.

TANIM. Bir fonksiyon
(1). (i) n, negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere x^n,
(ii) $a \neq 0$, bir sabit olmak üzere e^{ax},
(iii) $b \neq 0$, c'ler, birer sabit olmak üzere $\sin(bx + c)$,
(iv) $b \neq 0$, c'ler, birer sabit olmak üzere $\cos(bx + c)$,
veya (2) yukarıdaki fonksiyonların bir sonlu çarpımından oluşuyorsa, bu

fonksiyona bir *belirsiz katsayı fonksiyonu* veya kısaca BK fonksiyonu denir.

Diferansiyel denklemdeki b homojen olmayan fonksiyon, BK fonksiyonlarının bir sonlu lineer bileşimi ise, belirsiz katsayılar yöntemi uygulanabilir. Bir BK fonksiyonunun türevi, ya bizzat bir BK fonksiyonunun sabit katı, ya da BK fonksiyonlarının bir lineer bileşimidir.

TANIM. Bir f BK fonksiyonu gözönüne alalım. f'nin kendisinden ve ardışık türevlerini lineer bileşimleri ile oluşturan diğer lineer bağımsız BK fonksiyonlarından oluşan kümeye, f'nin BK *kümesi* denir.

Örnek 4.27. Her x için $f(x) = x^3$ ile tanımlı f fonksiyonu, bir BK fonksiyonudur. f'nin ardışık türevlerini alırsak

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x, \quad f''' = 6, \quad f^{(n)} = 0 \ \ \forall n > 3$$

buluruz. Böylece f'nin BK kümesi $\quad S = \{x^3,\ x^2,\ x,\ 1\} \quad$ olur.

Örnek 4.28. Her x için $f(x) = \sin 2x$ ile tanımlı f fonksiyonu bir BK fonksiyonudur. f'nin ardışık türevlerini alırsak

$$f'(x) = 2\cos 2x, \quad f''(x) = -4\sin 2x, \ldots$$

buluruz. Böylece f'nin BK kümesi $\quad S = \{\sin 2x,\ \cos 2x\} \quad$ olur.

Örnek 4.29. Her x için $f(x) = x^2 \sin x$ ile tanımlı f fonksiyonu bir BK fonksiyonudur. f'nin ardışık türevlerini alırsak

$$f'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x, \quad f''(x) = 2\sin x + 4x\cos x + x^2\sin x,$$

$$f'''(x) = 6\cos x - 6x\sin x - x^2\cos x, \qquad \ldots$$

buluruz. Böylece f'nin BK kümesi

$$S = \{x^2\sin x,\ x^2\cos x,\ x\sin x,\ x\cos x,\ \sin x,\ \cos x\}$$

olur.

Şimdi A_i'ler bilinen sabitler, u_i'ler BK fonksiyonları ve

$$b = A_1u_1 + A_2u_2 + \ldots + A_mu_m$$

olmak üzere,

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=b(x)$$

denkleminin bir y_p özel çözümünü bularak, belirsiz katsayılar yönteminin uygulanışını göstereceğiz. Bu diferansiyel denkleme karşılık olan homojen diferansiyel denklemin, n tane olan lineer bağımsız çözümlerinin daha önceden bulunmuş olduğunu varsayarak şöyle devam edelim:

(1) b'yi oluşturan her $u_1,\ u_2,\ \dots\ ,\ u_m$ BK fonksiyonu için,

$$S_1,\ S_2,\ \dots\ ,\ S_m$$

BK kümelerini oluşturalım.

(2) $S_j \subseteq S_k$ ise şimdilik S_j'yi bir tarafa bırakalım.

(3) Homojen diferansiyel denklemin n tane lineer bağımsız çözümünün kümesine H diyelim. (2) deki elemelerden geriye kalan kümelerden biri, mesela S_k için $S_k \cap H \neq \emptyset$ ise S_k kümesi, $S' = x^pS_k \cap H = \emptyset$ yapacak en küçük tam dereceli x^p ile çarpılır ve S_k yerine bu değişmiş S' kümesi konur. Her seferinde BK kümelerinden birini ele aldığımızı ve x^p ile çarpma işlemini sadece ilgili kümeye uyguladığımızı unutmayalım.

(4) Şimdi genel olarak elimizde

(i) Ne (2). adımda bir tarafa bırakılmış ve ne ne (3). adımda değiştirilmiş BK kümeleri ve

(ii) (3). adımda değiştirilmiş BK kümeleri

bulunmaktadır. Bu iki sınıftaki kümelerin bileşimi olan kümenin tüm elemanlarından, bilinmeyen sabit katsayılarla bir lineer bileşim oluşturalım *(belirsiz katsayılar)*.

(5) (4). adımda elde ettiğimiz lineer bileşimin bilinmeyen katsayılarını, bu lineer bileşimi diferansiyel denklemde yerine koyarak ve onu özdeş olarak sağlamasını (bir özel çözüm olmasını) isteyerek belirleyelim.

Kabul edelim ki, yukarıdaki anlatımımızdan bu yöntemin karmaşık bir şey olduğu sanılacak. Oysa bir kere anlaşıldıktan sonra, içindeki özel hallerin ayrı ayrı ele alınmasına lüzum bile kalmayacak.

B. Örnekler.

Yukarıdaki yöntemle ilgili birkaç örnek herşeyi açıklığa kavuşturacaktır. İlk örneğimiz (2). ve (3). adımların gerekmediği basit bir problemdir.

Örnek 4.30.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^x - 10\sin x$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım. Buna ait homojen denklem,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0,$$

tümleyen fonksiyonu

$$y_c = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}$$

ve lineer bağımsız çözümlerinin H kümesi

$$H = \{e^{3x},\ e^{-x}\}$$

olmaktadır. Homojen olmayan fonksiyon $2e^x - 10\sin x$; e^x ve $\sin x$ gibi iki BK fonksiyonunun lineer bileşimidir.

(1) Bu iki fonksiyonun herbiri için BK kümelerini oluşturalım:

$$S_1 = \{e^x\}, \quad S_2 = \{\sin x, \quad \cos x\}$$

buluruz.

(2) $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ olduğundan bu iki küme de hesaba katılacaktır.

(3) $S_1 \cap H = S_2 \cap H = \emptyset$ olduğundan S_1 ve S_2 kümelerinin değiştirilmesi gerekmez.

(4) $S_1 \cup S_2$ kümesinin elemanlarının, henüz bilinmeyen A, B, C katsayıları ile bir lineer bileşimini yapalım:

$$Ae^x + B\sin x + C\cos x$$

(5) (4). şıktaki lineer bileşimin belirsiz olan katsayılarını bulmak için, bunu diferansiyel denklemde yerine koyup, denklemin özdeş olarak sağlanmasını isteyelim. Yani bir özel çözüm olarak

$$y_p = Ae^x + B\sin x + C\cos x$$

fonksiyonunu önerelim. O zaman

$$y_p' = Ae^x + B\cos x - C\sin x, \quad y_p'' = Ae^x - B\sin x - C\cos x$$

ve denklemde yerine koymakla

$$Ae^x - B\sin x - C\cos x - 2(Ae^x + B\cos x - C\sin x) -$$

$$3(Ae^x + B\sin x + C\cos x) = 2e^x - 10\sin x$$

veya

$$-4Ae^x + (-4B + 2C)\sin x + (-4C - 2B)\cos x = 2e^x - 10\sin x$$

bulunur. Benzer terimlerin katsayılarını eşitlersek,

$$\begin{cases} -4A = 2 \\ -4B + 2C = -10 \\ -4C - 2B = 0 \end{cases} \quad \text{ve buradan} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = 2 \\ C = -1 \end{cases}$$

elde edilir. Böylece denklemin bir özel integrali

$$y_p = -\frac{1}{2}e^x + 2\sin x - 1\cos x$$

olur ki, verilen homojen olmayan diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = y_c + y_p = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + 2\sin x - \cos x$$

olarak bulunur.

Örnek 4.31.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x}$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım. Buna ait homojen denklem,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0,$$

tümleyen fonksiyonu

$$y_c = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

ve lineer bağımsız çözümlerinin H kümesi

$$H = \{e^x,\ e^{2x}\}$$

olmaktadır. Homojen olmayan fonksiyon $2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x}$ de; x^2, e^x, xe^x ve e^{3x} gibi dört BK fonksiyonunun lineer bileşimidir.

(1) Bu dört fonksiyonun herbiri için BK kümelerini oluşturalım:

$$S_1 = \{x^2,\ x,\ 1\}, \quad S_2 = \{e^x\}, \quad S_3 = \{xe^x,\ e^x\}, \quad S_4 = \{e^{3x}\}$$

buluruz.

(2) $S_2 \subset S_3$ olduğundan S_2 bir tarafa bırakılacaktır. Geriye üç küme kalır.

$$S_1 = \{x^2,\ x,\ 1\}, \quad S_3 = \{xe^x,\ e^x\}, \quad S_4 = \{e^{3x}\}$$

(3)

$$S_3 \cap H = \{e^x\} \neq \emptyset \quad \text{ve} \quad x.S_3 \cap H = \emptyset$$

olduğundan S_3 kümesi, $S_3' = xS_3 = \{x^2e^x,\ xe^x\}$ ile değiştirilmelidir.

(4) $S_1 \cup S_3' \cup S_4$ kümesinin altı elemanının, henüz bilinmeyen A, B, C, D, E, F katsayıları ile bir lineer bileşimini yapalım:

$$Ax^2 + Bx + C + De^{3x} + Ex^2e^x + Fxe^x$$

(5) (4). şıktaki lineer bileşimin belirsiz olan katsayılarını bulmak için, bunu diferansiyel denklemde yerine koyup, denklemin özdeş olarak sağlanmasını isteyelim. Yani bir özel çözüm olarak

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + De^{3x} + Ex^2e^x + Fxe^x$$

fonksiyonunu önerelim. O zaman

$$y_p' = 2Ax + B + 3De^{3x} + 2Exe^x + Ex^2e^x + Fe^x + Fxe^x$$

$$y_p'' = 2A + 9De^{3x} + 4Exe^x + 2Ee^x + Ex^2e^x + 2Fe^x + Fxe^x$$

ve denklemde yerine koymakla

$$(2A - 3B + 2C) + (2B - 6A)x + 2Ax^2 + 2De^{3x} - 2Exe^x + (2E - F)e^x =$$

$$2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x}$$

bulunur. Benzer terimlerin katsayılarını eşitlersek,

$$\begin{cases} 2A - 3B + 2C = 0 \\ 2B - 6A = 0 \\ 2A = 2 \\ 2D = 4 \\ -2E = 2 \\ 2E - F = 1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \text{buradan} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \\ C = \frac{7}{2} \\ D = 2 \\ E = -1 \\ F = -3 \end{cases}$$

elde edilir. Böylece denklemin bir özel integrali

$$y_p = x^2 + 3x + \frac{7}{2} + 2e^{3x} - x^2e^x - 3xe^x$$

olur ki, verilen homojen olmayan diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2} + 2e^{3x} - x^2e^x - 3xe^x$$

olarak bulunur.

Örnek 4.32.

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım. Buna ait homojen denklem,

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 0,$$

tümleyen fonksiyonu

$$y_c = c_1 + c_2x + c_3\sin x + c_4\cos x$$

ve lineer bağımsız çözümlerinin H kümesi

$$H = \{1,\ x,\ \sin x,\ \cos x\}$$

olmaktadır. Homojen olmayan fonksiyon $3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$ de; x^2, $\sin x$, $\cos x$ gibi üç BK fonksiyonunun lineer bileşimidir.

(1) Bu üç fonksiyonun herbiri için BK kümelerini oluşturalım:

$$S_1 = \{x^2,\ x,\ 1\}, \quad S_2 = \{\sin x,\ \cos x\}, \quad S_3 = \{\sin x,\ \cos x\}$$

buluruz.

(2) $S_2 \equiv S_3$ olduğundan S_3 bir tarafa bırakılacaktır. Geriye iki küme kalır.

$$S_1 = \{x^2,\ x,\ 1\}, \quad S_2 = \{\sin x,\ \cos x\}$$

(3)

$$S_1 \cap H = \{1,\ x\} \neq \emptyset \quad \text{ve} \quad x^2.S_1 \cap H = \emptyset$$

olduğundan S_1 kümesi $S_1' = x^2 S_1 = \{x^4,\ x^3,\ x^2\}$ ile değiştirilmelidir. Yine

$$S_2 \cap H = \{\sin x,\ \cos x\} \neq \emptyset \quad \text{ve} \quad x.S_2 \cap H = \emptyset$$

olduğundan S_2 kümesi $S_2' = \{x \sin x,\ x \cos x\}$ ile değiştirilmelidir.

(4) $S_1' \cup S_2'$ kümesinin beş elemanının, henüz bilinmeyen A, B, C, D, E katsayıları ile bir lineer bileşimini yapalım:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx \sin x + Ex \cos x$$

(5) (4). şıktaki lineer bileşimin belirsiz olan katsayılarını bulmak için, bunu diferansiyel denklemde yerine koyup, denklemin özdeş olarak sağlanmasını isteyelim. Yani bir özel çözüm olarak

$$y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx \sin x + Ex \cos x$$

fonksiyonunu önerelim. O zaman

$$y_p' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + Dx \cos x + D \sin x - Ex \sin x + E \cos x$$

$$y_p'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C + 2D \cos x - Dx \sin x - Ex \cos x - 2E \sin x$$

$$y_p''' = 24Ax + 6B - Dx \cos x - 3D \sin x + Ex \sin x - 3E \cos x$$

$$y_p^{iv} = 24A + Dx \sin x - 4D \cos x + Ex \cos x + 4E \sin x$$

ve denklemde yerine koymakla

$$24A + 2C + 6Bx + +12Ax^2 + 2E \sin x - 2D \cos x = 3x^2 + 4 \sin x - 2 \cos x$$

bulunur. Benzer terimlerin katsayılarını eşitlersek,

$$\begin{cases} 24A + 2C = 0 \\ 6B = 0 \\ 12A = 3 \\ -2D = -2 \\ 2E = 4 \end{cases} \quad \text{ve buradan} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = 0 \\ C = -3 \\ D = 1 \\ E = 2 \end{cases}$$

elde edilir. Böylece denklemin bir özel integrali

$$y_p = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + x\sin x + 2x\cos x$$

olur ki, verilen homojen olmayan diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 x + c_3 \sin x + c_4 \cos x + \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + x\sin x + 2x\cos x$$

olarak bulunur.

Örnek 4.33. Bir Başlangıç Değer Problemi. Bu kısmı, sonuçlarımızı

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^x - 10\sin x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \end{cases} \qquad (4.24, 4.25, 4.26)$$

başlangıç değer problemine uygulayarak bitirelim. Teorem 4.1'e göre bu problemin, $-\infty < x < \infty$ aralığındaki her x için tanımlı bir tek çözümü vardır. Şimdi bu çözümü bulalım. 4.30. örnekte (4.24) diferansiyel denkleminin genel çözümünün

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + 2\sin x - 1\cos x \qquad (4.27)$$

olduğunu bulmuştuk. Buradan

$$y' = 3c_1 e^{3x} - c_2 e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + 2\cos x + \sin x \qquad (4.28)$$

elde edilir. (4.25) ve (4.26) başlangıç şartlarını sırasıyla (4.27) ve (4.28)'e uygularsak,

$$\begin{cases} 2 = c_1 e^0 + c_2 e^0 - \frac{1}{2}e^0 + 2\sin 0 - 1\cos 0 \\ 4 = 3c_1 e^0 - c_2 e^0 - \frac{1}{2}e^0 + 2\cos 0 + \sin 0 \end{cases}$$

elde edilir. Bu denklemler sadeleşerek

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{7}{2} \\ 3c_1 - c_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \qquad \text{ve buradan} \qquad \begin{cases} c_1 = \frac{3}{2} \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

bulunur. c_1 ve c_2'nin bu değerlerini (4.27)'de yerine koyarak verilen başlangıç değer probleminin çözümünü

$$y = \frac{3}{2}e^{3x} + 2e^{-x} - \frac{1}{2}e^{x} + 2\sin x - 1\cos x$$

olarak yazarız.

ALIŞTIRMALAR

1-17. problemlerdeki diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

1. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 8y = 4e^{2x} - 21e^{-3x}$
3. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 6\sin 2x + 7\cos 2x$
4. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 10\sin 4x$
5. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 4y = \cos 4x$
6. $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 10y = 8xe^{-2x}$
7. $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 5y = 5\sin 2x + 10x^2 - 3x + 7$
8. $\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 3y = 3x^3 - 8x$
9. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 10e^{2x} - 18e^{3x} - 6x - 11$
10. $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4e^{x} - 18e^{-x}$
11. $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = 2x^2 + 4\sin x$
12. $\frac{d^4y}{dx^4} - 3\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} = 3e^{-x} + 6e^{2x} - 6x$
13. $\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = xe^{x} - 4e^{2x} + 6e^{4x}$

14. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x \sin x$

15. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 12x^2 - 16x \cos 2x$

16. $\frac{d^4y}{dx^4} - 5\frac{d^3y}{dx^3} + 7\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 5 \sin x - 12 \sin 2x$

17. $\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} = 18x^2 + 16xe^x + 4e^{3x} - 9$

18-21. alıştırmalardaki başlangıç değer problemini çözünüz.

18.
$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 9x^2 + 4 \\ y(0) = 6 \\ y'(0) = 8 \end{cases}$$

19.
$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 13y = 5 \sin 2x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$$

20.
$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + y = 3x^2 - 4 \sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

21.
$$\begin{cases} \frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 6y = 3xe^x + 2e^x - \sin 2x \\ y(0) = \frac{33}{40} \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

22-30. alıştırmalardaki diferansiyel denklemler için, belirsiz katsayılar yöntemiyle özel çözüm bulmak üzere, doğru fonksiyonlarla lineer bileşimler yazınız. (Özel integralleri bulmanız gerekmez).

22. $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 8y = x^3 + x + e^{-2x}$

23. $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = e^{3x} + e^{-3x} + e^{3x} \sin 3x$

24. $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = x^2e^x + 3xe^{2x} + 5x^2$

25. $\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 12\frac{dy}{dx} - 8y = xe^{2x} + x^2e^{3x}$

26. $\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = x^2e^{-x} + 3e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$

27. $\frac{d^4y}{dx^4} - 16y = x^2\sin 2x + x^4e^{2x}$

28. $\frac{d^6y}{dx^3} + 2\frac{d^5y}{dx^5} + 5\frac{d^4y}{dx^4} = x^3 + x^2e^{-x} + e^{-x}\sin 2x$

29. $\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = \cos^2 - \cosh x$

30. $\frac{d^4y}{dx^4} + 10\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \sin x \sin 2x$

EK ALIŞTIRMALAR

A) Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

1. $y''4y = 16x + 8e^x$,
2. $y'' + 25y = 100 + 125\sin 10x$
3. $4y''4y = 15\cos x + 10e^x$,
4. $9y'' + 16y = 32 - 50e^x + 40\cos 2x$

5. $x^2 - y^2 = r^2$ hiperbolünün parametrik denklemlerinden biri; ϕ, şekildeki POA hiperbolik dilimin u alanı ile $2/r^2$ nin çarpımına eşit olmak üzere, $x = r\cosh\phi$, $y = r\sinh\phi$ dir. Bir parçacık, eğrinin pozitif parçasını çizmekte ve bu yüzden u, sabit $r^2\omega/2$ hızıyla artmaktadır.

(a) x ve y yi t nin fonksiyonu olarak ifade ediniz.

(b) Herbiri $z'' - \omega^2 z = 0$ denkleminin bir tam çözümü olan üç farklı analitik ifade bulunuz.

5(b) yi kullanarak aşağıdaki homojen olmayan denklemlerin tümleyen fonksiyonlarını bulunuz.

6 . $y'' - 9y = \sin \ln x,$
7 . $y'' - 81y = e^{-x^2}$
8 . $11y'' - 396y = \sinh \tan^{-1} x,$
9 . $17y'' - 153y = (\cos x)/x$

Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözünüz:

10. $y^{iv} + y'' = 40e^{2x}, \qquad y(0) = 3, y'(0) = 7, y''(0) = 7, y'''(0) = 15$
11. $y^{iv} - y = 13x^3, \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 78$
12. $y^{iv} - y'' = 2\sin x, \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$
13. $y^{iv} + y'' = e^{x+\ln 2} \qquad y(0) = 2, y'(0) = 2, y''(0) = y'''(0) = 0$
14. $y^{iv} - y = 2\sinh x, \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

B) Aşağıdaki denklemlerin tam çözümlerini bulunuz.

1. $y'' + 4y' + 5y = 2e^x$
2. $y'' + 4y' + 3y = x - 1$
3. $y'' + y' = x + 2$
4. $y'' - y = e^x + 2e^{2x}$
5. $(D^2 + 4D + 4)y = xe^{-x}$
6. $(D^2 + 1)y = e^x \sin x$
7. $y'' - 5y' + 6y = \cosh x$
8. $y'' - 5y' + 4y = \cosh x$
9. $y'' + y = \cos x + 3\sin 2x$
10. $y'' + 4y' + 13y = \cos 3x - \sin 3x$
11. $y'' + 3y' = 2\cos 3x + \sin x$
12. $y'' + 2y' + 10y = 25x^2 - 3e^{-x}$
13. $y'' + 2y' + y = \cos^2 x$
14. $10y'' - 6y' + y = 30\sin x \cos x$

15. (a) $Y = -\cosh x$'in, $y'' + y' - 2y = e^{-x}$ denkleminin bir özel çözümü olduğunu gööstеriniz.

(b) $Y = A\cosh x$'in bir özel çözüm olması için A yı belirleyiniz.

C) Aşağıdaki denklemlerin verilen koşulları sağlayan çözümlerini bulunuz.

1. $y'' + 4y' + 5y = 20e^{x} \quad x = 0'\text{da } y = y' = 0$

2. $y'' + 4y' + 4y = 8x - 10 \quad x = 0'\text{da } y = 2,\ y' = 0$

3. $y'' + 4y' + 3y = 4e^{-x} \quad x = 0'\text{da } y = 0,\ y' = 2$

4 . $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x \quad x = 0'\text{da } y = 5,\ y' = 6$

5 . $Y = \frac{\sin\lambda t - \sin kt}{k^2 - \lambda^2}$ nin $y'' + k^2 y = \sin\lambda t$ denkleminin bir özel çözümü olduğunu gööstеriniz. $\lambda \to k$ limit halini inceleyiniz.

6 . $y'' - 2ay' + a^2 y = e^{\lambda t}$ denkleminin, $\lambda \to a$ için $y'' - 2ay' + a^2 y = e^{\lambda t}$ denkleminin çözümüne giden çözümünü bulunuz.

7 . y_1 ve y_2, $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ homojen olmayan denkleminin, iki çözümü olsun. Eğer varsa, c_1 ve c_2 nin hangi değerleri için $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ nin de bu denklemin bir çözümü olacağını araştırınız.

Ç) Aşağıdaki denklemlerin tam çözümlerini bulunuz.

1 . $(D^4 + 8D^2 - 9)y = 9x^2 + 5\sin 2x$

2 . $(D^3 + D^2 + 3D - 5)y = e^{x}$

3 . $(D^4 + 2D^3 - 3D^2 - 4D + 4)y = e^{x}$

4 . $(D^3 - 7D + 6)y = e^{x} - 5e^{2x}$

5 . $y^{iv} + 4y = \cos x \sin 2x$

6 . $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cos x$

7 . $y'' - 2y' + y = x^3 e^{x}$

8 . $y'' - 2y' + y = xe^{x} - e^{x}$

9 . $y'' + y = \frac{1}{1+\sin x}$

10. $4y'' + 8y' + 5y = \frac{1}{2}e^{-x}\sec x$

11. $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 3e^{2x}$

12. $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln \mid x \mid$

13. $(D-1)^3 y = \frac{2e^x}{x^2}$

14. $(D^3 + D)y = 4\cos x$

15. $D^2(D^2+1)y = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$

16. $(D^3 - 3D^2 + 4D)y = 4e^x - 18e^{-x}$

17. $(D^2 + 3D + 2)y = \frac{e^{-x}}{x}$

18. $(D+2)(D^2 + 2d + 2)y = x - \sin x$

19. $(D+1)^3 y = 1 - 3e^{-x}$

D) 1 -10. problemlerde belirsiz katsayılarla özel çözüm bulmak için uygun fonksiyonların bir lineer bileşimini oluşturunuz. Verilen denklemler sağlanacak şekilde belirsiz katsayıları belirleyiniz.

1 . $y''' - 2y'' - y' - 2y = \cosh 3x$

2 . $[(D+1)^2 + 9]y = e^x \sin 3x$

3 . $D^2(D+5)y = x + e^{-5x}$

4 . $(D-1)^2(D^2-4)y = 2x\sinh x - \cosh 2x$

5 . $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = x^2e^{3x} - 7xe2x$

6 . $(D^2+4)^3(D+1)y = 10e^x + 3x^2\sin 2x$

7 . $y^{vi} + 2y^{v} + 5y^{iv} = 5x^3 - x^2e^{-x} + e{-}x\cos 2x$

8 . $y^{iv} + y = 64\cos 2x$

9 . $(D-1)^3 y = (x+1)^2 e^x - 3x\cos x$

10. $y^{iv} + 3y'' - 4y = \sinh x - \sin^2 x$

4.4 Sabitlerin Değişimi Yöntemi

A. Yöntem.

Belirsiz katsayılar yöntemini uygulamak çok kolay (sadece lise bilgisi yeterli) olduğu halde, uygulama alanı nisbeten kısıtlıdır. Mesela elimizde

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \tan x$$

gibi bir denklem olsa artık bu yöntemi uygulayamayız. Bu yüzden, tümleyen fonksiyonu bilindikten sonra değişken katsayılı diferansiyel denklemlere bile uygulanabilecek şekilde bir özel integral bulma yöntemi arayacağız. İşte aşağıda inceleyeceğimiz *sabitlerin değişimi yöntemi*, böyle bir yöntemdir.

Bu yöntemi genel, değişken katsayılı, ikinci basamak

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = b(x), \tag{4.29}$$

denklemine ilişkin olarak geliştireceğiz. y_1 ve y_2 fonksiyonları bu denkleme ait

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0, \tag{4.30}$$

homojen denkleminin lineer bağımsız iki çözümü olsun. (4.29)'a ait tümleyen fonksiyon; c_1, c_2 keyfî sabitler olmak üzere

$$c_1y_1 + c_2y_2$$

olacaktır. Sabitlerin değişimi yönteminde, tümleyen fonksiyonda bulunan c_1, c_2 sabitleri v_1, v_2 *fonksiyon*'ları ile değiştirilir ve sonra bu fonksiyonlar,

$$v_1y_1 + v_2y_2 \tag{4.31}$$

ifadesi, (4.29) denkleminin bir özel integrali olacak şekilde belirlenir. *sabitlerin değişimi* adı da buradan gelir.

Elimizde (4.31)'in, (4.29) denklemini sağlaması gibi bir şart ve v_1, v_2 gibi iki fonksiyon bulunuyor. Bu sebepten, birinciyi ihlal etmeyen ikinci bir şart koyma serbestliğimiz var.

Şimdi denklemimizin (4.31)'deki gibi bir çözümü olduğunu varsayalım ve

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 \tag{4.32}$$

yazalım. (4.32)'nin türevini alırsak üsler türevleri göstermek üzere

$$y_p' = v_1 y_1' + v_2 y_2' + v_1' y_1 + v_2' y_2 \tag{4.33}$$

elde ederiz. Yukarıda sözünü ettiğimiz ikinci şartı, y'''nin ifadesinde v_1, v_2'lerin ikinci türevlerlerinin bulunmasını önleyecek şekilde koyalım:

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \qquad (4.34).$$

Bu şart konduktan sonra (4.33) denklemi

$$y_p' = v_1 y_1' + v_2 y_2' \tag{4.35}$$

haline gelir. Böylece (4.35)'in türevini alırsak,

$$y_p'' = v_1 y_1'' + v_2 y_2'' + v_1' y_1' + v_2' y_2' \tag{4.36}$$

elde ederiz. Şimdi (4.32)'nin (4.29)'u sağlaması temel şartını uygulayacağız. Onun için (4.29) denkleminde y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ yerine sırasıyla (4.32), (4.35) ve (4.36) ifadelerini koyup

$$a_0[v_1 y_1'' + v_2 y_2'' + v_1' y_1' + v_2' y_2'] + a_1[v_1 y_1' + v_2 y_2'] + a_2[v_1 y_1 + v_2 y_2] = b$$

özdeşliğini elde ederiz. Bunu yeniden düzenlersek,

$$v_1[a_0 y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1] + v_2[a_0 y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2] + a_0[v_1' y_1' + v_2' y_2'] = b \tag{4.37}$$

buluruz. y_1 ve y_2, (4.30)'daki homojen diferansiyel denklemin çözümü olduğundan, (4.37)'deki ilk iki köşeli parantezin içi sıfırdır. Böylece geriye sadece

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = \frac{b}{a_0} \tag{4.37}$$

kalır. O halde verilen diferansiyel denklem ve bizim sonradan koyduğumuz şart, v_1, v_2'nin

$$\begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' = \frac{b}{a_0} \end{cases} \tag{4.39}$$

koşullarını sağlamalarını gerektirir. v_1', v_2' cinsinden cebirsel denklem sistemi olan bu eşitliklerin katsayılar matrisinin determinantı; y_1, y_2 çözümlerinin

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Wronski determinantıdır. y_1, y_2, (4.29)'a ait (4.30) homojen diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri olduklarından, $W(y_1, y_2) \neq 0$ olacağını biliyoruz. Böylece (4.39) sisteminin bir tek çözümü vardır. Bu sistemi çözeresek,

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{b}{a_0} & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = -\frac{by_2}{a_0 W(y_1, y_2)}, \quad v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{b}{a_0} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = -\frac{by_1}{a_0 W(y_1, y_2)}$$

buluruz. Böylece v_1, v_2 fonksiyonlarını

$$v_1(x) = -\int^x \frac{by_2 dt}{a_0 W(y_1, y_2)}, \quad v_2(x) = \int^x \frac{by_1 dt}{a_0 W(y_1, y_2)} \tag{4.40}$$

olarak elde ederiz. Artık (4.29) denkleminin bir özel integrali, v_1, v_2'ler (4.40)'da verilen fonksiyonlar olmak üzere

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

olacaktır.

B. Örnekler.

Örnek 4.34.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \tan x \tag{4.41}$$

Bu denklem için tümleyen fonksiyon

$$y_c = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

olur. Şimdi v_1, v_2 fonksiyonlarını,

$$y_p = v_1 \sin x + v_2 \cos x \tag{4.42}$$

fonksiyonu (4.41) denkleminin bir özel integrali olacak şekilde belirleyeceğiz.

$$y_p' = v_1 \cos x - v_2 \sin x + v_1' \sin x + v_2' \cos x$$

türevine

$$v_1' \sin x + v_2' \cos x = 0 \tag{4.43}$$

şartını uygularsak,

$$y_p' = v_1 \cos x - v_2 \sin x$$

ve buradan tekrar türev alırsak,

$$y_p'' = -v_1 \sin x - v_2 \cos x + v_1' \cos x - v_2' \sin x \tag{4.44}$$

elde ederiz. (4.42) ve (4.44)'ü (4.41)'de yerlerine yazarsak,

$$v_1' \cos x - v_2' \sin x = \tan x \tag{4.45}$$

olur ki, (4.43) ve (4.45), v_1', v_2' fonksiyonlarını hesaplamamıza imkan verecek bir lineer denklem sistemi oluştururlar:

$$\begin{cases} v_1' \sin x + v_2' \cos x = 0 \\ v_1' \cos x - v_2' \sin x = \tan x \end{cases}$$

Katsayılar matrisinin determinantı $W(\sin x, \cos x) = -1$'den ibaret olduğundan,

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \tan x & -\sin x \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-\cos x \tan x}{-1} = \sin x,$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & \tan x \end{vmatrix}}{-1} = \frac{\sin x \tan x}{-1} = \frac{-\sin^2 x}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos x - \sec x$$

bulunur. Bunları integre edersek,

$$\begin{cases} v_1 = -\cos x + c_3 \\ v_2 = \sin x - \ln|\sec x + \tan x| + c_4 \end{cases} \tag{4.46}$$

elde ederiz. (4.46)'yı (4.42)'de yerine yazarsak,

$$y_p = [-\cos x + c_3]\sin x + [\sin x - \ln|\sec x + \tan x| + c_4]\cos x$$

$$= -\sin x\cos x + c_3\sin x + \sin x\cos x - \cos x\ln|\sec x + \tan x| + c_4\cos x$$

$$= c_3\sin x + c_4\cos x - \cos x\ln|\sec x + \tan x|$$

olur. Özel integralde keyfi sabit bulunmayacağından c_1, c_2'ye sırasıyla A, B değerleri vererek özel integrali

$$y_p = A\sin x + B\cos x - \cos x\ln|\sec x + \tan x|$$

olarak yazacağız. O zaman genel çözüm; $y = y_c + y_p$,

$$y = c_1\sin x + c_2\cos x + A\sin x + B\cos x - \cos x\ln|\sec x + \tan x|$$

olur ki bu, $C_1 = c_1 + A$ ve $C_2 = c_2 + B$ olmak üzere

$$y = C_1\sin x + C_2\cos x - \cos x\ln|\sec x + \tan x|$$

şeklinde yazılabilir. Özel integralin (4.46)'daki ifadesinde $c_1 = c_2 = 0$ alsaydık tamamen aynı sonucu elde edecektik.

Sabitlerin değişimi yöntemi daha yüksek basamaktan diferansiyel denklemlere de genişletilebilir. Yöntemin genel n. basamak diferansiyel denklemlere uygulanabilirliğinin ispatı, 11. Bölüm'de verilecek. Şimdi bu genişletmeyi (4.35) örneği ile göstereceğiz ama aynı denklemin belirsiz katsayılar yöntemiyle daha kolay çözülebileceğini farketmiş olmalısınız.

Örnek 4.35.

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = e^x \tag{4.47}$$

Bu denklemin tümleyen fonksiyonu

$$y_c = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$$

olacaktır.

$$y_p = v_1e^x + v_2e^{2x} + v_3e^{3x} \tag{4.48}$$

şeklinde bir özel integralin varlığını kabul edeceğiz. v_1, v_2, v_3 gibi üç fonksiyonumuz olduğundan bunlar üzerine üç şart koyabiliriz. Türev alırsak,

$$y_p' = v_1e^x + 2v_2e^{2x} + 3v_3e^{3x} + v_1'e^x + v_2'e^{2x} + v_3'e^{3x}$$

elde ederiz. Burada

$$v_1'e^x + v_2'e^{2x} + v_3'e^{3x} = 0 \tag{4.49}$$

şartını koşarsak,

$$y_p' = v_1e^x + 2v_2e^{2x} + 3v_3e^{3x} \tag{4.50}$$

ve tekrar türetme ile,

$$y_p'' = v_1e^x + 4v_2e^{2x} + 9v_3e^{3x} + v_1'e^x + 2v_2'e^{2x} + 3v_3'e^{3x}$$

buluruz. Şimdi de

$$v_1'e^x + 2v_2'e^{2x} + 3v_3'e^{3x} = 0 \tag{4.51}$$

şartını koşalım. O zaman

$$y_p'' = v_1e^x + 4v_2e^{2x} + 9v_3e^{3x} \tag{4.52}$$

ve türetme ile,

$$y_p''' = v_1e^x + 8v_2e^{2x} + 27v_3e^{3x} + v_1'e^x + 4v_2'e^{2x} + 9v_3'e^{3x} \tag{4.53}$$

bulunur. (4.48), (4.50), (4.52) ve (4.53)'ü, (4.47) denkleminde yerlerine koyarak

$$\begin{gathered}
v_1e^x + 8v_2e^{2x} + 27v_3e^{3x} + v_1'e^x + 4v_2'e^{2x} + 9v_3'e^{3x} \\
-6(v_1e^x + 4v_2e^{2x} + 9v_3e^{3x}) + 11(v_1e^x + 2v_2e^{2x} + 3v_3e^{3x}) \\
-6(v_1e^x + v_2e^{2x} + v_3e^{3x}) = e^x
\end{gathered}$$

veya kısaltmalardan sonra

$$v_1'e^x + 4v_2'e^{2x} + 9v_3'e^{3x} = e^x \tag{4.54}$$

elde edilir. Böylece v_1', v_2', v_3' bilinmeyenleri için (4.49), (4.51) ve (4.54) gibi üç tane denklem elde ettik:

$$\begin{cases} v_1'e^x + v_2'e^{2x} + v_3'e^{3x} = 0 \\ v_1'e^x + 2v_2'e^{2x} + 3v_3'e^{3x} = 0 \\ v_1'e^x + 4v_2'e^{2x} + 9v_3'e^{3x} = e^x \end{cases}$$

Katsayılar matrisinin determinantı,

$$W(e^x, e^{2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x}$$

olduğundan,

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} & e^{3x} \\ 0 & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}}{2e^{6x}} = \frac{1}{2},$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 & e^{3x} \\ e^x & 0 & 3e^{3x} \\ e^x & e^x & 9e^{3x} \end{vmatrix}}{2e^{6x}} = -e^{-x}, \quad v_3' = \frac{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & 0 \\ e^x & 2e^{2x} & 0 \\ e^x & 4e^{2x} & e^x \end{vmatrix}}{2e^{6x}} = \frac{1}{2}e^{-2x}$$

elde edilir. Bu üç ifadeyi bütün integrasyon sabitlerini sıfır alarak integre edersek,

$$v_1 = \frac{1}{2}x, \ v_2 = e^{-x}, \ v_3 = -\frac{1}{4}e^{-2x}$$

elde edilir ki,

$$y_p = \frac{1}{2}xe^x + e^{-x}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}e^{3x} = \frac{1}{2}xe^x + \frac{3}{4}e^x$$

ve böylece

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} + \frac{1}{2}xe^x + \frac{3}{4}e^x$$

bulunur. Son bir basitleştirme yaparak $c_1' = c_1 + 3/4$ dersek genel çözüm,

$$y = c_1'e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} + \frac{1}{2}xe^x$$

olarak yazılabilir.

4.34 ve 4.35 numaralı örneklerde diferansiyel denklemlerin katsayıları sabit idi. Bu kısmın başındaki incelemeler, y_c tümleyen fonksiyonu bir kere bulunduktan sonra, bu yöntemin değişken katsayılı denklemlere de uygulanabileceğini göstermişti. Şimdi bunu Örnek 4.36'da ele alacağız.

Örnek 4.36.

$$(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 6(x^2+1)^2 \tag{4.55}$$

4.15 numaralı örnekte bu denklemin tümleyen fonksiyonunu bulmuştuk:

$$y_c = c_1 x + c_2(x^2-1)$$

Bu yüzden (4.55)'in genel çözümünü, $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ belirlenecek fonksiyonlar olmak üzere

$$y_p = v_1 x + v_2(x^2-1) \tag{4.56}$$

şeklinde düşünüyoruz. Türev alarak

$$y_p' = v_1 + 2xv_2 + v_1'x + v_2'(x^2-1)$$

ve

$$v_1'x + v_2'(x^2-1) = 0 \tag{4.57}$$

kabul ederek

$$y_p' = v_1 + 2xv_2 \tag{4.58}$$

buluruz. Buradan yeniden türev alırsak,

$$y_p'' = 2v_2 + v_1' + 2xv_2' \tag{4.59}$$

buluruz. (4.56), (4.58) ve (4.59)'u (4.55)denkleminde yerlerine koyarsak

$$(x^2+1)(2v_2+v_1'+2xv_2') - 2x(v_1+2xv_2) + 2[v_1x+v_2(x^2-1)] = 6(x^2+1)^2$$

veya sadeleştirmeyle

$$(x^2+1)(v_1'+2xv_2') = 6(x^2+1)^2 \tag{4.60}$$

elde ederiz. Şimdi v_1' ve v_2' bilinmeyenlerini belirlemek için elimizde (4.57) ve (4.60)'tan oluşmuş bir sistem var:

$$\begin{cases} v_1'x + v_2'(x^2-1) = 0 \\ (x^2+1)(v_1' + 2xv_2') = 6(x^2+1)^2 \end{cases}$$

Bu sistemi çözersek, katsayılar matrisinin determinantı

$$W(x, x^2-1) = \begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2+1$$

olduğundan,

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2-1 \\ 6(x^{+}1) & 2x \end{vmatrix}}{x^2+1} = \frac{-6(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1} = -6(x^2-1)$$

ve

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 6(x^{+}1) \end{vmatrix}}{x^2+1} = \frac{6x(x^2+1)}{x^2+1} = 6x$$

bulunur. Bunların integre edilmesiyle, integrasyon sabitlerinin ikisi de sıfır alınarak

$$\begin{cases} v_1 = -2x^3 + 6x \\ v_2 = 3x^2 \end{cases} \tag{4.61}$$

elde edilir. (4.56)'dakileri (4.56)'da yerlerine koyarsak

$$y_p = (-2x^3 + 6x)x + 3x^2(x^2-1) = x^4 + 3x^2$$

olur. Böylece (4.55)'in bir genel çözümü

$$y = y_c + y_p = c_1x + c_2(x^2-1) + x^4 + 3x^2$$

olarak yazılabilir.

C. Özel İntegraller İçin Üst Üste Bindirme İlkesi.

Bir lineer diferansiyel denklemin homojen olmayan terimi, iki ya da daha fazla fonksiyonun lineer bileşimi olarak ifade edilmişse, aşağıdaki teorem özel integral bulunmasında kolaylık sağlayabilir.

TEOREM 4.12.

Hipotez 1.
(1) f fonksiyonu,

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=F(x), \qquad (4.62)$$

denkleminin bir özel integrali,
(2) g fonksiyonu da

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=G(x), \qquad (4.63)$$

denkleminin bir özel integrali olsun.

Hüküm. k_1, k_2'ler sabitler olmak üzere k_1f+k_2g fonksiyonu da

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=k_1F+k_2G(x), \qquad (4.64)$$

denkleminin bir özel integrali olur.

Bu teoremi $a_0, a_1, \dots, a_n$ katsayıları sabitler olmak üzere (4.64) şeklindeki bir diferansiyel denkleme uygulayalım. F basit bir BK fonksiyonu iken, G böyle olmasın. Bu durumda (4.64) denkleminin bir özel integralini bulmak için belirsiz katsayılar yöntemini uygulayamayacağız demektir. Ancak (4.62) denkleminin bir özel integralini bulmak için belirsiz katsayılar yöntemi kullanabilir, sonra (4.63) denkleminin özel integralini sabitlerin değişimi yöntemi ile bulur ve Teorem 4.12'yi kullanarak (4.64) denkleminin özel integralini yazarız.

Örnek 4.37.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=3e^x+5\tan x \qquad (4.65)$$

İki denklem çözeceğiz:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^x \tag{4.66}$$

ve

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \tan x \tag{4.67}$$

e^x fonksiyonu bir BK fonksiyonu olduğundan, (4.66)'nın bir özel integralini bulmak için belirsiz katsayılar yöntemini kullanabiliriz. $y_p = Ae^x$ dersek, $A = \frac{1}{2}$ olduğunu hemen bulabiliriz. Böylece (4.66)'nın bir özel integrali

$$y_p = \frac{1}{2}e^x$$

olur.

$\tan x$ fonksiyonu bir BK fonksiyonu olmadığından, (4.67)'nın bir özel integralini bulmak için sabitlerin değişimi yöntemine döneriz. Ancak bu problemi 4.34 örneğide çözmüş ve bir özel integralini

$$y_p = -(\cos x)\ln|\sec x + \tan x|$$

olarak bulmuştuk. BöyleceTeorem 4.12'yi kullanarak (4.65) denkleminin özel integralini

$$y_p = \frac{3}{2}e^x - 5(\cos x)\ln|\sec x + \tan x|$$

olarak yazarız.

ALIŞTIRMALAR

1.-13.'deki diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cot x$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \tan^2 x$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec x$

4. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec^3 x$

5. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec^2 2x$

6. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x \ln x, \quad (x > 0)$

7. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = xe^x \ln x, \quad (x > 0)$

8. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = (\ln x)^2, \quad (x > 0)$

9. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x \arcsin x$

10. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{e^{-x}}{x}$

11. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{1}{1+e^x}$

12. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{1}{1+e^{2x}}$

13. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{1}{1+\sin x}$

14. $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 3y = x^2e^x$ denkleminin genel çözümünü iki yöntemle bulunuz.

15. $y = x$ ve $y = 1/(x+1)$ fonksiyonlarının

$$(2x+1)(x+1)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

denkleminin lineer bağımsız çözümleri oldukları veriliyor.

$$(2x+1)(x+1)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 2y = (2x+1)^2$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

16. $y = \sin x$ ve $y = x \sin x$ fonksiyonlarının

$$\sin^2 x \frac{d^2y}{dx^2} - 2 \sin x \cos x \frac{dy}{dx} + (\cos^2 x + 1)y = 0$$

denkleminin lineer bağımsız çözümleri oldukları veriliyor.

$$\sin^2 x \frac{d^2y}{dx^2} - 2 \sin x \cos x \frac{dy}{dx} + (\cos^2 x + 1)y = \sin^3 x$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

EK ALIŞTIRMALAR

Sabitlerin değişimi yöntemini ve ilgili homojen denklemlerin verilen çözümlerini kullanarak aşağıdaki homojen olmayan denklemlerin birer özel çözümünü ve sonra da tam çözümlerini bulunuz.

1. $y'' - 4y' + 3y = e^{-x}, \qquad y_1 = e^x,\ y_2 = e^{3x}$
2. $y'' - y' - 2y = e^x, \qquad y_1 = e^{-x},\ y_2 = e^{2x}$
3. $y'' - y' - 2y = e^{-x}, \qquad y_1 = e^{-x},\ y_2 = e^{2x}$
4. $y'' - y' - 2y = x, \qquad y_1 = e^{-x},\ y_2 = e^{2x}$
5. $y'' + y = \sin x, \qquad y_1 = \sin x,\ y_2 = \cos x$
6. $y'' + 2y' + y = e^{-x}/x, \qquad y_1 = e^{-x},\ y_2 = e^{2x}$
7. $y'' + y = \tan x, \qquad y_1 = \sin x,\ y_2 = \cos x$
8. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}/x^2, \qquad y_1 = e^{-2x},\ y_2 = xe^{-2x}$
9. $x^2y'' + xy' - y = x, \qquad y_1 = x,\ y_2 = 1/x$
10. $x^2y'' + xy' - y = 1/x, \qquad y_1 = x,\ y_2 = 1/x$
11. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3e^x, \qquad y_1 = x,\ y_2 = x^2$
12. $x^2y'' - 6y = x^3 \ln \mid x \mid, \qquad y_1 = x^3,\ y_2 = 1/x^2$
13. $x^2y'' + xy' - y = 1/(1 + x), \qquad y_1 = x,\ y_2 = 1/x$

14. $x^2y'' - xy' + y = 1/x, \qquad y_1 = x,\ y_2 = x\ln|x|$

15. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x\ln|x|, \qquad y_1 = x,\ y_2 = x^2$

16. $xy'' + y = 1 + x, \qquad y_1 = 1,\ y_2 = \ln x$

17. $y'' - 3y' + 2y = e^{-2x}/(1 + e^x), \qquad y_1 = e^x,\ y_2 = e^{2x}$

18. $y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x}\tan^2 x, \qquad y_1 = e^{-x}\cos x,\ y_2 = e^{-x}\sin x$

19. $xy'' - (2x^2 + 1)4y' = x^5e^{x^2}, \qquad y_1 = 1,\ y_2 = e^{x^2}$

20. $(\sin 4x)y'' - 2(1 + \cos 4xy' = \tan x, \qquad y_1 = 1,\ y_2 = \cos 2x$

21. Sabitlerin değişimi yöntemini kullanarak $f(x)$ her yerde sürekli bir fonksiyon olmak üzere $y'' + k^2y = f(x), \quad k \neq 0$ denkleminin bir tam çözümünün

$$y = c_1\cos kx + c_2\sin kx + \frac{1}{k}\int \sin k(x - s)f(s)ds$$

integrali ile verilebileceğini gösteriniz. *Hatırlatma:* u_1 ve u_2'yi tanımlayan integrallere s gibi bir dilsiz değişken katınız. Sonra $y_1(x)$ ve $y_2(x)$'i bu integrallerin içine taşıyınız ve bu iki integrali birleştiriniz.

22. Sabitlerin değişimi yöntemini kullanarak $f(x)$ her yerde sürekli bir fonksiyon olmak üzere $y'' - k^2y = f(x), \quad k \neq 0$ denkleminin bir tam çözümünün

$$y = c_1\cosh kx + c_2\sinh kx + \frac{1}{k}\int \sinh k(x - s)f(s)ds$$

integrali ile verilebileceğini gösteriniz. *Hatırlatma:* 21. problemdeki gibi yapınız.

23. Tümleyen fonksiyonu bulunduktan sonra üçüncü basamaktan homojen olmayan bir diferansiyel denklemin bir özel çözümünü bulmak için sabitlerin değişimi yönteminin nasıl kullanılacağını anlatınız.

23. problemdeki yolu izleyerek aşağıdaki diferansiyel denklemlerin özel çözümlerini bulunuz.

24. $y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x}, \qquad y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x,\ y_3 = x^2e^x$
25. $y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{2e^x}{x^2}, \qquad y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x,\ y_3 = x^2e^x$

26. $y''' + y' = \sec x,$ $\quad y_1 = 1,\ y_2 = \cos x,\ y_3 = \sin x$
27. $y''' + y' = \csc x,$ $\quad y_1 = 1,\ y_2 = \cos x,\ y_3 = \sin x$
28. $y''' - y' = sechx,$ $\quad y_1 = 1,\ y_2 = \cosh x,\ y_3 = \sinh x$

Sabitlerin değişimi yöntemi kullanarak aşağıdaki denklemlerin özel çözümleri için formüller bulunuz.

29. $(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)y = f(x)$
30. $y''' - y'' + y' - y = f(x)$
31. $y''' - y'' - y' + y = f(x)$
32. $y^{iv} - 5y'' + 4y = f(x)$

Aşağıdaki denklemlerin özel çözümleri için formüller bulunuz.

33. $y'' + 2ay' + (a^2 - b^2)y = f(x)$
34. $y'' + 2ay' + a^2 y = f(x)$
35. $y'' + 2ay' + (a^2 + b^2)y = f(x)$

36. Sabitlerin değişimi yöntemi kullanarak $y'' - y = \frac{1}{x}$ denkleminin bir özel çözümü bulunuz. Bunu 56. problemin sonucu ile karşılaştırınca ne görüyorsunuz?

37. Sabitlerin değişimi yöntemi kullanarak $y'' - y = x^{\frac{1}{2}}$ denkleminin bir özel çözümü bulunuz. Bunu 57. problemin sonucu ile karşılaştırınca ne görüyorsunuz?

38. (a) $0 < b < a$ ve $\mid f(x) \mid, x \geq x_0$ için sınırlı ise, $y'' + 2ay' + (a^2 - b^2)y = f(x)$ in her çözümünün de $x \geq x_0$ için sınırlı olacağını göstermek için 66. problemin sonucunu kulanınız.

(b) $0 < b < a$ ve $\mid f(x) \mid,\ \ x \geq x_0$ için sınırlı, $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ve y de $y'' + 2ay' + (a^2 - b^2)y = f(x)$ denkleminin bir çözümü ise

$$\lim_{x\to\infty} y = \frac{L}{a^2 - b^2}$$

olacağını gösteriniz.

39. Sabitlerin değişimi yöntemini ya da operatörleri kullanarak aşağıdaki tablonun ikinci sütunun $ay'' + by' + cy = f(x)$ denkleminin Y

özel çözümünü, $f(x)$'in verilen tipleri için doğru olarak tahmin ettiğini kanıtlayınız. Y'nin belirsiz olan katsayılarının nasıl belirlenebileceğini anlatınız.

40. Hangi koşullar altında aşağıdaki tablonun ikinci sütununun, n. basamaktan ($n > 2$) homojen olmayan diferansiyel denklemin Y özel çözümünü bulmakta kullanılabileceğini anlatınız.

Denklem: $ay'' + by' + cy = f(x)$ veya $(aD^2 + bD + c)y = f(x)$

$f(x)$	Y özel çözümünün doğal seçimi
1. α	A
2. αx^n (n pozitif tamsayı)	$A_0x^n + \ldots + A_{n-1}x + A_n$
3. αe^{rx} (r gerçel veya komp)	Ae^{rx}
4. $\alpha \cos kx$	$A \cos kx + B \sin kx$
5. $\alpha \sin kx$	
6. $\alpha x^n e^{rx} \cos kx$	$(A_0x^n + \ldots + A_{n-1}x + A_n)e^{rx} \cos kx+$
7. $\alpha x^n e^{rx} \sin kx$	$(B_0x^n + \ldots + B_{n-1}x + B_n)e^{rx} \sin kx$

Aşağıdaki denklemlerin verilen koşulları sağlayan çözümlerini bulunuz.

41. $D^3 + 2D^2 - D - 2)y = 10 \sin x; \quad x = 0'$da $y = 1,\ y' = -2,\ y'' = -1$

42. $y''' - 2y'' + 10y' = 3xe^x; \quad x = 0'$da $y = \frac{-1}{3},\ y' = 0,\ y'' = \frac{1}{3}$

43. $D^3 + D)y = 2x^2 + 4 \sin x; \quad x = 0'$da $y = 0,\ y' = -2,\ y'' = -4$

44. $D - 1)^3 y = 6e^x; \quad x = -1'$de $y = 0,\ y' = 3,\ y'' = 0$

45. $y''' + 3y'' + 7y' + 5y = 16e^{-x} \cos 2x; \ x = 0$ 'da $y = 0$, $y' = -4,\ y'' = -2$

46. $y'' - \tan xy' - \sec^2 xy = 2 \cos x; \ x = 0''$da $y = y' = 0$

47. $y''' - y' = \frac{2}{1+e^x}; \quad x = 0''$da $y = \ln 16,\ y' = -1,\ y'' = -1 + \ln 4$

48. Sabitlerin Değişimi yöntemini kullanarak $y'' - y = \frac{1}{x}$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz. Bu çözüm x ve y'nin hangi değerleri için anlamlıdır?

49. Sabitlerin Değişimi yöntemini kullanarak $y'' + y = x^{\frac{1}{2}}$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz. Bu çözüm x ve y'nin hangi değerleri için anlamlıdır?

50. (a) Sıfırlayan operatör yönteminin, $m = r$ karakteristik denklemin bir basit kökü olduğu zaman, $ay'' + by' + cy = e^{rx}$ denkleminin bir özel çözümünü bulmakta nasıl kullanılabileceğini anlatınız.

(b) $P(D)$ ikinci dereceden bir polinom olduğu zaman

$$P(D)(x^2e^{mx}) = P(m)x^2e^{mx}) + 2P'(m)xe^{mx} + P(m)''e^{mx}$$

olacağını kanıtlayınız.

(c) (b) kısmının sonucunun, $m = r$ karakteristik denklemin bir katlı kökü olduğu zaman, $ay''+by'+cy = e^{rx}$ denkleminin bir özel çözümünü bulmakta nasıl kullanılabileceğini anlatınız.

51. $y'' + 5y' + 6y = e^{-3x}$ denkleminin bir özel çözümünü sabitlerin değişimi ve belirsiz katsayılar yöntemleri ile ayrı ayrı bulduktan sonra sonuçları karşılaştırınız.

52. Sabitlerin değişimi yöntemi kullanarak $r_1 \neq r_2$ olması halinde $Y = Axe^{r_1x}$ fonksiyonu

$$y'' - (r_1 + r_2)y' + r_1r_2y = ae^{r_1x}$$

denkleminin bir çözümü olacak şekilde A'nın daima bulunabileceğini gösteriniz.

53. Sabitlerin değişimi yöntemini kullanarak, $Y = Ax^2e^{rx}$ fonksiyonu

$$y'' - 2ry' + r^2y = ae^{rx}$$

denkleminin bir çözümü olacak şekilde, A'nın daima bulunabileceğini gösteriniz.

4.5 Cauchy-Euler Denklemi

A. Denklem ve Çözüm Yöntemi.

Bundan önceki kısımlarda n. basamaktan *sabit* katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini nasıl bulacağımızı gördük. Böyle durumlarda tümleyen çözümün hemen bulunabileceğini anladık. Oysa *değişken* katsayılı n. basamaktan lineer diferansiyel denklemlerde durum tamamen farklıdır ve tümleyen fonksiyon ancak çok özel hallerde kapalı olarak bulunabilir. Uygulamalar açısından çok önemli bir yeri olan bu tür özel denklemlerden biri *Cauchy-Euler denklemi* veya *eş boyutlu denklem* denilen denklemdir. Bu denklem,

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$$

katsayıları sabitler olmak üzere

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = b(x), \tag{4.68}$$

şeklindedir. Sol taraftaki her terimin $x^k \frac{d^k y}{dx^k}$'nın bir sabitle çarpımı olduğuna dikkat ediniz.

Böyle bir denklemi çözmek için acaba nasıl yola çıkılır? Bu aşamada akla sadece uygun bir dönüşümle bu işin içinden çıkılabileceği geliyor. Matematikçilerin yıllar önce yaşadığı macerayı yeniden yaşama hevesimizi bastırıp, şu teoreme bir göz atalım.

TEOREM 4.13. $x = e^t$ dönüşümü

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = b(x), \tag{4.68}$$

diferansiyel denklemini, sabit katsayılı bir lineer diferansiyel denkleme dönüştürür.

İşte bizim istediğimiz de bu. Geleneğimizi sürdürerek teoremi,

$$a_0 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_2 y = b(x), \tag{4.69}$$

ikinci basamak Cauchy-Euler denklemi için ispat edeceğiz. Genel n. basamak denklemler için ispat benzer şekilde yapılır. $x > 0$ varsayarak $x = e^t$ dersek, $t = \ln x$ olur. O zaman da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

ve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} =$$

$$\frac{1}{x}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

olur ki buradan

$$x\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \quad \text{ve} \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

bulunur. Bunları (4.69)'da yerlerine yazınca

$$A_0 = a_0, \quad A_1 = a_1 - a_0, \quad A_2 = a_2, \quad B(t) = b(e^t)$$

olmak üzere

$$A_0\frac{d^2y}{dt^2} + A_1\frac{dy}{dt} + A_2y = B(t), \tag{4.70}$$

ikinci basamak sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Göstermek istediğimiz de buydu.

Hatırlatmalar. 1. (4.68) denkleminde baş katsayı olan a_0x^n'nin $x = 0$'da sıfır olduğuna dikkat edin. Bu yüzden 4.1. kısımdaki teoremlerde geçen $a \le x \le b$ temel aralıkları, $x = 0$ noktasını bulundurmazlar.

2. Yukarıdaki ispatta $x > 0$ kabul ettiğimizi hatırlayın. $x < 0$ için doğru dönüşüm $x = -e^t$ olacaktı. Cauchy-Euler denklemlerinin genel çözümlerini bulurken, aksi söylenmedikçe $x > 0$ kabul edeceğiz.

B. Örnekler.

Örnek 4.38.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = x^3 \tag{4.71}$$

$x > 0$ varsayarak $x = e^t$ dersek, $t = \ln x$ olur ve

$$x\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \quad \text{ve} \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

bulunur. Bunları (4.71)'de yerlerine yazınca

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t} \tag{4.72}$$

ikinci basamak sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemi elde edilir.

Bu denklem için tümleyen fonksiyon

$$y_c = c_1e^t + c_2e^{2t}$$

fonksiyonudur ve bir özel integrali belirsiz katsayılar yöntemiyle bulunabilir.

$$y = Ae^{3t}, \quad \text{dersek} \quad y' = 3Ae^{3t}, \quad y'' = 9Ae^{3t}$$

olur ki, bunları (4.72)'de yerlerine koyduğumuzda

$$2Ae^{3t} = e^{3t}$$

elde ederiz. Böylece $A = \frac{1}{2}$, $y_p = \frac{1}{2}e^{3t}$ ve (4.72)'nin genel çözümü

$$y = c_1e^t + c_2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$$

olarak bulunur. Ancak işimiz daha bitmedi! Başlangıçtaki serbest değişken olan x'e dönmeliyiz. $e^t = x$ olduğundan,

$$y = c_1x + c_2x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

buluruz. İşte (4.71) denkleminin genel çözümü budur.

Hatırlatmalar.

1. $x = e^t$ dönüşümü ile (4.71) denkleminin sağ yanındaki x^3 fonksiyonunun e^{3t}'ye dönüşmesine dikkat edin. Eğer dönüşmüş denklemin bir özel integrali yardımıyla asıl denklemin bir özel integrali bulunacaksa, burada yapıldığı gibi denklemin iki yanı da dönüştürülmelidir.

2. Aşağıdaki farklı yolun da izlenebileceğini gecikmeden söyleyelim: Dönüşmüş denklemin tümleyen fonksiyonu bulunduktan sonra, bundan yararlanılarak asıl denklemin tümleyen fonksiyonu hemen yazılabilir ve ilk denklemin özel integrali bilinen yöntemlerden uygun olan biriyle araştırılabilir. (4.38) örneğinde (4.72) denkleminin tümleyen fonksiyonu $c_1e^t + c_2e^{2t}$ olarak bulununca (4.71) denkleminin tümleyen fonksiyonunun $c_1x + c_2x^2$ olacağı anlaşılır. Sağ yandaki x^3 fonksiyonu bir BK fonksiyonu olduğundan, (4.71) denkleminin bir özel integrali $y_p = Ax^3 + Bx^4 + Cx^5 + Dx^6$ yapısında aranacaktı. Yahut belirsiz katsayılar yöntemiyle $y_p = v_1x + v_2x^2$ tarzında bir özel integralin peşine düşülecekti. Ancak yukarıdaki örnekte de görüldüğü gibi işi dönüşmüş denklemde bitirmek genellikle daha kolaydır.

Örnek 4.39.

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - 4x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} - 8y = 4\ln x \tag{4.73}$$

$x > 0$ varsayarak $x = e^t$ dersek, $t = \ln x$ olur. Ayrıca

$$x\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \quad \text{ve} \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

ve benzer hesaplarla

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}$$

bulunur. Bunları (4.73)'te yerlerine yazınca

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 7\frac{d^2y}{dt^2} + 14\frac{dy}{dt} - 8y = 4t \tag{4.74}$$

üçüncü basamak sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemi elde edilir.

(4.74) denklemi için tümleyen fonksiyon

$$y_c = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{4t}$$

fonksiyonudur. (4.74) denkleminin bir özel integralini belirsiz katsayılar yöntemiyle bulmaya koyulalım.

$$y_p = At + B, \quad \text{dersek} \quad y_p' = A, \quad y_p'' = y_p''' = 0$$

olur ki, bunları (4.74)'te yerlerine koyduğumuzda

$$14A - 8At - 8B = 4t$$

elde ederiz. Böylece

$$\begin{cases} -8A = 4 \\ 14A - 8B = 0, \end{cases} \quad \text{ve buradan} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = -\frac{7}{8} \end{cases}$$

olur. Böylece (4.74) denkleminin genel çözümü

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{4t} - \frac{1}{2} t - \frac{7}{8}$$

ve (4.73) denkleminin genel çözümü

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^4 - \frac{1}{2} \ln x - \frac{7}{8}$$

olarak elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

1.'den 15.'ye kadar diferansiyel denklemlerin genel cözümlerini bulunuz.

1. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 3y = 0$
2. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 4y = 0$
3. $4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 3y = 0$
4. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 4y = 0$
5. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + 4y = 0$
6. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 13y = 0$
7. $x^3 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 6x \frac{dy}{dx} - 6y = 0$
8. $x^3 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 10x \frac{dy}{dx} - 8y = 0$
9. $x^3 \frac{d^2y}{dx^2} - x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 6x \frac{dy}{dx} + 18y = 0$
10. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 6y = 4x - 6$
11. $4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 5x \frac{dy}{dx} + 8y = 2x^3$

12. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 4\ln x, \quad x > 0$
13. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 4y = 2x\ln x, \quad x > 0$
14. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{1+x}$
15. $x^3\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 2y = x^3$

16.'dan 20.'ye kadar başlangıç değer problemlerini çözünüz.

16. $\begin{cases} x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 10y = 0 \\ y(1) = 5 \\ y'(1) = 4 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 6y = 0 \\ y(2) = 0 \\ y'(2) = 4 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 5x\frac{dy}{dx} + 8y = 2x^3 \\ y(-2) = 1 \\ y'(-2) = 7 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 6y = \ln x, \quad (x > 0) \\ y(1) = \frac{1}{6} \\ y'(1) = -\frac{1}{6} \end{cases}$

20. $(x+2)^2\frac{d^2y}{dx^2} - (x+2)\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ denklemini çözünüz.

21. $(2x-3)^2\frac{d^2y}{dx^2} - 6(2x-3)\frac{dy}{dx}12y = 0$ denklemini çözünüz.

EK ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

1. $x^2y'' + xy' - 5y = 0$
2. $x^2y'' - 6y = 1 + \ln \mid x \mid$
3. $x^2y'' - xy' + y = x^5$
4. $x^3y''' - 3x^2y'' + 7xy' - 8y = 0$
5. $2x^2y'' + 5xy' + y = 3x + 2$
6. $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 0$
7. $x^4y^{iv} + 6x^3y''' + 15x^2y'' + 9xy' - 9y = 3\ln \mid x \mid + \frac{1}{x^2}$

8. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 20x$
9. $x^3y'' + x^2y' - xy = 3x^3$
10. $x^3y''' + 4x^2y'' - 5xy' - 15y = x^3$

Aşağıdaki denklemlerin verilen koşulları sağlayan çözümlerini bulunuz.

11. $x^2y'' + xy' + y = 5x^2; \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 3$
12. $x^2y'' - 3xy' + 3y = \ln \mid x \mid; \quad y(-1) = \frac{4}{9},\ y'(1) = \frac{1}{3}$
13. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x \ln \mid x \mid; \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 0$
14. $x^3y''' + 2x^2y'' + xy' - y = 15\cos(2\ln \mid x \mid); \quad y(1) = 2,$ $y'(1) = -3,\ y''(1) = 0$
15. $x^2y''' + xy'' + 4y' = 4; \quad y(1) = \frac{4}{5}, y'(1) = y''(1) = 0$
16. $y''' + \frac{3}{x}y'' = \frac{6}{x}; \quad y(1) = \frac{4}{5},\ y'(1) = y''(1) = 0$

17. $\mid Ax + B \mid = e^z$ veya $z = \ln \mid Ax + B \mid$ dönüşümünün

$$a(Ax + B)^2\frac{d^2y}{dx^2} + b(Ax + B)\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

denklemini sabit katsayılı bir lineer denkleme dönüştüreceğini gösteriniz. $n > 2$ için

$$a_0(Ax+B)^n\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(Ax+B)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(Ax+B)\frac{dy}{dx} + a_ny = 0$$

denklemi de benzer şekilde çözülebilir mi?

18. 17. problemin sonucunu kullanarak

$$(x-2)^2y'' + 2(x-2)y' - 6y = 0$$

diferansiyel denkleminin bir tam çözümünü bulunuz.

OKUNMASI TAVSİYE EDİLEN KİTAPLAR

Agnew (1)
Coddington (12)
Ford (17)
Greenspan (20)
Kaplan (30)
Leighton (36)
Martin ve Reissner (38)
Reinville (45)

Bölüm 5

İkinci Basamak Denklem Uygulamalari

Bundan önceki bölümde tanıtılan iki ve daha yüksek basamaktan diferansiyel denklemler, çok önemli uygulamaları olan denklemlerdir. Bilhassa ikinci basamaktan diferansiyel denklemlerin, fizikte, elektrik ve makine mühendisliğinde bir çok önemli uygulamaları vardır. Bu bölümde uygulamalardan ikisi ele alınacak. 5.1'den 5.5'e kadar olan kısımlarda bir yayın ucuna bağlı olarak aşağı-yukarı inip çıkan bir cismin hareketini inceleyeceğiz. 5.6. kısımda ise devre teorisinden bazı problemleri ele alacağız.

5.1 Yaya Bağlı Cismin Hareketi

Temel Problem. Tavanda bir noktaya bir helezon yay bağlanmış ve bu yayın alt ucuna, denge konumunda sakin duran bir cisim asılmıştır. Sonra cisim şu iki durumdan birinde harekete geçirilmiştir:

(1) Cismi denge konumunun altına doğru bir miktar çekip, (veya üst tarafına doğru biraz iterek) bir ilk hızla (sıfır ya da değil, pozitif ya da negatif) serbest bırakarak,

(2) $t = 0$ anında bir başlangıç hızı (pozitif veya negatif) uygulayıp denge konumundan çıkararak.

Amacımız, yayın ucuna bağlı cismin, bunun sonucu ortaya çıkan hareketini incelemektir. Bu inceleme için, gözönüne almamız gereken başka şeyler de vardır. Sistemin (mesela hava ya da su gibi) bir ortama bırakıldığını kabul edelim. Bu ortam sisteme, hareketi yavaşlatacak tarzda bir direnç uygular. Sisteme etkiyen bazı dış kuvvetler de olabilir. Mesela demirden yapılmış cisme dışarıdan etkiyen bir manyetik kuvvet olabilir. Şimdi bunları hesaba katarak, yaya bağlı cismin hareketini belirlemeğe çalışalım. Bunu, önce hareketin diferansiyel denklemini yazıp, sonra çözerek başaracağız.

Bu sisteme dair diferansiyel denklemi bulmak için iki tane fizik yasasına ihtiyaç var: Newton'ın ikinci hareket yasası ve Hook yasası. Newton'ın ikinci hareket yasası ile daha önce üçüncü bölümde karşılaşmıştık onun için burada yeniden üzerinde durmayacağız. Hemen ikinci yasaya geçelim:

Hook Yasası. Bir yayı bir miktar uzatmak için gerekli kuvvetin büyüklüğü, bu uzama çok büyük olmamak şartıyla, uzama ile orantılıdır. Matematik diliyle, F kuvvetin şiddeti, s uzama miktarı ve k da *yay sabiti* dediğimiz orantı katsayısı olmak üzere $|F| = ks$ yazabiliriz.

k sabiti kullanılan yaya bağlıdır ve onun sertliğinin bir ölçüsüdür. Mesela 30 Newton'lık bir kuvvet bir yayı 20 cm uzatıyorsa, k yay sabiti 150 Newton/m olur.

Bir cisim bir yayın ucuna asıldığında onu s kadar uzatıyorsa, yaya etkiyen F kuvvetinin büyüklüğü ks kadar olur. Yay da cisme, yayı *geri getiren kuvvet* denilen bir kuvvet uygular. Bu kuvvet F ile aynı şiddette fakat ters yöndedir. Bu yüzden büyüklüğünü $-ks$ olarak alırız.

Problemi sistematik olarak formüle edelim. Spiral yayın doğal uzunluğu L olsun. m cismi bu yayın alt ucuna bağlanmıştır ve yay l kadar uzayarak bir denge konumuna gelip durmuştur. Yayın uzadıktan sonraki boyu artık $L + l$'dir. Koordinat eksenini yay boyunca ve merkezini denge noktasında seçiyoruz. Yön de aşağı doğru pozitif alınıyor. x, cismin O noktasından itibaren bu eksen boyunca yer değiştirmesini gösteriyorsa, cismin denge konumunun üstünde, tam bu noktada veya altında olması halinde sırasıyla negatif, sıfır ya da pozitif olur (Şekil 5.1'e bakınız).

Cisme Etkiyen Kuvvetler

Şimdi cisme etkiyen kuvvetleri sıralayalım. Cismi aşağı doğru çekmeğe çalışan kuvvetler pozitif, yukarı itenler de negatiftir. Kuvvetleri şöyle sıralayabiliriz:

1. F_1, şiddeti g yerçekim ivmesi olmak üzere, mg olan *yerçekimi kuvveti* . Aşağı doğru etkidiğinden pozitiftir:

$$F_1 = mg \tag{5.1}$$

2. Yayı *geri getiren kuvvet.* $x+l$ toplam uzama miktarı olduğundan, bu kuvvetin şideti Hook yasasına göre $k(x+l)$ olur. Cisim, uzamamış yayın hizasının *altında* ise, kuvvet *yukarı doğru* etkir ve bu yüzden *negatif* tir. Bu konumdaki cisim için $x+l$ ise *pozitif* tir. O halde bu konumda geri getiren kuvvet:

$$F_2 = -k(x+l) \tag{5.2}$$

(a) L doğal uzunluğu (b) denge konumu (c) cisim denge konumu altında

Şekil 5.1

Cisim uzamamış yayın ucunun hizası *üstünde* iken de geri getiren kuvvetin ifadesi aynıdır. Cisim denge konumunda durmakta iken geri getiren kuvvetin şiddeti yerçekimi kuvveti ile aynı fakat ters yönlüdür ve bu yüzden $-mg$ alınmalıdır. Bu noktada $x=0$ olduğundan (5.2) denkleminden

$$-mg = -k(0+l), \quad \text{veya} \quad mg = kl$$

olacaktır. (5.2) denkleminde kl yerine mg konursa,

$$F_2 = -kx - mg \tag{5.3}$$

şeklinde yazılabilir.

3. Ortamın *sönüm kuvveti* denilen *direnç kuvveti* . Bu kuvvetin büyüklüğü *tam olarak* bilinemiyorsa da, küçük hızlar için *yaklaşık olarak* hızla orantılıdır:

$$|F_3| = a \left| \frac{dx}{dt} \right| \tag{5.4}$$

Buradaki $a > 0$ sayısına *sönüm sabiti* denir. Cisim *aşağı doğru* giderken F_3 *yukarı doğru* (hareketin tersi yönde) etkir. Bu yüzden $f_3 < 0$ olur. Cisim aşağı doğru inmekte olduğundan x *artan*'dır. Bu yüzden $\frac{dx}{dt} > 0$ olur. O halde cisim *aşağı doğru* inmekte iken (5.4) denklemini mutlak değerlerden kurtulmuş olarak

$$F_3 = -a\frac{dx}{dt}, \quad (a > 0) \tag{5.5}$$

şeklinde yazmak mümkün olacaktır. Cisim yukarı doğru çıkarken de bu kuvvet aynı formülle ifade edilebilecektir.

4. Cismin üzerine *dışarıdan etkiyen kuvvetler.* Herhangi bir t anında bu kuvvetlerin bileşkesini $F(t)$ ile gösterelim:

$$F_4 = F(t) \tag{5.6}$$

Şimdi hareket denklemini elde etmek için Newton'ın $\mathcal{F} = ma$ ikinci hareket yasasını yazalım. $\mathcal{F} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ toplamındaki kuvvetlerin eşdeğerlerini (5.1), (5.3), (5.5) ve (5.6) denklemlerinden alırsak,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \tag{5.7}$$

elde edilir. İşte bu denklemi, yayın ucundaki cismin hareketinin diferansiyel denklemi olarak alacağız. Bunun ikinci basamaktan, homojen olmayan, sabit katsayılı bir lineer diferansiyel denklem olduğuna dikkat ediniz. $a = 0$ ise harekete *sönümsüz*, aksi halde *sönümlü* denir. Etkiyen dış kuvvet yoksa, $F(t) = 0, \quad \forall t > 0$ olur ve harekete *serbest*, aksi halde *zorlanmış* denir. Aşağıdaki kısımlarda (5.7) denkleminin bu üç durumdaki çözümlerini ayrı ayrı ele alacağız.

5.2 Serbest, Sönümsüz Hareket

Şimdi *serbest, sönümsüz hareket* özel halini ele alacağız. Bu durumda $a = 0$ ve $F(t) = 0, \quad \forall t > 0$ olacaktır. O zaman (5.7) denklemi, $m(> 0)$ kütle ve $k(> 0)$ da yay sabiti olmak üzere,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{5.8}$$

haline gelir. Denklemin iki yanını m'ye böler, $\frac{k}{m} = \lambda^2$ dersek (5.8),

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2 x = 0 \tag{5.9}$$

haline gelir. Bu denkleme ait yardımcı denklemin kökleri $r = \mp\lambda i$ olur ve (5.8)'in genel çözümü c_1, c_2'ler keyfî sabitler olmak üzere

$$x = c_1 \sin \lambda t + c_2 \cos \lambda t \tag{5.10}$$

olarak yazılabilecektir.

Şimdi cisim başlangıçta denge konumundan x_0 kadar uzaklaştırılıp, v_0 ilk hızıyla serbest bırakılıyor. Bu durumda (5.8) veya (5.9) diferansiyel denklemine ek olarak

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0 \tag{5.11 − 5.12}$$

başlangıç şartlarımız bulunmaktadır. (5.10)'u t'ye göre türetirsek

$$\frac{dx}{dt} = c_1\lambda \cos \lambda t - c_2\lambda \sin \lambda t \tag{5.13}$$

elde edilir. (5.10) ve (5.13) eşitliklerine (5.11) ve (5.12) şartlarını uygularsak

$$\begin{cases} c_2 = x_0 \\ c_1\lambda = v_0 \end{cases}$$

c_1 ve c_2'nin bu değerlerini (5.10) denkleminde yerlerine yazarsak, (5.8) diferansiyel denkleminin (5.11)-(5.12) şartlarını sağlayan özel çözümü

$$x = \frac{v_0}{\lambda} \sin \lambda t + x_0 \cos \lambda t$$

olur. Bunu önce

$$c = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\lambda}\right)^2 + x_0^2} > 0 \tag{5.14}$$

olmak üzere

$$x = c\left[\frac{\left(\frac{v_0}{\lambda}\right)}{c}\sin\lambda t + \frac{x_0}{c}\cos\lambda t\right] \tag{5.15}$$

şeklinde yazarsak,

$$\frac{\left(\frac{v_0}{\lambda}\right)}{c} = -\sin\phi, \quad \frac{x_0}{c} = \cos\phi \tag{5.16}$$

tanımıyla birlikte (5.14) denklemi hemen

$$x = c.\cos(\lambda t + \phi) \tag{5.17}$$

haline getirilebilir. $\lambda = \sqrt{\frac{k}{m}}$ olduğundan (5.17) çözümünü

$$x = c.\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi) \tag{5.18}$$

şeklinde yazabiliriz. O zaman bu formül O denge noktasından x yer değiştirmelerini t $(t > 0)$ zamanının bir fonksiyonu olarak verir. Cismin serbest sönümsüz davranışının *basit harmonik hareket* olduğunu görüyoruz. Buradaki c sabitine hareketin *genlik*'i denir ve cismin denge noktasından en büyük pozitif yerdeğiştirmesini verir . Hareket *periyodik*'tir ve cisim $x = c$ ile $x = -c$ arasında ileri geri gider gelir.

$$\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi = \mp 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots;\ t > 0$$

olunca ve yalnız o zaman $x = c$ olur. Böylece maksimum pozitif yerdeğiştirme

$$t = \sqrt{\frac{k}{m}}(\mp 2n\pi - \phi) > 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots;\ t > 0 \tag{5.19}$$

anlarında gözlenir. İki maksimum arasındaki zaman aralığına, hareketin *periyod*'u denir. (5.19)'u kullanarak periyodun

$$T = 2\pi/\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{5.20}$$

ile verileceği anlaşılır. Periyodun tersi, birim zamanda tamamlanan titreşimlerin sayısıdır. Buna hareketin *doğal frekansı* veya sadece *frekans*'ı denir. Buralarda geçmekte olan ϕ sayısına *faz sabiti* veya *faz açısı* adı verilir. Bu hareketin grafiği Şekil 5.2 ile verilmektedir.

Şekil 5.2

Örnek 5.1. 8 paund ağırlığında bir cisim tavana bağlı bir yaya asıldığında yayı 6 inç uzatarak denge konumunda sakin kalmıştır. Cisim bundan sonra denge konumunun 3 inç aşağısına kadar çekilmiş ve $t = 0$ anında, aşağı doğru yönelmiş 1 ft/sn'lik bir ilk hızla harekete başlatılmıştır. Ortamda sürtünme ve dış kuvvet bulunmadığını varsayarak, hareketin genliğini, periyodunu ve frekansını hesaplayınız.

Formülasyon. Bu problem serbest sönümsüz harekete bir örnektir. Bu yüzden (5.8) denklemini kullanabiliriz. 8 paundluk ağırlık yayı 6 inç=1/2 foot uzattığına göre, $F = ks$ Hook yasası $8 = .5\ k$ ve böylece $k = 16$ lb/ft ve kütle $m = \frac{w}{g} = \frac{8}{32} = 128$ slug bulunur. Böylece (5.8) denklemi

$$\frac{8}{32}\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0 \tag{5.21}$$

elde edilir. Cismin harekete başlatılış şekli gözönüne alındığında şartlar şöyle olur:

$$x(0) = 1/4, \quad x'(0) = 1 \tag{5.22}$$

Çözüm. (5.21) diferansiyel denklemine ait yardımcı denklem $r^2 + 64 = 0$ olduğundan $r = \mp 8i$'dir. Böylece (5.21) diferansiyel denkleminin genel çözümü; c_1, c_2 keyfî sabitler olmak üzere

$$x = c_1 \sin 8t + c_2 \cos 8t \tag{5.23}$$

şeklinde yazılabilecektir. (5.22)'deki birinci şartı uygularsak $c_2 = 0.25$ buluruz. (5.23)'ün türevini alırsak

$$\frac{dx}{dt} = 8c_1 \cos 8t - 8c_2 \sin 8t$$

ve (5.22)'deki ikinci şartı uygularsak $8c_1 = 1$ ve böylece $c_1 = 0.25$ elde ederiz. O halde (5.21) diferansiyel denkleminin (5.22) şartlarını sağlayan çözümü

$$x = 0.125 \sin 8t + 0.25 \cos 8t \tag{5.24}$$

olacaktır. Şimdi bunu (5.18) şekline sokalım. $\sqrt{0.125^2 + 0.25^2} = \frac{\sqrt{5}}{8}$ olduğundan

$$x = \frac{\sqrt{5}}{8}\left(\frac{\sqrt{5}}{5} \sin 8t + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cos 8t\right)$$

yazılır. Böylece (5.24)'deki çözüm,

$$x = \frac{\sqrt{5}}{8} \cos(8t + \phi), \qquad \cos\phi = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \sin\phi = -\frac{\sqrt{5}}{5} \tag{5.25}$$

olarak yazabiliriz. Burada $\phi = -0.46$ radyan olduğu görülmektedir. $\sqrt{5} \approx 2.236$ alınarak (5.25) çözümü yaklaşık olarak $x = 0.280\ \cos(8t - 0.46)$ yazılabilecektir. Hareketin genliği $\frac{\sqrt{5}}{8} \approx 0.280$ ft olmaktadır. (5.20) denklemine göre hareketin periyodu $\frac{2p}{8} = \frac{pi}{4}$ saniye ve frekansı $4/\pi$ titreşim/sn'dir. Hareketin grafiği de Şekil 5.3'te görülmektedir.

Bu problemi geride bırakmadan önce, başlangıç şartlarını doğru olarak koymamızın mümkün olduğundan emin olalım. Problemin ifadesindeki üçüncü cümleyi şöyle değiştirelim: "Sonra cisim denge konumunun 4 inç kadar *üstüne* kaldırılmış ve $t = 0$ anında, *yukarı doğru* yönelmiş 2 ft/sn'lik bir ilk hızla harekete başlatılmıştır." O zaman (5.22)'deki şartlar

$$x(0) = -\frac{1}{3}, \quad x'(0) = -2$$

haline gelir. Buradaki eksi işaretlerinin sebebi cismin, koordinatları negatif olan üst tarafa kaldırılmış ve negatif yön olan yukarıya doğru bir hızla harekete başlatılmış olmasıdır.

Şekil 5.3

ALIŞTIRMALAR

1-7. problemlerde ortamın direncini ihmal edin ve dış kuvvet bulunmadığını varsayın.

1. w=12 Newton ağırlığında bir cisim, bir spiral yayın ucunda tavana asılmıştır. Cisim denge konumuna, yay 1.5 cm uzadıktan sonra varmıştır. Sonra cisim denge konumundan aşağı doğru 2 cm çekilerek $t = 0$ anında buradan serbest bırakılmıştır. Cismin yer değiştirmesini zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz. Hareketin genliğini, periyo-

dunu ve frekansını hesaplayınız. Hareketin grafiğini zamanın bir fonksiyonu olarak çiziniz.

2. w=16 Newton ağırlığında bir cisim, sabit bir desteğe bağlı ve düşey olarak duran bir spiral yayın ucuna asılmıştır. Cisim denge konumuna, yay 1.5 cm uzadıktan sonra varmıştır. Aşağıdaki durumlarda cismin yerdeğiştirmesini, zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz:

(a) Cisim bundan sonra denge konumundan aşağı doğru 4 cm çekilerek $t = 0$ anında buradan aşağıya doğru yönelmiş 2 m/sn'lik bir hızla bırakılmıştır.

(b) Cisim bundan sonra denge konumundan aşağı doğru 4 cm çekilerek $t = 0$ anında buradan yukarıya doğru yönelmiş 2 m/sn'lik bir hızla bırakılmıştır.

(c) Cisim bundan sonra denge konumunun üstüne doğru 4 cm çekilerek $t = 0$ anında buradan yukarıya doğru yönelmiş 2 m/sn'lik bir hızla bırakılmıştır.

3. w=4 Newton ağırlığında bir cisim, bir spiral yayın ucunda tavana asılmıştır. Cisim denge konumuna, yay 6 cm uzadıktan sonra varmıştır. Sonra cisme, $t = 0$ anında denge konumundan yukarı doğru 2 m/sn lik bir ilk hızla harekete geçecek şekilde vurulmuştur.

(a) Cismin yerdeğiştirmesini ve hızını zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

(b) Hareketin genliğini, periyodunu ve frekansını hesaplayınız.

(c) Cismin denge konumunun 1.5 cm altında, aşağıya doğru hareket etmekte olduğu t anlarını bulunuz.

(d) Cismin denge konumunun 1.5 cm altında, yukarıya doğru hareket etmekte olduğu t anlarını bulunuz.

4. w=64 Newton ağırlığında bir cisim, ricid bir kirişe bağlı ve düşey olarak duran bir spiral yayın ucuna asılmıştır. Cisim denge konumuna, yay 60 cm uzadıktan sonra varmıştır. Sonra cisim denge konumundan aşağı doğru 30 cm çekilerek $t = 0$ anında buradan serbest bırakılmıştır.

(a) $t = \frac{5\pi}{16}$ anında cismin yeri neresidir? Bu anda hangi hızla ve ne yöne doğru gitmektedir?

(b) Cismin denge konumunun 6 cm üstünde, aşağıya doğru hareket etmekte olduğu t anlarını bulunuz. Cismin bu anlardaki hızları ne kadardır?

5. 25 Newton'lık bir kuvvet elimizdeki yayı 6 cm uzatabilmektedir. 16 Newton ağırlığında bir cisim, bu spiral yayın ucunda tavana asılmış ve denge konumuna gelmesi beklenmiştir. Sonra cisim denge konumundan aşağı doğru 4 cm çekilerek $t = 0$ anında buradan yukarı doğru 2 m/sn lik bir ilk hızla serbest bırakılmıştır.

(a) Cismin yerdeğiştirmesini zamanın bir fonksiyonu olarak bul.

(b) Hareketin genliğini, periyodunu ve frekansını hesapla.

(c) Cisim denge konumundan ilk defa ne zaman geçer ve bu andaki hızı nedir?

6. w=8 Newton ağırlığında bir cisim, ricid bir kirişe bağlı ve düşey olarak duran bir spiral yayın ucuna asılmış ve denge konumuna varmıştır. Sonra cisim denge konumundan aşağı doğru A cm çekilerek $t = 0$ anında buradan aşağıya doğru 3 m/sn lik bir ilk hızla serbest bırakılmıştır. Hareketin genliği $\sqrt{\frac{10}{2}}$ ve periyodu $\frac{\pi}{2}$ olduğuna göre, yay sabitini ve A'yı hesaplayınız.

7. w=8 Newton ağırlığında bir cisim, tavana asılı olarak duran bir spiral yayın ucuna asılmış ve denge konumuna varmıştır. Sonra cisim düşey olarak harekete geçirildiğinde, 4 saniye periyodlu bir hareket yapmıştır. Bir süre sonra bu hareket durdurularak yayın ucundaki cisim bir başka cisimle yer değiştirmiştir. Sistemin tekrar denge konumuna varması beklenmiş ve daha sonra bu cisim düşey olarak harekete geçirildiğinde, 6 saniye periyodlu bir hareket yapmıştır. Bu ikinci cismin ağırlığını bulunuz.

8. Basit sarkaç, ihmal edilebilir kütleli, l uzunluğunda düz bir tel ile onun ucuna bağlı m kütleli bir topuzdan ibarettir. Tel öteki ucundan düşey bir düzlemde salınabilecek gibi, sabit bir noktaya (destek) bağlanmıştır (Şekil 5.4'e bakınız). SP düz teli, θ da onun t anında SP_0 düşeyi ile yaptığı açıyı göstersin. Açı saatın tersi yönünde ölçüldüğünde pozitif olsun. Hava sürtünmesini ihmal edelim ve m kütleli cisme etkiyen kuvvetlerin sadece: teldeki F_1 gerilmesi ve yer çekiminden ileri gelen ve düşey olarak aşağıya doğru etkiyen, mg şiddetindeki F_2 kuvveti olduklarını varsayalım. F_T, f_2'nin yürüngeye teğet, F_N de ona dik bileşeni olmak üzere $F_2 = F_T + F_N$ yazarız. O zaman $F_N = -F_1$ ve $F_T = mg \sin\theta$ ve cisme etkiyen kuvvetlarin bileşkesi, P_0P_1 yayı boyunca $mg \sin\theta$ olacaktır. s, P_0P_1 yayının uzunluğu olmak üzere,

bu yay boyunca ivme $\frac{d^2s}{dt^2}$ olur. Newton'ın ikinci hareket yasasını uygularsak $m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\theta$ elde ederiz. $s = l\theta$ olduğundan

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta \quad veya \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{5.26}$$

diferansiyel denklemini elde ederiz.

(a) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$ denklemi lineer olmayan, ikinci basamaktan bir diferansiyel denklemdir.

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

olduğundan, θ yeterince küçük ise, $\sin\theta$ yerine θ alabiliriz. O zaman

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

yaklaşık lineer denklem'ini elde ederiz. $t = 0$ anında $\theta = \theta_0$ ve $\frac{d\theta}{dt} = 0$ olsun. Bu yaklaşık denklemin, bu başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü bulunuz. Bu çözümden yararlanarak hareketin genlik ve periyodunu bulunuz. Bu periyodun başlangıç yerdeğiştirmesinden bağımsız olduğunu farkediniz.

(b) Şimdi tekrar (5.26) lineer olmayan denklemine dönelim. Her iki tarafı $2\frac{d\theta}{dt}$ ile çarpıp integre eder ve başlangıç şartlarını kullanırsak, değişkenler ayrıldıktan sonra

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \mp\sqrt{\frac{2g}{l}}dt$$

elde edilir. Bu denklemden yararlanarak $\frac{d\theta}{dt} = 0$ açısal hızını

Şekil 5.4

θ'nın bir fonksiyonu olarak ifade edebiliriz. Ancak bu denklemin sol tarafı, lineer olmayan diferansiyel denklemin $\theta(t)$ çözümünü vermek üzere, bilinen fonksiyonlar cinsinden integre edilemez.

5.3 Serbest, Sönümlü Hareket

Şimdi ortamın, yayın ucuna bağlı cisim üzerine etkisini de hesaba katalım. Hala dış kuvvetlerin bulunmadığını varsayıyorsak bu, *serbest, sönümlü hareket* özel hali olacaktır. Böylece sönüm katsayısı $a > 0$ ve $F(t) = 0, \quad \forall t > 0$ olacaktır. O zaman (5.7) denklemi,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{5.27}$$

haline gelir. Denklemin iki yanını m'ye böler, (kolaylık olsun diye) $\frac{k}{m} = \lambda^2$ ve $\frac{a}{m} = 2b$ dersek, (5.27) diferansiyel denklemi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \lambda^2 x = 0 \tag{5.28}$$

haline gelir. $a > 0$ olduğundan, $b > 0$ olacağını görünüz. Bu denkleme ait yardımcı denklem

$$r^2 + 2br + a = 0 \tag{5.29}$$

ve kökleri

$$\frac{-2b \mp \sqrt{4b^2 - 4\lambda^2}}{2} = -b \mp \sqrt{b^2 - \lambda^2} \tag{5.30}$$

olur ve (5.28)'in genel çözümü için, $b^2 - \lambda^2$'nin işaretine bağlı olarak üç durum ortaya çıkar.

1. Hal. *Sönümlü Titreşimli Hareket.* Burada $b^2 - \lambda^2 < 0$ sonucunu doğuran $b < \lambda$ halini ele alacağız. O zaman (5.30)'daki kökler, $-b \mp i\sqrt{\lambda^2 - b^2}$ gibi eşlenik kompleks sayılardır ve böylece (5.28)'in genel çözümü c_1, c_2'ler keyfî sabitler olmak üzere

$$x = e^{-bt}(c_1 \sin\sqrt{\lambda^2 - b^2}t + c_2 \cos\sqrt{\lambda^2 - b^2}t \tag{5.31}$$

olarak yazılabilecektir. Bu çözümü, $c = \sqrt{c_1^2 - c_2^2} > 0$ olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 - c_2^2}} = -\sin\phi \\ \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 - c_2^2}} = \cos\phi \end{cases}$$

tanımıyla birlikte

$$x = ce^{-bt}\cos(\sqrt{\lambda^2 - b^2}t + \phi) \tag{5.32}$$

haline getirebiliriz. (5.32) denkleminin sağ yanı iki çarpandan oluşur: ce^{-bt} ve $\cos(\sqrt{\lambda^2 - b^2}t + \phi)$. ce^{-bt} çarpanına *sönüm çarpanı* ya da *zamanla değişen genlik* denir. $c > 0$ olduğundan bu çarpan pozitiftir ve $t \to \infty$ için monoton olarak sıfıra gider. Başka bir deyimle, zaman artarken, bu pozitif çarpan gittikçe küçülür ve sonunda ihmal edilebilecek kadar küçük olur. Öteki çarpan $\cos(\sqrt{\lambda^2 - b^2}t + \phi)$'ye gelince bu, periyodik, salınımlı karakterli bir fonksiyondur. Aslında bir basit harmonik hareketi temsil eder. Bu iki parçanın, (5.32)'nin sağ yanını veren çarpımları, salınımları gittikçe küçülen, salınımlı bir hareketi temsil eder. Salınımlara "sönüyorlar" ve harekete de *sönümlü, salınımlı hareket* denir. Kuşkusuz bu hareket artık periyodik değildir, ancak ardışık en büyük pozitif yerdeğiştirmeler arasında geçen zamana hala *periyod* denir. Bu sayı

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2 - b^2}}$$

ile hesaplanır. Hareketin grafiği Şekil 5.5'te verilmiştir. Şekilde ce^{-bt} sönüm çarpanı ve ters işaretlisi noktalı çizgilerle gösterilmiştir.

Şekil 5.5

Herhangi bir t anındaki genliğin bir periyod önce, $t - T$ anındaki genliğe oranı sabit ve

$$e^{-\frac{2\pi b}{\sqrt{\lambda^2 - b^2}}}$$

olur. Böylece $\frac{2\pi b}{\sqrt{\lambda^2-b^2}}$, ce^{-bt} genliğinin logaritmasında bir periyodluk zaman aralığında meydana gelen azalmadır. Buna *logaritmik azalma* denir.

(5.27) denklemindeki gösterime dönersek, (5.32) eşitliğine bakarak, ilk m, a, k sabitleri cinsinden (5.27)'nin genel çözümünün

$$x = ce^{-\frac{a}{2m}t} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{a^2}{4m^2}}t + \phi\right) \tag{5.33}$$

olur. $b > \lambda$ eşitsizliği $\frac{a}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}}$'ye karşılık olduğundan, (5.27)'nin genel çözümü (5.33) ile verilir ve sönümlü salınımlı hareket $a < 2\sqrt{km}$ olması halinde ortaya çıkar deriz.

$$\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{a^2}{4m^2}}t + \phi\right) \tag{5.34}$$

salınımlarının frekansı

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{a^2}{4m^2}}$$

olur. Sönüm olmasaydı, $a = 0$ olacak ve sönümsüz sistemin doğal frekansı $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ olarak bulunacaktı. Demek ki (5.33) sönümlü salınımlı harekete ait (5.34) salınımlarının frekansları, sönümsüz hareketin frekansından daha küçüktür.

2. Hal. *Kritik Sönüm.* Burada $b^2 - \lambda^2 = 0$ sonucunu doğuran $b = \lambda$ halini ele alacağız. O zaman (5.30)'daki köklerin ikisi de $-b$ negatif gerçel sayısına eşit olacaktır ve böylece (5.28)'in genel çözümü c_1, c_2'ler keyfî sabitler olmak üzere

$$x = (c_1 + c_2 t)e^{-bt} \tag{5.35}$$

olacaktır. Hareket artık salınımlı değildir. Sönüm, salınımları engelleyecek kadar güçlüdür. Ancak sönüm durumundaki küçük bir değişiklik hareketi birinci haldekine döndürebilecek ve yeniden sönümlü salınımlı hareket ortaya çıkacaktır. Onun için 2. hal, sınırda bir durumdur ve bu yüzden *kritik sönümlü* adını almaktadır.

(5.35) denkleminden

$$\lim_{t\to\infty} x = \lim_{t\to\infty} \frac{c_1 + c_2 t}{e^{bt}} = 0$$

elde edilmektedir. Böylece, $t \to \infty$ için cisim denge konumuna gider. Başlangıç şartlarına bağlı olarak, bu harekette şu durumlar ortaya çıkabilir:

a. $t > 0$ için cisim ne denge konumundan geçer ve ne de denge konumuna göre ekstremum (maksimum veya minimum) yer değiştirmeli bir konumdan geçer. Sadece $t \to \infty$ iken kararlı bir şekilde denge konumuna gider (Şekil 5.6(a)'ya bakınız).

Şekil 5.6

b. $t > 0$ için cisim denge konumundan geçmez ama bir $t = T_1 > 0$ anında, denge konumuna göre maksimum yer değiştirmeli bir konumdan geçer. Bu maksimum yer değiştirme görüldükten sonra cisim $t \to \infty$ iken kararlı bir şekilde denge konumuna gider (Şekil 5.6(b)'ye bakınız).

c. Cisim $t = T_2 > 0$ anında bir kere denge konumundan geçer ve sonra $t = T_3 > T_2$ anında, denge konumuna göre ekstremum yer değiştirmeli bir konumdan geçer. Bundan sonra cisim $t \to \infty$ iken kararlı bir şekilde denge konumuna gider (Şekil 5.6(c)'ye bakınız).

3. Hal.

Kritik Ötesi Sönüm. Son olarak burada $b^2 - \lambda^2 > 0$ sonucunu doğuran $b > \lambda$ halini ele alacağız. O zaman (5.30)'daki kökler farklı

$$r_{1,2} = -b \mp \sqrt{b^2 - \lambda^2}$$

negatif gerçel sayıları olacaktır ve böylece (5.28)'in genel çözümü c_1, c_2'ler keyfî sabitler olmak üzere

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \tag{5.36}$$

olacaktır. Artık sönüm, salınımları engelleyecek kadar güçlüdür. İkinci durumundaki gibi, küçük bir değişikliğin hareketi yeniden sönümlü salınımlı hale getireceğini de söyleyemeyeceğiz. Bu yüzden harekete *kritik ötesi sönümlü* veya sadece *aşırı sönümlü* sıfatını uygun görüyoruz.

(5.36) denkleminden $t \to \infty$ ikey yerdeğiştirmenin sıfıra gideceği hemen görülebilmektedir. t yeterince büyük olduğunda bu sıfıra gidiş monotondur. Aslında ikinci ve üçüncü hallerdeki üç hareket çeşidi genel yapıları itibariyle aynıdır. Böylece Şekil 5.6, üçüncü durumda başlangıç şartlarına bağlı olarak ortaya çıkabilecek durumları göstermek için de kullanılabilir.

Örnek 5.2. w=32 paund ağırlığında bir cisim, bir spiral yayın ucunda tavana asılmıştır. Cisim denge konumuna, yay 2 feet uzadıktan sonra varmıştır. Sonra cisim denge konumundan aşağı doğru 6 inç çekilerek $t = 0$ anında buradan serbest bırakılmıştır. Sisteme etkiyen hiçbir dış kuvvet yoktur ama, ortam cisme sayısal olarak, $\frac{dx}{dt}$ ft/sn cinsinden ani hız olmak olmak üzere $4\frac{dx}{dt}$'ye eşit bir direnç uygulamaktadır. Yayın ucuna bağlı olan bu cismin yer değiştirmesini zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

Formülasyon. Bu, serbest sönümlü bir hareket olduğundan (5.27) denklemi geçerlidir. 32 paund'luk ağırlık yayı 2 feet uzattığından, $F = ks$ Hook yasası $32 = k\ 2$ ve böylece $k = 16$ lb/ft verir. $w = mg$ olduğundan $m = 32/32 = 1$ slug ve sönüm katsayısı $a = 4$ olarak bulunur. O zaman (5.27) denklemi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 16x = 0 \tag{5.37}$$

haline gelir. Başlangıç şartları da

$$x(0) = \frac{1}{2}, \qquad x'(0) = 0 \tag{5.38}$$

olur.

Çözüm. (5.37) denklemi için yardımcı denklem ve kökleri;

$$r^2 + 4r + 16 = 0, \qquad r_{1,2} = -2 \mp 2\sqrt{3}i$$

olacaktır ve böylece (5.37)'nin genel çözümü c_1, c_2'ler keyfî sabitler olmak üzere

$$x = e^{-2t}(c_1 \sin 2\sqrt{3}t + c_2 \cos 2\sqrt{3}t) \tag{5.39}$$

olacaktır. (5.39)'u t'ye göre türetirsek,

$$\frac{dx}{dt} = e^{-2t}[-(2c_1 + 2\sqrt{3}c_2)\sin 2\sqrt{3}t + (2\sqrt{3}c_1 - 2c_2)\cos 2\sqrt{3}t] \tag{5.40}$$

buluruz. (5.38)'deki başlangıç şartlarını (5.39) ve (5.40) denklemlerine uygularsak,

$$c_2 = \frac{1}{2}, \qquad 2\sqrt{3}c_1 - 2c_2 = 0, \qquad c_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

elde ederiz. Böylece çözüm,

$$x = e^{-2t}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\sin 2\sqrt{3}t + \frac{1}{2}\cos 2\sqrt{3}t\right) \tag{5.41}$$

olacaktır. Şimdi bu çözümü (5.32)'deki şekle sokalım.

$$\frac{\sqrt{3}}{6}\sin 2\sqrt{3}t + \frac{1}{2}\cos 2\sqrt{3}t = \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\frac{1}{2}\sin 2\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\sqrt{3}t\right] =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\left(2\sqrt{3}t-\frac{\pi}{6}\right)$$

olur ki, (5.41) çözümü

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-2t}\cos\left(2\sqrt{3}t-\frac{\pi}{6}\right) \tag{5.42}$$

şeklinde yazılabilir.

Yorum. Bu, *sönümlü salınımlı hareket*'tir [1. hal]. Sönüm çarpanı $\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-2t}$, periyod $2\pi/2\sqrt{3}$ ve logaritmik azalma da $2\sqrt{3}\pi/3$ olur. (5.42)'deki çözümün grafiği Şekil 5.7'de görülmektedir. Bu şekilde $x=\mp\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-t}$ eğrileri kesik çizgilerle gösterilmiştir.

Şekil 5.7

Örnek 5.3. 5.2. örnekteki problemi, ortamın sisteme uyguladığı direncin paund cinsinden $4\frac{dx}{dt}$ yerine $8\frac{dx}{dt}$ olması ve diğer özelliklerin aynı kalması halinde çözünüz.

Formülasyon. Bu, serbest sönümlü bir hareket olduğundan (5.27) denklemi yine geçerlidir. Bu durumda $k = 16$ lb/ft olur. $w = mg$ olduğundan $m = 1$ slug fakat $a = 8$ olarak bulunur. O zaman (5.27) denklemi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0 \tag{5.43}$$

haline gelir. Başlangıç şartları da değişmeden

$$x(0) = \frac{1}{2}, \qquad x'(0) = 0 \tag{5.44}$$

olur.

Çözüm. (5.37) denklemi için yardımcı denklem ve kökleri;

$$r^2 + 8r + 16 = 0, \qquad r_{1,2} = -4$$

olacaktır ve böylece (5.37)'nin genel çözümü c_1, c_2'ler keyfî sabitler olmak üzere

$$x = (c_1 + c_2t)e^{-4t} \tag{5.45}$$

olacaktır. (5.45)'u t'ye göre türetirsek,

$$\frac{dx}{dt} = (c_2 - 4c_1 - 4c_2t)e^{-4t} \tag{5.46}$$

buluruz. (5.44)'deki başlangıç şartlarını (5.45) ve (5.46) denklemlerine uygularsak,

$$c_1 = \frac{1}{2}, \qquad c_2 - 4c_1 = 0, \qquad c_2 = 2$$

elde ederiz. Böylece çözüm,

$$x = 0(\frac{1}{2} + 2t)e^{-4t} \tag{5.47}$$

olacaktır.

Yorum. Bu, *kritik sönümlü hareket*'tir [2. hal]. (5.47)'ye bakarsak, yalnız ve ancak $t = -\frac{1}{4}$ olduğunda $x = 0$ olmaktadır. Demek ki $t > 0$ için $x \neq 0$ olur ve cisim denge konumundan geçmez. (5.47)'yi türetirsek $\frac{dx}{dt} > 0$, $\forall t > 0$ elde edilir. Böylece cismin denge konumuna göre yer değiştirmesi, zamana göre azalan bir fonksiyondur. Yani cisim serbest kalınca geriye, denge konumuna doğru inmeğe başlar ve $t \to \infty$ için monoton olarak $x \to 0$ olur. Bu yüzden problem, yukarıdaki genel incelemede 2. halin (a) şıkkında ele alınan duruma örnektir. (5.47)'deki çözümün grafiği Şekil 5.8'de kesiksiz çizgiyle gösterilmiştir.

Şekil 5.8

Örnek 5.4. 5.3. örnekteki problemi, ortamın sisteme uyguladığı direncin $4\frac{dx}{dt}$ yerine $10\frac{dx}{dt}$ olması ve diğer özelliklerin aynı kalması halinde çözünüz.

Formülasyon. Bu, serbest sönümlü bir hareket olduğundan (5.27) denklemi yine geçerlidir. Bu durumda $k = 16\,\text{lb/ft}$ olur. $w = mg$ olduğundan $m = 1$ slug fakat $a = 10$ olarak bulunur. O zaman (5.27) denklemi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 16x = 0 \tag{5.48}$$

haline gelir. Başlangıç şartları da değişmeden

$$x(0) = \frac{1}{2}, \qquad x'(0) = 0 \tag{5.44}$$

kalır.

Çözüm. (5.37) denklemi için yardımcı denklem ve kökleri;

$$r^2 + 10r + 16 = 0, \qquad r_1 = -2, \quad r_2 = -8$$

olacaktır ve böylece (5.37)'nin genel çözümü c_1, c_2'ler keyfî sabitler olmak üzere

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-8t}$$

olacaktır. Bu denklemi t'ye göre türetirsek,

$$\frac{dx}{dt} = -2c_1 e^{-2t} - 8c_2 e^{-8t}$$

buluruz. (5.44)'deki başlangıç şartlarını uygularsak,

$$c_1 + c_2 = \frac{1}{2}, \qquad -2c_1 - 8c_2 = 0, \qquad c_1 = \frac{2}{3}, \quad c_2 = -\frac{1}{6}$$

elde ederiz. Böylece çözüm,

$$x = \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-8t} \tag{5.49}$$

olacaktır.

Yorum. Bu, *aşırı sönümlü hareket*'e bir örnektir [3. hal]. Genel yapısı bakımından çözüm, 5.3 örneğindeki (5.47) çözümü ile aynıdır. Yalnız burada fazla sönüm sebebiyle cisim denge konumuna daha yavaş iner. Çözümün grafiği Şekil 5.8'de kesikli çizgiyle gösterilmiştir.

ALIŞTIRMALAR

1. w=2.5 Newton ağırlığında bir cisim, bir spiral yayın ucunda tavana asılmıştır. Cisim denge konumuna, yay 12 cm uzadıktan sonra varmıştır. Sonra cisim denge konumundan aşağı doğru 6 cm çekilerek $t = 0$ anında buradan serbest bırakılmıştır. Sisteme etkiyen hiçbir dış kuvvet yoktur ama, ortam cisme sayısal olarak, $\frac{dx}{dt}$ m/sn cinsinden ani hız olmak olmak üzere $2\frac{dx}{dt}$'ye eşit bir direnç uygulamaktadır.

(a) Hareketin diferansiyel denklemini kurunuz ve başlangıç şartlarını belirleyiniz.

(b) (a)'da kurulan diferansiyel denklemi çözerek cismin yer değiştirmesini zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

(c) (b) kısmında bulunan çözümü, metinde (5.32) denklemindeki gibi farklı bir şekilde yazınız.

(ç) Hareketin periyodu denilen sayıyı hesaplayınız.
(d) Hareketin grafiğini zamanın bir fonksiyonu olarak çiziniz.

2. w=5 Newton ağırlığında bir cisim, tavana asılı ve düşey olarak duran bir spiral yayın ucuna asılmıştır. Cisim denge konumuna, yay 20 cm uzadıktan sonra varmıştır. Cisime bundan sonra denge konumundan aşağı doğru, $t = 0$ anında aşağıya doğru yönelmiş 60 cm/sn'lik bir hızla harekete başlayacak şekilde vurulmuştur. Sisteme etkiyen hiçbir dış kuvvet yoktur ama, ortam cisme sayısal olarak, $\frac{dx}{dt}$ m/sn cinsinden ani hız olmak olmak üzere $6\frac{dx}{dt}$'ye eşit bir direnç uygulamaktadır. Cismin yer değiştirmesini zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz. Hareketin grafiğini çiziniz.

3. w=2.5 Newton ağırlığında bir cisim, tavana asılı ve düşey olarak duran bir spiral yayın ucuna asılmıştır. Cisim denge konumuna, yay 15 cm uzadıktan sonra varmıştır. Cisim bundan sonra denge konumundan aşağı doğru 9 cm çekilerek, $t = 0$ anında serbest bırakılmıştır. Sisteme etkiyen hiçbir dış kuvvet yoktur ama, ortam cisme sayısal olarak, $\frac{dx}{dt}$ m/sn cinsinden ani hız olmak olmak üzere $4\frac{dx}{dt}$'ye eşit bir direnç uygulamaktadır. Cismin yer değiştirmesini zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz ve hareketin grafiğini çiziniz.

4. w=5 Newton ağırlığında bir cisim, tavana asılı ve düşey olarak duran bir spiral yayın ucuna asılmıştır. Cisim denge konumuna, yay 15 cm uzadıktan sonra varmıştır. Cisim bundan sonra denge konumundan aşağı doğru 9 cm çekilerek, $t = 0$ anında serbest bırakılmıştır. Sisteme etkiyen hiçbir dış kuvvet yoktur ama, ortam cisme sayısal olarak, $\frac{dx}{dt}$ m/sn cinsinden ani hız olmak olmak üzere $10\frac{dx}{dt}$'ye eşit bir direnç uygulamaktadır. Cismin yer değiştirmesini zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz ve hareketin grafiğini çiziniz.

5. w=8 Newton ağırlığında bir cisim, tavana asılı ve düşey olarak duran bir spiral yayı 15 cm uzatmıştır. Cisim bundan sonra denge konumundan aşağı doğru 20 cm çekilerek, $t = 0$ anında serbest bırakılmıştır. Ortam cisme sayısal olarak, $\frac{dx}{dt}$ m/sn cinsinden ani hız olmak olmak üzere $2\frac{dx}{dt}$'ye eşit bir direnç uygulamaktadır.
(a) Cismin yer değiştirmesini zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz. Çözümü, metinde (5.32) denklemindeki gibi farklı bir şekilde yazınız.

(b) Hareketin periyodu denilen sayıyı hesaplayınız.

(d) Cisim denge noktasından ne zaman geçer?

6. w=2 Newton ağırlığında bir cisim, tavana asılı ve düşey olarak duran bir spiral yayı 20 cm uzatmıştır. Cisim bundan sonra denge konumundan aşağı doğru biraz çekilerek, $t = 0$ anında serbest bırakılmıştır. Ortam cisme sayısal olarak, $\frac{dx}{dt}$ m/sn cinsinden ani hız olmak olmak üzere $a\frac{dx}{dt}$'ye eşit $(a > 0)$ bir direnç uygulamaktadır. Sistemin hareketinin a'nın hangi değerleri için salınımlı, kritik sönümlü ve aşırı sönümlü olacağını belirleyiniz.

7. w=2 Newton ağırlığında bir cisim, tavana asılı ve düşey olarak duran bir spiral yayı 15 cm uzatmıştır. Cisim bundan sonra denge konumundan aşağı doğru 8 cm çekilerek, $t = 0$ anında serbest bırakılmıştır. Ortam cisme sayısal olarak, $\frac{dx}{dt}$ m/sn cinsinden ani hız olmak olmak üzere $a\frac{dx}{dt}$'ye eşit $(a > 0)$ bir direnç uygulamaktadır.

(a) Sistemin hareketinin a'nın hangi değerleri için kritik sönümlü olacağını belirleyiniz. Sonra bu kritik a değeri için cismin yer değiştirmesini zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

(b) Cismin yer değiştirmesini bu a değerinin yarısına eşit bir sönüm için bulunuz.

(c) Cismin yer değiştirmesini (a) şıkkındaki a değerinin iki katına eşit bir sönüm için bulunuz.

8. w=4 Newton ağırlığında bir cisim, tavana asılı ve düşey olarak duran, Hook sabiti 2 Newton/m olan bir spiral yayın ucuna asılmıştır. Cisim denge konumunda durduktan sonra aşağı doğru 15 cm çekilerek, $t = 0$ anında aşağıya doğru 30 cm/sn'lik bir ilk hızla harekete başlatılmıştır. Ortam cisme sayısal olarak, $\frac{dx}{dt}$ m/sn cinsinden ani hız olmak olmak üzere $a\frac{dx}{dt}$'ye eşit $(a > 0)$ bir direnç uygulamaktadır.

(a) Sistemin hareketinin salınımlı olmaması için a'nın en az hangi değerde olması gerektiğini belirleyiniz.

(b) a'nın bu değeri için cismin yer değiştirmesini zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

(c) Cismin bir $t = T_1 > 0$ anında denge konumuna göre bir ekstremum yer değiştirme yaptığını gösteriniz ve T_1 zamanını ve ekstremum yerdeğiştirmeyi bulunuz. Cismin bundan sonra $t \to \infty$ için monoton olarak denge konumuna gideceğini gösteriniz.

(ç) (b) şıkkında bulduğunuz değiştirmenin grafiğini çiziniz.

9. w=10 Newton ağırlığında bir cisim, tavana asılı ve düşey olarak duran bir spiral yayın ucuna asılmıştır. Cisim denge konumunda durduktan sonra aşağı doğru biraz çekilerek, $t = 0$ anında aşağıya doğru 30 cm/sn'lik bir ilk hızla harekete başlatılmıştır. Ortam cisme direnç göstermeseydi, hareketin doğal frekansı $4/\pi$ titreşim/sn olacaktı. Oysa ortam cisme sayısal olarak, $\frac{dx}{dt}$ m/sn cinsinden ani hız olmak olmak üzere $a\frac{dx}{dt}$'ye eşit ($a > 0$) bir direnç uygulamaktadır ve bu yüzden sistemin hareketinin frekansı, doğal frekansının ancak yarısı olmaktadır.

(a) k yay sabitini belirleyiniz.

(b) a sönüm katsayısını bulunuz.

10. Yay sabiti k olan bir yayın ucuna düşey olarak asılmış, m kütleli bir cismin, anî hızla orantılı direnç uygulayan bir ortamdaki hareketinin diferansiyel denklemi (5.27) ile verilir. Sönümlü, salınımlı hareket halinde bu denklemin çözümü (5.33) ile verilir. Bu şekilde tanımlanmış x yerdeğiştirmesinin

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{a^2}{4m^2}}$$

olmak üzere

$$t_n = \frac{1}{\omega_1}\left[\arctan\left(-\frac{a}{2m\omega_1}\right) + n\pi - \phi\right]$$

eşitliği ile verilen zamanlarda bir ekstremumdan (maksimum veya minimum) geçeceğini gösteriniz.

11. Bir yayın ucuna düşey olarak asılmış, birim kütleli bir cismin, belli bir ortamdaki hareketinin diferansiyel denklemi $b > 0$ olmak üzere

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + b^2x = 0$$

ile verilmiştir. Cismin başlangıç yerdeğiştirmesi A metre ve başlangıç hızı B m/sn'dir.

(a) Hareketin kritik sönümlü olduğunu ve yerdeğiştirmenin

$$x = (A + Bt + Abt)e^{-bt}$$

ile verileceğini gösteriniz.

(b) A ve B sayıları, $-A/(B+bB)<0$, $B/b(B+Ab)<0$ olacak şekilde ise cismin, $t>0$ için ya denge konumundan geçerek veya denge konumuna göre bir ekstremum yerdeğiştirme yaparak, $t\to\infty$ iken monoton bir şekilde denge konumuna gideceğini kanıtlayınız.

(c) A ve B sayıları, $-A/(B+bB)<0$, $B/b(B+Ab)>0$ olacak şekilde ise cismin, $t>0$ için denge konumundan geçmediğini, ancak $t=B/b(B+Ab)$ anında denge konumuna göre bir tek ekstremum yerdeğiştirme yaparak, $t\to\infty$ iken monoton bir şekilde denge konumuna gideceğini ispat ediniz.

(d) A ve B sayıları, $-A/(B+bB)>0$ olacak şekilde ise cismin, $t=-A/(B+Ab)$ anında denge konumundan geçtiğini, $t=B/b(B+Ab)$ anında denge konumuna göre bir tek ekstremum yerdeğiştirme yaparak, $t\to\infty$ iken monoton bir şekilde denge konumuna gideceğini ispat ediniz.

5.4 Zorlanmiş Hareket

Burada önemli bir özel hal olan *zorlanmış hareket*'i ele alacağız. Burada sadece cisme ortamın gösterdiği direnci hesaba katmakla kalmayıp, sistem üzerine dışarıdan etkiyen ve F_1,ω birer sabit olmak üzere

$$F(t)=F_1\cos\omega t,\quad \forall t>0$$

ile tanımlı periyodik zorlama kuvvetlerini de işin içine katacağız. O zaman (5.7)'deki temel diferansiyel denklem

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+kx=F_1\cos\omega t \tag{5.50}$$

haline gelir. Denklemin iki yanını m'ye böler, (kolaylık olsun diye) $\frac{k}{m}=\lambda^2$, $\frac{a}{m}=2b$ ve $\frac{F_1}{m}=E_1$ dersek, (5.50) diferansiyel denklemi

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+\lambda^2x=E_1\cos\omega t \tag{5.51}$$

haline gelir. $a>0$ sönüm katsayısının kritik sönüm değerinden daha küçük olduğunu kabul edeceğiz. Yani, $b<\lambda$ olacağını varsayıyoruz.

Böylece (5.32)'ye göre, (5.51)'in tümleyen fonksiyonu,

$$x = ce^{-bt}\cos(\sqrt{\lambda^2 - b^2}t + \phi) \tag{5.52}$$

Şimdi belirsiz katsayılar yöntemiyle (5.51) denkleminin bir özel integralini bulacağız.

$$x_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{5.53}$$

dersek

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos\omega t - \omega^2 B\sin\omega t$$

olur ki bunları (5.51)'de yerlerine koymakla

$$[-2b\omega A + (\lambda^2 - \omega^2)B]\sin\omega t + [(\lambda^2 - \omega^2)A + 2b\omega B]\cos\omega t = E_1\cos\omega t$$

elde edilir. Böylece $A,\ B$'yi belirlenir:

$$\begin{cases} -2b\omega A + (\lambda^2 - \omega^2)B = 0 \\ (\lambda^2 - \omega^2)A + 2b\omega B = E_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{E_1(\lambda^2 - \omega^2)}{(\lambda^2-\omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} \\ B = \frac{2b\omega E_1}{(\lambda^2-\omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} \end{cases} \tag{5.54}$$

Bunları (5.53)'te yerlerine yazınca özel integral

$$x_p = \frac{E_1}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}[(\lambda^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2b\omega\sin\omega t]$$

olarak bulunur. Bunu faz açılı şekle sokarsak,

$$\cos\theta = \frac{\lambda^2 - \omega^2}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}, \quad \sin\theta = \frac{2b\omega}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \tag{5.55}$$

tanımını yaparsak,

$$(\lambda^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2b\omega\sin\omega t = \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}$$

$$\times \left[\frac{\lambda^2 - \omega^2}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}\cos\omega t + \frac{2b\omega}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}\sin\omega t\right]$$

$$\sqrt{(\lambda^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}[\cos\omega t\cos\theta+\sin\omega t\sin\theta]=$$

$$\sqrt{(\lambda^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}\cos(\omega t-\theta)$$

bulunur. Böylece özel integral

$$x_p=\frac{E_1}{\sqrt{(\lambda^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}}\cos(\omega t-\theta) \tag{5.56}$$

haline gelir. (5.52) ve (5.56)'yı kullanırsak, (5.51)'in genel çözümü

$$x=ce^{-bt}\cos(\sqrt{\lambda^2-b^2}t+\phi)+\frac{E_1}{(\lambda^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}\cos(\omega t-\theta) \tag{5.57}$$

olur. Bu çözümün iki terimden oluştuğuna dikkat ediniz. Birinci terim

$$ce^{-bt}\cos(\sqrt{\lambda^2-b^2}t+\phi)$$

, $F_1\cos\omega t$ olmadığında sistemin toplam hareketini temsil edecek olan sönümlü salınımı temsil eder. Dış kuvvetin varlığından kaynaklanan ikinci terim

$$\frac{E_1}{(\lambda^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}\cos(\omega t-\theta)$$

ise, periyodu $2\pi/\omega$ periyodlu bir basit harmonik hareketi temsil eder. ce^{-bt} çarpanı sebebiyle birinci terim zamanla küçülür ve ihmal edilebilir hake gelir. Bu yüzden bu terime *geçici terim* denir. İkinci terim sabit genlikli bir kosinüs terimi olarak harekete periyodik salınımlı olarak katkıda bulunmaya devam eder. Zamanla birinci terim etkisizleşir ve harekete ikinci terim hakim olur. Bu yüzden bu ikinci terime *kararlı hal* terimi denir.

Örnek 5.5. w=5 Newton ağırlığında bir cisim, bir spiral yayın ucunda tavana asılmıştır. Yayın yay sabiti 100 Newton/m'dir. Cisim denge konumunda durduktan sonra $t=0$ anında $F(t)=5\cos 2t$ dış kuvvetinin etkisine giriyor. Ortam cisme sayısal olarak, $\frac{dx}{dt}$ m/sn cinsinden ani hız olmak olmak üzere $2\frac{dx}{dt}$'ye eşit bir direnç uygulamaktadır. Yayın ucuna bağlı olan bu cismin yer değiştirmesini zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

Formülasyon. Hareketin temel denklemi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \tag{5.58}$$

olacaktır. Bu probleme ait büyüklükler, $k = 100$ Newton/m, $w = mg$ olduğundan $m = 5/10 = 0.5$ kg-kütle, $a = 2$ ve $F(t) = 5\cos 2t$ olur. O zaman (5.58) denklemi

$$0.5\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 100x = 5\cos 2t$$

veya

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 200x = 5\cos 2t \tag{5.59}$$

haline gelir. Başlangıç şartları da

$$x(0) = 0.0, \qquad x'(0) = 0 \tag{5.60}$$

olur.

Çözüm. (5.59) denklemi için yardımcı denklem ve kökleri;

$$r^2 + 4r + 200 = 0, \qquad r_{1,2} = -2 \pm 14i$$

eşlenik kompleks sayıları olacaktır ve böylece (5.59)'un tümleyen fonksiyonu, c_1, c_2'ler keyfî sabitler olmak üzere

$$x = e^{-2t}(c_1 \sin 14t + c_2 \cos 14t)$$

olacaktır. Bir özel integral bulmak için belirsiz katsayılar yöntemini kullanırsak,

$$x_p = A\sin 2t + B\cos 2t$$

Yazabiliriz. Bunu (5.59)'da yerine koyarsak A, B için,

$$\begin{cases} -8A + 196B = 0 \\ 196A + 8B = 5 \end{cases}, \qquad \begin{cases} A = \frac{245}{9588} \\ B = \frac{5}{4794} \end{cases}$$

elde edilir ki,

$$x_p = \frac{245}{9588}\sin 2t + \frac{5}{4794}\cos 2t$$

ve (5.59)'un genel çözümü,

$$x = e^{-2t}(c_1 \sin 14t + c_2 \cos 14t) + \frac{245}{9588} \sin 2t + \frac{5}{4794} \cos 2t) \qquad (5.61)$$

olarak bulunur. (5.61)'i t'ye göre türetirsek,

$$\frac{dx}{dt} = -2e^{-2t}(c_1 \sin 14t + c_2 \cos 14t) +$$

$$e^{-2t}(14c_1 \cos 14t - 14c_2 \sin 14t) + \frac{245}{4794} \cos 2t - \frac{5}{2397} \sin 2t \qquad (5.62)$$

buluruz. (5.60)'daki başlangıç şartlarını (5.61) ve (5.62) denklemlerine uygularsak,

$$c_2 + \frac{5}{2397} = 0, \qquad -2c_2 + 14c_1 + \frac{245}{2397},$$

elde ederiz. Böylece,

$$c_1 = -\frac{255}{2397 \times 14}, \qquad c_2 = -\frac{5}{4794} = 0,$$

ve verilen başlangıç şartlarını sağlayan çözüm artık şöyle olur:

$$x = e^{-2t}(-\frac{255}{2397 \times 14} \sin 14t - \frac{5}{4794} \cos 14t) + \frac{245}{9588} \sin 2t + \frac{5}{4794} \cos 2t$$

.

Yorum. Çözümdeki

$$e^{-2t}(-\frac{255}{2397 \times 14} \sin 14t - \frac{5}{4794} \cos 14t)$$

parçası, sönümlü salınımlı bir hareketi temsil eden *geçici terim*'dir. Kısa süre sonra ihmal edilebilecek kadar küçülür. Mesela $t > 3$ için sayısal değeri 0.002'den küçüktür. Şekli 5.9(a)'da verilmiştir.

$$\frac{245}{9588} \sin 2t + \frac{5}{4794} \cos 2t$$

terimi, periyodu π olan basit harmonik bir harekettir. Şekli 5.9(b)'de gösterilmiştir. Şekil 5.9(c), (5.66)'daki çözüme aittir. Kısa bir süre sonra geçici terimin etkisiz hale geldiği ve harekete kararlı hal çözümünün hakim olduğu görülmektedir.

Şekil 5.9

ALIŞTIRMALAR

1. w=2.5 Newton ağırlığında bir cisim, bir spiral yayın ucunda tavana asılmıştır. Yay sabiti 3 Newton/m olarak verilmiştir. Cisim denge konumunda durduktan sonra $t = 0$ anında $F(t) = 12\cos 20t$ dış kuvvetinin etkisine giriyor. Ortamın cisme hissedilebilir bir direnç uygulamadığını kabul ederek, bu cismin yer değiştirmesini zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

2. w=5 Newton ağırlığında bir cisim, bir spiral yayın ucunda tavana asılmıştır. Yay 15 cm uzadıktan sonra denge konumunda duruyor. Sonra $t = 0$ anında $F(t) = 40\cos 16t$ dış kuvvetinin etkisine giriyor. Ortam cisme, sayısal olarak, $\frac{dx}{dt}$ m/sn cinsinden ani hız olmak olmak üzere $4\frac{dx}{dt}$'ye eşit bir direnç uygulamaktadır.
(a) Bu cismin yer değiştirmesini zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.
(b) (a) şıkkında bulunan çözümün geçici ve kararlı hal terimlerinin grafiklerini ayrı ayrı çizdikten sonra bunlardan yararlanarak çözümün tamamının şeklini elde ediniz.

3. w=5 Newton ağırlığında bir cisim, bir spiral yayın ucunda tavana asılmıştır. Yay sabiti 20 Newton/m olarak verilmiştir. Cisim denge konumunda durduktan sonra $t = 0$ anında $F(t) = 10\cos 8t$ dış kuvvetinin etkisine giriyor. Ortam cisme, sayısal olarak, $\frac{dx}{dt}$ m/sn cinsinden ani hız olmak olmak üzere $5\frac{dx}{dt}$'ye eşit bir direnç uygulamaktadır. Bu cismin yer değiştirmesini zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

4. w=3 Newton ağırlığında bir cisim, bir spiral yayın ucunda tavana asılmıştır. Yay 8 cm uzadıktan sonra denge konumunda duruyor. Sonra $t = 0$ anında $F(t) = 13\cos 4t$ dış kuvvetinin etkisine giriyor. Ortam cisme, sayısal olarak m/sn cinsinden anî hızın iki katına eşit bir direnç uygulamaktadır.
(a) Bu cismin yer değiştirmesini zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.
(b) (a) şıkkında bulunan yerdeğiştirmenin geçici ve kararlı hal terimlerinden oluştuğunu gördükten sonra, kararlı hal teriminin genliğini bulunuz.

5. w=2 Newton ağırlığında bir cisim, bir spiral yayın ucunda tavana asılmıştır. Yay 10 cm uzadıktan sonra denge konumunda duruyor. Sonra $t = 0$ anında $F(t) = 27\cos 4t - 3\cos 4t$ dış kuvvetinin etkisine giriyor. Ortam cisme, sayısal olarak m/sn cinsinden anî hızın üç katına eşit bir direnç uygulamaktadır. Bu cismin yer değiştirmesini zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

6. w=10 Newton ağırlığında bir cisim, yay sabiti 100 Newton/m olan bir spiral yayın ucunda tavana asılmıştır. Sonra $t = 0$ anında $F(t) = \sin t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{9}\sin 3t$ dış kuvvetinin etkisine giriyor. Ortam cisme, sayısal olarak m/sn cinsinden anî hızın iki katına eşit bir direnç uygulamaktadır. Bu cismin yer değiştirmesini zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz, kararlı hal terimini üst üste bindirme ilkesini (4. Bölüm, Teorem 4.12) kullanarak elde ediniz.

7. w=8 Newton ağırlığında bir cisim, yay sabiti 200 Newton/m olan bir spiral yayın ucunda tavana asılmıştır. Sonra $t = 0$ anında $F(t) = 40\cos 2t$ dış kuvvetinin etkisine giriyor. Bu kuvvet etkisini $t = \pi$ anına kadar sürdürüyor. $t > \pi$ için cisme etkiyen hiçbir dış kuvvet yoktur. Ortam cisme, sayısal olarak m/sn cinsinden anî hızın dört katına eşit bir direnç uygulamaktadır. Bu cismin yer değiştirmesini $t > 0$ için zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

8. Bir spiral yayın ucunda tavana asılmış m kütleli bir cismin hareketini temsil eden (5.7) diferansiyel denklemini gözönüne alalım. Cismin, $t \geq 0$ için F_2 ve ω sabitler olmak üzere $F(t) = F_2 \sin \omega t$ dış kuvvetinin etkisinde olduğunu kabul edelim. Bu durumda (5.7) denkleminin çözümünün kararlı hal teriminin $b = a/2m$, $\lambda^2 = k/m$, $E_2 = F_2/m$ ve θ (5.55)'de tanımlanan açı olmak üzere

$$x_p = \frac{E_2}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} \sin(\omega t - \theta)$$

şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

9. w=10 Newton ağırlığında bir cisim, bir spiral yayın ucunda tavana asılmıştır. Yay 15 cm uzadıktan sonra denge konumunda duruyor. Sonra $t = 0$ anında $F(t) = 15\cos 7t$ dış kuvvetinin etkisine giriyor. Sönümün ihmal edilebilecek kadar küçük olduğu kabul edilmektedir.

(a) Bu cismin yer değiştirmesini zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

(b) (a) şıkkında bulunan yerdeğiştirmenin $A(t) = 2\sin\frac{t}{2}$ olmak üzere $x = A(t)\sin\frac{15t}{2}$ şeklinde yazılabileceğini gösteriniz. $A(t)$ hızlı olarak titreşen $\sin\frac{15t}{2}$ terimine göre nisbeten yavaş değişen bir genlik olarak düşünülebilir. Maksimum genlikte böyle dalgalanmalar akustik uygulamalarında ortaya çıkar ve bunlara *vuru* denir.

(c) Yavaş değişen $A(t) = 2\sin\frac{t}{2}$ genliğini ve onun ters işaretlisi $-A(t)$'yi dikkatle çiziniz. Sonra bunları sınırlayan eğriler olarak kullanıp, $x = A(t)\sin\frac{15t}{2}$ yerdeğiştirmesinin grafiğini elde ediniz.

10. w=5 Newton ağırlığında bir cisim, yay sabiti 10 Newton/m olan bir spiral yayın ucunda düşey olarak bir desteğe asılmıştır. Sonra denge konumunun 15 cm altına kadar çekilerek $t = 0$ anında serbest bırakılmıştır. Tam bu anda yayı taşıyan destek, düşey olarak başlangıç konumuna göre $\frac{1}{2}\sin 2t, \quad t \geq 0$ yerdeğiştirmesi yapacak şekilde harekete başlıyor. Ortam cisme, sayısal olarak m/sn cinsinden anî hızın iki katına eşit bir direnç uygulamaktadır.

(a) Bu cismin denge konumu etrafındaki yerdeğiştirmesinin diferansiyel denkleminin, $y = \frac{1}{2}\sin 2t$ olmak üzere

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} = -10(x-y) - 2\frac{dx}{dt}$$

veya

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 20x = 10\sin 2t$$

olacağını gösteriniz.

(b) (a) şıkkında elde edilen diferansiyel denklemi çözünüz. Geçerli başlangıç şartlarını uygulayarak x yer değiştirmesini zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

5.5 Rezonans

Şimdi $F(t) = F_1 \cos \omega t, \quad \forall t > 0$ ile tanımlı periyodik dış kuvvet yüzünden oluşan kararlı hal salınımının genliğini inceleyeceğiz. $F_1 > 0$ olmak üzere, sabit b, λ, E_1 için bu genliğin ω'nın

$$f(\omega) = \frac{E_1}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \tag{5.67}$$

şeklinde bir fonksiyonu olduğunu (5.56) denkleminden görürüz.

$\omega = 0$ ise, $F(t)$ kuvveti F_1 gibi bir sabittir ve $f(\omega) = \frac{E_1}{\lambda^2} > 0$ değerini alır. Yine $\omega \to \infty$ iken, (5.67)'den $f(\omega) \to 0$ olacağı görülür. f fonksiyonunu $0 < \omega < \infty$ aralığında ele alalım.

$$4\omega[2b^2 - (\lambda^2 - \omega^2] = 0$$

yani, $\omega = 0$ veya $\omega = \sqrt{\lambda^2 - 2b^2}$ olunca, $f'(\omega)$ türevi sıfır oluyor. $\lambda^2 < 2b^2$ ise a $\sqrt{\lambda^2 - 2b^2}$ bir kompleks sayıdır. Bu durumda $f(\omega)$'nın $0 < \omega < \infty$ aralığında ekstremumu olamaz. $\omega = 0$ noktasında aldığı $\frac{E_1}{\lambda^2}$ değerinden itibaren monoton olarak azalır ve $\omega \to \infty$ için sıfıra gider. $\lambda^2 > 2b^2$ olsun. O zaman $f(\omega)$'nın $\omega_1 = \sqrt{\lambda^2 - 2b^2}$ noktasında bir yerel maksimumu olur ve burada aldığı maksimum değer

$$f(\omega_1) = \frac{E_1}{\sqrt{(2b^2)^2 + 4b^2(\lambda^2 - 2b^2)}} = \frac{E_1}{2b\sqrt{\lambda^2 - b^2}}$$

olur. $F_1 \cos \omega t$ zorlayan fonksiyonu $\omega = \omega_1$ olacak şekilde ise, zorlayan fonksiyon sistemle *rezonans* halindedir denir. Başka bir deyişle $F_1 \cos \omega t$ zorlayan fonksiyonunun ω açısal frekansı, $f(\omega)$'yı maksimum yapan ω_1 değerine eşitse, bu zorlama sistemle *rezonans* halindedir denir. $\frac{\omega_1}{2\pi}$ değerine, sistemin *rezonans frekansı* denir. Rezonansın sadece $\lambda^2 > 2b^2$ halinde ortaya çıkabildiğine dikkat ediniz. O zaman $\lambda^2 > b^2$ olur ki, bu durumda sönüm kritik değerden daha azdır.

Şimdi (5.50) denkleminin gösterimine dönelim. m, a, k, F_1'ler cinsinden f fonksiyonu

$$f(\omega) = \frac{\frac{F_1}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 \left(\frac{a}{m}\right)^2 \omega^2}} \tag{5.68}$$

ve rezonans frekansı

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{a^2}{2m^2}} \tag{5.69}$$

olur. Bu harekete ait serbest sönümlü hareketin frekansı

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{a^2}{4m^2}}$$

olduğundan rezonans frekansının, serbest sönümlü hareketin frekansından daha küçük olduğunu görürüz.

Şekil 5.10

$f(\omega)$ fonksiyonunun grafiğine, sistemin *rezonans eğrisi* denir. m, k ve F_1 değerleri verilmiş bir sistemin, $a \geq 0$ sönüm katsayısının her değeri için bir rezonans eğrisi vardır. $m = k = F_1 = 1$ alalım ve $a \geq 0$'ın çeşitli değerleri için rezonans eğrilerini çizelim. Bu durumda

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + a^2\omega^2}}$$

ve rezonans frekansı $\frac{1}{2\pi}\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}$ olacaktır. Bu harekete ait rezonans eğrileri Şekil 5.10'da görülmektedir.

Rezonansın sadece $a < \sqrt{2}$ halinde ortaya çıktığına dikkat ediniz. a, $\sqrt{2}$ değerinden sıfıra doğru azalırken, rezonansın görüldüğü ω_1 değeri sıfırdan 1'e doğru artar ve $f(\omega)$'nın bu frekansa karşı gelen değeri gittikçe büyür. $a = 0$ limit haline maksimum kaybolur ve $\omega = 1$'de sonsuz süreksizliği ortaya çıkar. O zaman

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2}} = \frac{1}{1-\omega^2}$$

olacağından $f(\omega)$ tanımsızdır. Bu durum, şimdi inceleyeceğimiz *sönümsüz rezonans*'a bir örnektir.

Sönümsüz rezonans, sönüm olmadığı ve zorlayan kuvvetin frekansı, sistemin doğal frekansına eşit olduğu zaman ortaya çıkar. Bu durumda

$$a = 0, \quad \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

olduğundan (5.50) diferansiyel denklemi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

veya $E_1 = F_1/m$ olmak üzere

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = E_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \tag{5.70}$$

haline gelir. (5.70)'in tümleyen fonksiyonu

$$x_c = c_1 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + c_2 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \tag{5.71}$$

olduğundan bir özel integrali

$$x_p = A\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

şeklinde bekleyemeyiz.

$$x_p = At\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + Bt\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

almamız gerekir. Bunu türevleri ile birlikte (5.70)'de yerine yazarsak,

$$A = \frac{E_1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{ve} \quad B = 0$$

olur. Böylece $E_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$ zorlamasından kaynaklanan özel integral

$$x_p = \frac{E_1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}t\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

fonksiyonudur. (5.71)'deki tümleyen fonksiyonu faz açısı formunda yazarsak, (5.70) denkleminin genel çözümünün

$$x = c\ \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) + \frac{E_1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}t\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \tag{5.72}$$

olur. (5.72) ile tanımlanan hareket, bir periyodik terimle, $\frac{E_1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}t$ genliği zamanla büyüyen bir salınımlı terimden oluşur. Bu salınımlı

$$\frac{E_1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}t\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

terimi ile tanımlı hareketin grafiği Şekil 5.11'de görülmektedir. t artarken bu terim harekete bariz bir şekilde hakim olur. (5.72) ifadesi, $t\to\infty$ iken salınımların sonsuz büyüyeceğini göstermektedir. Ancak sağ duyu, bu heyecan verici hal vukubulmazdan önce sistemin kırılıp parçalanacağını ve artık (5.72) denkleminin daha fazla yürürlükte kalmayacağını söyler.

Şekil 5.11

Örnek 5.6. w=64 paund ağırlığında bir cisim, bir spiral yayın ucunda tavana asılmıştır. Yayın yay sabiti 18 lb/ft'dir. Cisim denge konumunda durduktan sonra denge konumunun 6 inç altına kadar çekilip $t = 0$ anında serbest bırakılıyor. Aynı anda sistem $F(t) = 3\cos\omega t$ dış kuvvetinin etkisine giriyor.

(a) Ortamın cisme sayısal olarak, $\frac{dx}{dt}$ m/sn cinsinden ani hız olmak olmak üzere $4\frac{dx}{dt}$'ye eşit bir direnç uyguladığını varsayarak hareketin rezonans frekansını hesaplayınız.

(b) Sönümün bulunmadığını varsayarak, sönümsüz rezonans verecek ω değerini hesaplayınız.

Çözüm.

$$m = \frac{w}{g} = \frac{64}{32} = 2\ (slug),\quad k = 18,\ F(t) = 3\cos\omega t$$

olduğundan diferansiyel denklem a sönüm katsayısı olmak üzere

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + 18x = 3\cos\omega t$$

olacaktır. (a) kısmında $a = 4$'tür ve diferansiyel denklem

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 18x = 3\cos\omega t$$

haline gelir. Burada bizden denklemi çözmemiz değil, sadece rezonans frekansını bulmamız isteniyor. (5.69) denklemini kullanırsak

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{18}{2} - \frac{16}{2\times 4}} \approx 0.42$$

titreşim/sn olur ki rezonans, $\omega = \sqrt{7} \approx 2.65$ olunca ortaya çıkar.

(b) kısmında $a = 0$'dır ve denklem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = \frac{3}{2}\cos\omega t \tag{5.73}$$

haline gelir. Sönümsüz rezonans, zorlayan kuvvetin $\omega/2\pi$ frekansı, doğal frekansa eşit olunca ortaya çıkar. (5.73) denkleminin tümleyen fonksiyonu c_1, c_2'ler keyfî sabitler olmak üzere

$$x_c = c_1\sin 3t + c_2\cos 3t$$

olacaktır. Buradan sistemin doğal frekansının $3/2\pi$ olduğunu anlarız. Böylece $\omega = 3$ halinde sönümsüz rezonans ortaya çıkacaktır. Bu durumda diferansiyel denklem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = \frac{3}{2}\cos 3t \tag{5.74}$$

ve başlangıç şartları da $x(0) = \frac{1}{2}$, $x'(0) = 0$ olur. (5.74) denkleminin verilen başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün

$$x = \frac{1}{2}\cos 3t + \frac{1}{4}t\sin 3t$$

olacağı kolayca gösterilebilir.

ALIŞTIRMALAR

1. w=12 paund ağırlığında bir cisim, bir spiral yayın ucunda tavana asılmıştır. Yay 6 inç uzadıktan sonra, cisim denge konumunda durmuştur. Sistem $t = 0$ anından itibaren $F(t) = 2\cos\omega t$ dış kuvvetinin etkisine giriyor.

(a) Ortamın cisme uyguladığı direnç sayısal olarak, $\frac{dx}{dt}$ ft/sn cinsinden ani hız olmak olmak üzere $3\frac{dx}{dt}$ ise, hareketin rezonans frekansını ve zorlayan kuvvet sistem ile rezonansta iken cismin yer değiştirmesini zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

(b) Sönümün bulunmadığını varsayarak, sönümsüz rezonans verecek ω değerini hesaplayınız. Bu durumda da cismin yer değiştirmesini zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

2. w=20 paund ağırlığında bir cisim, bir spiral yayın ucunda tavana asılmıştır. Yay 6 inç uazdıktan sonra, cisim denge konumunda durmuştur. Sistem $t = 0$ anından itibaren $F(t) = \cos\omega t$ şeklinde çeşitli dış kuvvetlerin etkisine giriyor. Sistemin rezonans frekansının saniyede 0.5 titreşim olduğu anlaşılıyor. Ortamın cisme uyguladığı direnç sayısal olarak, $\frac{dx}{dt}$ ft/sn cinsinden ani hız olmak olmak üzere $a\frac{dx}{dt}$ ise, a sönüm katsayısını hesaplayınız.

3. Bir spiral yayın ucunda tavana asılmış birim kütleli ve $F(t) = 30\cos\omega t$ dış kuvvetinin etkisi altındaki bir cismin hareketini temsil eden diferansiyel denklem, $a \geq 0$ sönüm katsayısı olmak üzere

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + 24x = 30\cos\omega t$$

olmaktadır.

(a) $a = 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 4\sqrt{3}$ için sistemin rezonans eğrilerini çiziniz.

(b) $a = 4$ ise rezonans frekansını ve zorlayan kuvvet sistem ile rezonansta iken, kararlı hal titreşiminin genliğini bulunuz.

(c) (b)'deki işi $a = 2$ için yapınız.

5.6 Elektrik Devresi Problemleri

Bu kısımda devrede (1) bir voltaj, (2) dirençler, bobinler ve kondansatörler bulunması halinde diferansiyel denklemlerin uygulamalarını göreceğiz. Okuyucumuzun bu kavramlara biraz aşina olduğunu kabul edip, fazla ayrıntıya girmeyeceğiz. Bir elektromotor kuvvetinin kapalı bir devrede bir akım doğurduğunu ve devrede bulunan direnç, bobin, kondansatör gibi elemanların herbirinin üzerlerinde *voltaj düşmesi*'ne sebep olduklarını söylemekle yetinelim. Çeşitli devre elemanları üzerindeki voltaj düşmelerini veren aşağıdaki formülleri hatırlatalım:

(1) Bir direnç üzerindeki voltaj düşmesi, R *direnç* denilen orantı katsayısı ve i de akım olmak üzere

$$E_R = R\, i \tag{5.75}$$

(2) Bir bobin üzerindeki voltaj düşmesi, L *indüktans* denilen orantı katsayısı ve i de yine akım olmak üzere

$$E_L = L\, \frac{di}{dt} \tag{5.76}$$

(3) Bir kondansatör üzerindeki voltaj düşmesi, c *kapasitans* denilen orantı katsayısı ve q da anî yük olmak üzere

$$E_c = \frac{1}{c} q \tag{5.77}$$

olur. $i = \frac{dq}{dt}$ olduğundan bu voltaj düşmesi $E_c = \frac{1}{c}\int i\ dt$ alınır.

Bu hasapları yaparken kullanacağımız birimleri şöyle sıralayabiliriz:

Büyüklük ve sembolü	**birimi**
elektromotor kuvveti veya voltaj, E	volt (V)
akım, i	amper (A)
yük, q	coulomb
direnç, R	ohm (Ω)
indüktans, L	henry (h)
kapasitans, C	farad

Tablo 5.1

Elektrik devrelerinin incelenmesinde en temel kanun şudur:

Kirchoff voltaj yasası (1. biçim). Kapalı bir devrede, belli bir yönde hesaplanan anî voltaj düşmelerinin cebirsel toplamı sıfırdır.

Direnç, bobin ve kondansatörler üzerindeki voltaj düşmelerinin işareti, elektromotor kuvvetlerinden ileri gelen voltajlarla ters işaretli olduğundan, bu kanunu farklı bir şekilde şöyle de ifade edebiliriz.

Kirchoff voltaj yasası (2. biçim). Kapalı bir devrede, direnç, bobin ve kondansatörler üzerindeki voltaj düşmelerinin toplamı, toplam elektromotor kuvvetine eşittir.

Şimdi Şekil 5.12'deki devreye bakalım.

Şekil 5.12

Burada ve bundan sonra şu semboller kullanılmaktadır:

	Elektromotor kuvveti (pil, jeneratör)
	Direnç
	Bobin
	Kondansatör

Tablo 5.2

Şekil 5.12'deki devreye Kirchoff yasasını uygulayalım. E elektromotor kuvvetini göstersin. (1), (2) ve (3)'te verilen voltaj düşmesi kurallarını kullanırsak hemen,

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{c}q = E \tag{5.78}$$

diferansiyel denklemini elde ederiz. Bu denklemde i, q gibi iki tane bağlı değişken bulunuyor. Ancak bunların

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{5.79}$$

bağıntısı ile birbirlerine bağlı olduğunu hatırlarsak, (5.78) diferansiyel denkleminden

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = E \tag{5.80}$$

diferansiyel denklemini elde ederiz. (5.80) denklemi bir tek q bağlı değişkeni cinsinden ikinci basamaktan lineer bir diferansiyel denklemdir. Öte yandan (5.78) denkleminde iki yanın t'ye göre türevini alıp, (5.79)'u hesaba katacak olursak, q'yu (5.79) denkleminden uzaklaştırıp

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}i = \frac{dE}{dt} \tag{5.81}$$

elde ederiz. Bu da bir tek i bağlı değişkeni cinsinden ikinci basamaktan lineer bir diferansiyel denklemdir.

Böylece q yükü ve i akımı için sırasıyla (5.80) ve (5.81) ikinci basamaktan lineer bir diferansiyel denklemlerini elde ederiz. Ayrıca çok basit iki özel halde problem, bir *birinci* basamak lineer bir diferansiyel denkleme indirgenir. Devrede kondansatör yoksa, (5.78) denklemi hemen

$$L\frac{di}{dt} + ri = E$$

haline gelir. Oysa devrede bobin yoksa (5.80) denklemi

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = E$$

olur.

Örneklere geçmeden önce ilginç ve faydalı bir benzerliğe dikkati çekelim. Yük için yazılan (5.80) diferansiyel denklemi 5.1 kısmında, yayın ucuna bağlı cismin salınımları için yazılan (5.7) denklemiyle, gösterim için kullanılan harfler dışında aynıdırlar. Yani (5.80) denklemiyle tanımlanan elektriksel sistem, 5.1 kısmının (5.7) denklemiyle tanımlanan mekanik sistemin benzeridir. Bu benzerlik aşağıdaki tablodan çıkarılmıştır:

Mekanik sistem	**Elektrik sistem**
kütle m	indüktans L
sönüm katsayısı a	direnç R
yay sabiti k	kapasitansın tersi $\frac{1}{c}$
zorlama kuvveti $F(t)$	uygulanan voltaj veya emf E
yer değiştirme x	yük q
hız $v = \frac{dx}{dt}$	akım $i = \frac{dq}{dt}$

Tablo 5.3

Örnek 5.7. $E = 100 \sin 40t$ elektromotor kuvveti, 10 Ω'luk bir direnç ve 0.5 h büyüklüğünde bir bobin, bir devrede seri olarak yer almışlardır. Başlangıçta akım $i(0) = 0$ olduğuna göre herhangi bir $t > 0$ anındaki akımı bulunuz.

Formülasyon. Devrenin diyagramı Şekil 5.13'te gösterilmiştir. $i(t)$, t anında amper cinsinden akımı göstersin. Toplam elektromotor kuvveti $E = 100 \sin 40t$ olarak verilmiş. (1) ve (2) kanunlarını kullanırsak, voltaj düşmelerinin şöyle olduğunu görürüz:

(1) direnç üzerinden: $E_R = Ri = 10i$.

(2) indüktör üzerinden: $E_L = L\frac{d}{dt}i = \frac{1}{2}\frac{di}{dt}$.

Kirchoff yasasını kullanırsak,

$$\frac{1}{2}\frac{di}{dt} + 10i = 100 \sin 40t \quad \text{veya} \quad \frac{di}{dt} + 20i = 200 \sin 40t \tag{5.82}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Başlangıç şartı ise

$$i(0) = 0 \tag{5.83}$$

olur.

Şekil 5.13

Çözüm. (5.82) denklemi birinci basamaktan lineer bir denklemdir.

$$e^{\int 20\ dt} = e^{20t}$$

bu denklem için bir integrasyon çarpanıdır. (5.82)'yi bununla çarpınca

$$e^{20t}\frac{di}{dt} + 20e^{20t}i = 200e^{20t}\sin 40t \quad \text{veya} \quad \frac{d}{dt}[e^{20t}i] = 200e^{20t}\sin 40t$$

elde edilir. İntegre eder ve sadeleştirirsek,

$$i = 2(\sin 40t - 2\cos 40t) + ce^{-20t}$$

bulunur. (5.83) başlangıç şartı uygulanırsa $c = 4$ bulunur. Böylece çözüm

$$i = 2(\sin 40t - 2\cos 40t) + 4e^{-20t}$$

olur. Trigonometrik terimleri faz açılı hale getirirsek,

$$i = 2\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin 40t - \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 40t\right) + 4e^{-20t}$$

veya

$$\phi = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} = \arcsin\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

olmak üzere

$$i = 2\sqrt{5}\sin(40t + \phi) + 4e^{-20t} \tag{5.84}$$

elde edilir. Yukarıdaki ϕ açısını $\phi = -1.11$ radyan olarak hesaplarız. Böylece devredeki akım yaklaşık olarak

$$i = 4.47 \sin(40t - 1.11) + 4e^{-20t}$$

olur.

Yorum. Çözüm bir sinüsoidal parça ile bir üstel parçadan oluşmaktadır. Üstel parça kısa zamanda hızla küçülüp farkedilmez hale gelir. Bu yüzden *geçici* terimdir. Böylece kısa zaman sonra sinüsoidal parça tüm harekete hakim olur, bu nedenle *kararlı hal akımı*'dır. Bunun periyodu, elektromotor kuvvetinin periyodu ile aynı ve $\frac{\pi}{20}$ olmaktadır. Ancak $\phi = -1.11$ olan *faz açısı*, elektromotor kuvvetinin, kararlı hal akımının yaklaşık olarak $\frac{1.11}{40}$ uzunluk birimi önünden gittiğini göstermektedir. Akımın zamanın bir fonksiyonu olarak grafiği Şekil 5.14'te görülmektedir.

Şekil 5.14

Örnek 5.8. $E = 100 \sin 60t$ elektromotor kuvveti, 2 Ω'luk bir direnç, 0.1 h büyüklüğünde bir bobin ve $\frac{1}{260}$ farad değerinde bir kondansatör bir devrede seri olarak yeralmışlardır (Şekil 5.15'e bakınız). Başlangıçta kondansatör üzerindeki akım ve yük sıfır ise, kondansatör üzerinde herhangi bir $t > 0$ anındaki yükü bulunuz.

Formülasyon (I). *Kirchoff yasasını doğrudan uygulayarak.* $i(t)$, t anında kondansatör üzerindeki amper cinsinden akımı, $q(t)$ de yükü göstersin. Toplam elektromotor kuvveti $E = 100 \sin 60t$ olarak verilmiş. (1), (2) ve (3) voltaj düşme kanunlarını kullanırsak, voltaj düşmelerinin şöyle olduğunu görürüz:

(1) direnç üzerinden: $E_R = Ri = 2i$.
(2) indüktör üzerinden: $E_L = L\frac{d}{dt}i = \frac{1}{10}\frac{di}{dt}$.
(3) kapasitör üzerinden: $E_c = \frac{1}{c}q = 260q$.

Şimdi Kirchoff yasasını kullanırsak,

$$\frac{1}{10}\frac{di}{dt} + 2i + 260q = 100 \sin 60t$$

veya $i = \frac{dq}{dt}$ olduğundan

$$\frac{}{10}\frac{d^2q}{dt^2} + 2\frac{dq}{dt} + 260q = 100 \sin 60t \tag{5.85}$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

Şekil 5.15

Formülasyon (II). *Yük için (5.80) denklemini uygulayarak.* $L = \frac{1}{10}$, $R = 2$, $c = \frac{1}{260}$, $E = 100 \sin 60t$ olarak verilmiş. Bunları (5.80) denkleminde yerlerine yazarsak, (5.85)'i hemen elde ederiz.

(5.85) denkleminin iki yanını 10 ile çarparsak,

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 20\frac{dq}{dt} + 2600q = 1000 \sin 60t \tag{5.86}$$

elde edilir. Başlangıçta q yükü bulunmadığından, ilk başlangıç şartı

$$q(0) = 0 \tag{5.87}$$

olur. Başlangıçta i akımı da sıfır olduğundan, ikinci başlangıç şartı

$$i(0) = q'(0) = 0 \tag{5.88}$$

olur.

Çözüm. (5.86) denklemine karşılık gelen yardımcı denklem $r^2 + 20r + 2600 = 0$ olur ki kökleri $-10 \mp 50i$ olup (5.86)'nın tümleyen fonksiyonu

$$q_c = e^{-10t}(c_1 \sin 50t + c_2 \cos 50t)$$

olur. (5.86)'nın bir özel integralini bulmak için belirsiz katsayılar yöntemini uygulayıp

$$q_p = A \sin 60t + B \cos 60t$$

yazalım. Bunu iki kere türetip (5.86)'da yerlerine yazarsak

$$A = -\frac{25}{61} \quad \text{ve} \quad B = -\frac{30}{61}$$

elde edilir. Böylece (5.86)'nın genel çözümü

$$q = e^{-10t}(c_1 \sin 50t + c_2 \cos 50t) - \frac{25}{61}\sin 60t - \frac{30}{61}\cos 60t \tag{5.89}$$

bulunur. Bunun türevini alırsak,

$$\frac{dq}{dt} = e^{-10t}[(-10c_1 - 50c_2)\sin 50t + (50c_1 - 10c_2)\cos 50t] -$$
$$\frac{1500}{61}\sin 60t + \frac{1800}{61}\cos 60t \tag{5.90}$$

elde ederiz. (5.87) başlangıç şartını (5.89) denklemine (5.88) başlangıç şartını da (5.90) denklemine uygularsak

$$c_2 - \frac{30}{61} = 0 \quad \text{ve} \quad 50c_1 - 10c_2 - \frac{1500}{61} = 0$$

elde edilir ki buradan $c_1 = \frac{36}{61}$ ve $c_2 = \frac{30}{61}$ bulunur.

Şekil 5.16

Böylece problemin çözümü

$$q = \frac{6}{61}e^{-10t}(6\sin 50t + 5\cos 50t) - \frac{5}{61}(5\sin 60t + 6\cos 60t)$$

veya trigonometrik terimleri faz açılı hale getirirsek,

$$\cos\phi = \sin\theta = \frac{5}{61}, \quad \text{ve} \quad \sin\phi = \cos\theta = \frac{6}{61}$$

olmak üzere

$$q = \frac{6}{\sqrt{61}}e^{-10t}\cos(50t - \phi) - \frac{5}{\sqrt{61}}\cos(60t - \theta)$$

elde edilir. Yukarıdaki ϕ açısını $\phi = 0.88$ radyan olarak hesaplarız. θ ise $\theta = \frac{\pi}{2} - \phi = 0.69$ olur. Böylece kondansatör üzerinde, herhangi bir $t > 0$ anındaki yük yaklaşık olarak

$$q = 0.77e^{-10t}\cos(50t - 0.88) - 0.64\cos(60t - 0.69$$

olacaktır.

Yorum. Yukarıdaki çözümün birinci parçasının kısa zamanda hızla küçülüp farkedilmez hale geleceği açıkça görülmektedir, bu *geçici terim*'dir. Kısa zaman sonra periyodik olan ikinci parça tüm harekete hakim olur, bu nedenle *kararlı hal terim*'dir. Parçaların ayrı ayrı grafikleri ve problemin çözümünün tamamı olan toplamları Şekil 5.16'da görülmektedir.

ALIŞTIRMALAR

1. 40 V'luk sabit elektromotor kuvveti, 10 Ω'luk bir direnç, 0.2 h büyüklüğünde bir bobin bir devrede seri olarak yeralmışlardır. Başlangıçta akım sıfır ise, herhangi bir $t > 0$ anındaki akımı bulunuz.

2. 1. problemi 40 V'luk sabit elektromotor kuvveti yerine, $E(t) = 150\cos 200t$ alternatif elektromotor kuvveti olması halinde çözünüz.

3. 100 V'luk sabit elektromotor kuvveti, 10 Ω'luk bir direnç ve 2.10^{-4} farad kapasiteli bir kondansatör bir devrede seri olarak yer almışlardır. Başlangıçta devre açık ve kondansatör üzerindeki yük sıfır ise, herhangi bir $t > 0$ anındaki yükü bulunuz.

4. $E(t) = 5\sin 100t$ alternatif elektromotor kuvveti, 10 Ω'luk bir direnç ve 2.10^{-4} farad kapasiteli bir kondansatör 0.05 h büyüklüğünde bir bobin bir devrede seri olarak yeralmışlardır. Başlangıçta akım ve kondansatör üzerindeki yük sıfır ise, herhangi bir $t > 0$ anındaki yükü bulunuz.

5. $E(t) = 100\sin 200t$ alternatif elektromotor kuvveti, 40 Ω'luk bir direnç ve 4.10^{-4} farad kapasiteli bir kondansatör 0.25 h büyüklüğünde bir bobin bir devrede seri olarak yeralmışlardır. Başlangıçta akım sıfır ve kondansatör üzerindeki yük 0.01 coulomb ise, herhangi bir $t > 0$ anındaki akımı bulunuz.

6. $E(t) = 200e^{-100t}$ elektromotor kuvveti, 80 Ω'luk bir direnç, 5.10^{-6} farad kapasiteli bir kondansatör ve 0.2 h büyüklüğünde bir bobin bir devrede seri olarak yeralmışlardır. Başlangıçta akım ve kondansatör üzerindeki yük sıfır ise, herhangi bir $t > 0$ anındaki akımı bulunuz.

7. Bir devrede R Ω'luk bir direnç, C farad kapasiteli bir kondansatör ve h henrilik bir bobin seri olarak yer almışlardır. Başlangıçta akım sıfır ve kondansatör üzerindeki yük Q_0 coulomb ise,

(a) Yükün ve akımın salınımlı fonksiyonlar olması için gerek ve yeter şartın $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ olduğunu ispat ediniz ve bu durumda herhangi bir $t > 0$ anındaki akım ve yük ifadelerini bulunuz.

(b) $R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ olduğunda akım ve yükün, zamanın bir fonksiyonu olarak tabiatlarını araştırınız.

8. Bir devrede $E(t) = E_0 \sin\omega t$ elektromotor kuvveti, R Ω'luk bir direnç, C farad kapasiteli bir kondansatör ve h henrylik bir bobin seri olarak yer almışlardır. Başlangıçta akım sıfır ve kondansatör üzerindeki yük Q_0 coulomb ise,

(a) Kararlı hal akımının

$$X = L\omega - \frac{1}{C\omega}, \quad Z = \sqrt{X^2 + R^2}$$

olmak üzere

$$i = \frac{E_0}{Z}\left(\frac{R}{Z}\sin\omega t - \frac{X}{Z}\cos\omega t\right)$$

olacağını ispat ediniz. Buradaki X'e *reaktans* ve Z'ye de *empedans* denir.

(b) (a)'daki sonucu kullanarak, kararlı hal akımının

$$i = \frac{E_0}{Z}\sin(\omega t - \phi), \quad \cos\phi = \frac{R}{Z}, \quad \sin\phi = \frac{X}{Z}$$

ile verilebileceğini gösteriniz. Akım ve yükün, zamanın bir fonksiyonu olarak tabiatlarını araştırınız.

Bu yolla, kararlı hal akımının

$$t_n = \frac{1}{\omega}\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right], \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

olmak uzere $t_n + \frac{\phi}{\omega}$ anlarında, $\frac{E_0}{Z}$ maksimum değerini alacağını, bu anlarda elektromotor kuvvetinin de E_0 maksimum değerlerini almakta olduğunu ispat ediniz.

(c) Kararlı hal akımının genliğinin $\omega = 1/\sqrt{LC}$ için maksimum olacağını gösteriniz. ω'nın bu değeri için *elektriksel rezonans*'ın ortaya çıkacağı söylenir.

(d) $R = 20,\ L = .25,\ C = 10^{-4},\ E_0 = 100$ ise, elektrik rezonansı sağlayacak ω değerini hesaplayınız ve bu durumda kararlı hal akımının genliğini bulunuz.

EK ALIŞTIRMALAR

Aşağıda 1-4. problemlerdeki kütle-yay sistemlerinin herbiri için y yerdeğiştirmesini t zamanının bir fonksiyonu olarak bulunuz.

1. w=40 kg, k=20 kg/m, $y_0 = 2$m, $v_0 = -8$m/sn
2. w=15 kg, k=3 kg/m, $y_0 = -1$m, $v_0 = 7$cm/sn
3. w=45 kg, k=9 kg/m, $y_0 = 0$m, $v_0 = 28$cm/sn
4. w=96 kg, k=16 kg/m, $y_0 = 10$m, $v_0 = 0$m/sn

5. $t = 0$ anında w ağırlığı ani olarak modülü k olan asılı bir yayın ucuna iliştiriliyor. Sürtünmenin ihmal edilebilir düzeyde olduğunu varsayarak cismin bundan sonraki yerdeğiştirmesini t zamanının bir fonksiyonu olarak bulunuz.

6. (a) w ağırlığı modülü k olan bir yayın ucuna asılıdır. Sürtünmenin ihmal edilebilir düzeyde olduğunu varsayarak cismin bundan sonraki yerdeğiştirmesini temsil eden diferansiyel denklemi enerjinin korunumunu kullanarak bulunuz.

(b) (a) halinde w=16 kg, k=6 kg/m, $y_0 = 2$cm, $v_0 = 0$m/sn alarak cismin bundan sonraki yerdeğiştirmesini tasvir eden denklemi bulunuz.
(c) (b) deki problemi $y_0 = 0$cm, $v_0 = 3$cm/sn alarak çözünüz.
(d) (b) deki problemi $y_0 = 4$cm, $v_0 = 8$cm/sn alarak çözünüz.

7. $w\ kg/m^3$ yoğunluklu malzemeden yapılmış r yarıçaplı h kalınlıklı bir dairesel silindir, su içerisinde ekseni daima düşey kalacak şekilde yüzmektedir. Yerçekimi ve suyun kaldırma kuvveti dışındaki kuvvetleri ihmal ederek, denge konumundan biraz ayrılarak salınmaya bırakılan bu silindirin hareketinin periyodunu bulunuz.

8. 50 kg ağırlığında bir şamandra, su içerisinde ekseni daima düşey kalacak şekilde yüzmektedir. Denge konumundan biraz ayrılarak salınmaya bırakılan bu silindirin hareketinin periyodu 2 sn'dir. Bütün sürtünme kuvvetlerini ihmal ederek silindirin yarıçapını hesaplayınız.

9. Düz ve içi boş bir tüp, orta noktasında kendisine dik olan bir düşey eksen etrafında ω sabit açısal hızı ile dönmektedir. m kütleli bir boncuk tüpün içinde sürtünmesiz olarak kayabilmektedir. Tüpün ortasından a kadar uzakta bir yerden harekete başladığını varsayarak bu boncuğun radyal hareketini tüpten çıkıncaya kadar temsil eden denklemi bulunuz.

10. Düz ve içi boş bir tüp, orta noktasında kendisine dik olan bir düşey eksen etrafında ω sabit açısal hızı ile dönmektedir. m kütleli bir boncuk tüpün içinde sürtünmesiz olarak kayabilmektedir. Tüpün uygun bir noktasından harekete başlatılmakla boncuğun tüpten çıkmadan orta nokta etrafında bir harmonik hareket yapmasının mümkün olduğunu gösteriniz.

11. Eş kesitli ince bir sütun, tabanından yere sıkıca bağlanmıştır. Serbest olan üst ucu düşey bir çizgi üzerinde aşağı yukarı serbestçe hareket edebilen bu sütun, üzerinde F yükünü taşımaktadır. Sütunun muhtemel şekil değiştirme eğrilerini ve herbiri için gerekli F kuvvetlerini bulunuz. *Hatırlatma:* 4. örnekten farklı olarak burada koordinat

başlangıcını sütunun serbest ucunda alınız. O zaman $y(0) = 0, y'(L) = 0$ sınır koşullarınız olacaktır.

12. Kendi ağırlığının etkisini ihmal ederek, bir ucundan duvara gömülü yatay kirişin bir x_1 noktasındaki birim yükten dolayı başka bir x_0 noktasındaki eğilmesinin, x_0 noktasındaki birim yükten dolayı x_1 noktasındaki eğilmesine eşit olacağını gösteriniz. *Hatırlatma:* Kirişin serbest ucu ile birim yükün uygulandığı x_1 noktası arasında moment özdeş olarak sıfırdır. Ancak sabit uç ile x_1 arası için durum böyle değildir. Bu yüzden şekil değiştirme eğrisinin bulunabilmesi için iki tane diferansiyel denklemin çözülmesi gerekir.

13. Bir ucundan bağlı yatay bir kirişin serbest ucuna kirişin ilk doğrultusu ile θ açısı yapan bir F kuvveti uygulanıyor. Kirişin ucunun eğilmesini θ'nın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

14. Bir ucundan bağlı yatay bir kiriş; kesit yarıçapı, x kirişin serbest ucundan uzaklık olmak üzere $\sqrt{x}$ ile değişen bir dönel cisimdir. Serbest uca kirişin ilk doğrultusu ile 45° açı yapan bir F kuvveti uygulanıyor. Kirişin ucunun eğilmesini bulunuz.

15. Bir ucundan bağlı yatay, eş kesitli, L uzunluğunda bir kirişin serbest ucuna P tekil yükü konuluyor. Serbest uca Şekil 5.17'deki gibi bir de F kuvveti uygulanıyor. Kirişin eğilme eğrisini ve serbest ucunun sabit uca göre eğilmesini bulunuz.

Şekil 5.17

16. L uzunluklu düzgün bir şaft ω sabit açısal hızı ile dönmektedir. İki ucu, doğal şeklinden çıktığı zaman Şekil 5.18'deki gibi serbest yataklarda hareket edebilmektedir. Şaftın şeklini değiştirmiş olarak dönebileceği sonsuz çoklukta kritik hız olduğunu gösteriniz. Bu hızları ve ilgili şekil değiştirme eğrilerini bulunuz.

Şekil 5.18

Hatırlatma: Dönmesi nedeniyle şafta, ilk konumunun birim uzunluğu başına radyal doğrultuda

$$w(x) = -\frac{\rho A \omega^2}{g} y$$

gibi bir yük etkir. Burada A kirişin kesit alanı ρ şaftın yapıldığı malzemenin yoğunluğudur. Bunu

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -w(x)$$

denkleminde yerine koyarak çözünüz. Sonra her iki uçta momentlerin sıfır olduğu sınır koşullarını kullanınız. Tam çözümde üsteller yerine hiperbolik fonksiyonları kullanmak kolaylık sağlayacaktır.

17. 16. problemi yatakların doğrusallıktan çıkamayacak şekilde sabit olması halinde çözünüz.

Şekil 5.19

18. Yayın ucunun ve W ağırlığının tamamen düşey olarak hareket ettiklerini kabul etmemize imkan verecek küçük yerdeğiştirmeler varsayımı altında ve sürtünmeleri ihmal ederek Şekil 5.19'daki sistemin doğal

frekanslarını hesaplayınız. çubuk, eş kesitli, mutlak ricid ve w ağırlığındadır. *Hatırlatma:* l uzunluklu, m kütleli çubuğun orta noktasına göre eylemsizlik momentinin $ml^2/12$ olduğunu gözönüne alın ve diferansiyel denklemi elde etmek için enerji öntemini kullanın.

19. Küçük yerdeğiştirmeler varsayımı altında ve sürtünmeleri ihmal ederek Şekil 5.20'deki sistemin doğal frekanslarını hesaplayınız. çubuk, eş kesitli, mutlak ricid ve w ağırlığındadır.

20. Bir W ağırlığı R yarıçaplı, eylemsizlik momenti I olan bir makaraya bağlı uzamaz bir iple asılmıştır. Yay sabiti k olan bir yay, makaranın serbestçe dönmesini Şekil 5.21'deki gibi engellemektedir. Yer değiştirmelerin yayın yataylığındaki değişmeyi ihmal edebileceğimiz kadar küçük olduğunu varsayarak ve sürtünmeyi de ihmal ederek, sistemin denge konumundan hafifçe uzaklaştırılması sonucu doğacak salınımların doğal frekansını bulunuz.

Şekil 5.20 **Şekil 5.21**

21. Enerji yöntemi kullanarak Şekil 5.22'deki sistemin doğal frekansını bulunuz. *Hatırlatma:* Makaraların kinetik enerjileri W ve dy/dt cinsinden hesaplanabildiğinden, makaraların R yarıçaplarının ayrıca verilmesi gerekmez.

Şekil 5.22

22. Şekil 5.23'deki sistemin doğal frekansını bulunuz.

Şekil 5.23

23. L metre uzunluğunda w ağırlığında tamamen esnek bir kablo, sürtünmesiz bir masa yüzeyinde düz durmaktadır. Bu kablonun a santimlik bir parçası masadan aşağı sarkmaktadır. $t = 0$'da kablo serbest bırakılmış ve masadan aşağı kaymaktadır. Masanın yüksekliğinin L'den fazla olduğunu varsayarak kablonun masanın üstünden ayrılıncaya kadar olan hareketini belirleyiniz.

24. Şekil 5.24 boyca yoğunluğu w g/cm, uzunluğu $2L$, tamamen esnek ve duvardaki yarıçapı ihmal edilebilir bir kazığa asılmış bir kablo ile birbirlerine bağlanmış W_1, W_2 ağırlıklarını gösteriyor. $t = 0$ da W_1, W_2'nin a kadar üstünde durmaktadır.

(a) Sistemin hareketini temsil eden diferansiyel denklemi yazınız.

(b) Diferansiyel denklemin bir tam çözümünü bulunuz ve $y(0) = y'(0) = 0$ başlangıç koşullarını kullanınız.

(c) Eğer varsa, hangi koşullar altında sistemin hareketsiz kalacağını bulunuz.

(d) $aw + W_2 - W_1$ değerinin pozitif ve negatif olması hallerinde sistemin hareketini tartışınız.

25. Boyca yoğunluğu w g/cm, uzunluğu L olan elastik bir kablo, Şekil 5.25'deki gibi bir makaradan geçirilmiştir. Makaranın yarıçapı R ve eylemsizlik momenti I'dır. Makara sürtünmesiz olarak dönebildiği halde ip ile makara arasındaki sürtünme bunların birbiri üzerinde kaymalarını önlemektedir. $t = 0$ anında kablonun bir ucu diğerinden a kadar yüksekte iken sitem sükunetten harekete geçiriliyor. Kablonun hareketini kısa ucu makaraya değinceye kadar belirleyiniz.

Şekil 5.24 **Şekil 5.25**

26. Sürtünmeleri ihmal ederek ve θ açısal yerdeğiştirmesinin $\sin\theta$ yerine θ, $1-\cos\theta$ yerine $\theta/2$ alınmasına imkan verecek kadar küçük olduğunu varsayarak Şekil 5.26'daki sistemin doğal frekansını bulunuz. çubuk eş kesitli, mutlak ricid ve w ağırlığındadır.

Şekil 5.26 **Şekil 5.27**

27. Sürtünmeleri ihmal ederek ve θ açısal yerdeğiştirmesinin $\sin\theta$ yerine θ, $1-\cos\theta$ yerine $\theta/2$ alınmasına imkan verecek kadar küçük olduğunu varsayarak Şekil 5.27'deki sistemin doğal frekansını bulunuz. çubuk eş kesitli, mutlak ricid ve w ağırlığındadır. Bu sistem hangi bakımdan 26. problemdeki sistemden ayrılır?

28. (a) Herbirinin eylemsizlik momenti I olan iki disk, modülü k olan yani bir ucunu öteki ucuna göre 1 radyan burmak için k birim tork gerektiren elastik bir şaft ile birleştirilmiştir. Sistem sürtünmesiz bir yatağa Şekil 5.28'deki gibi monte edilmiştir. Şaftın eylemsizlik momentini ihmal ederek, eşit miktarlarda fakat ters yönlerde burularak bırakılan disklerin titreşimlerinin doğal frekansını bulunuz.

(b) Disklerin eylemsizlik momentleri sırasıyla I_1 ve I_2 olsaydı sistemin doğal frekansını ne olurdu? *Yol gösterme:* sistemde sadece toplam enerji değil, toplam açısal momentum da sabit kalır.

Şekil 5.28

29. l uzunluğunda uzamaz, kütlesi ihmal edilebilir bir sicimle, ucuna bağlanmış bir m kütlesinden oluşan bir sarkaç $\pm\alpha$ maksimum açısal yerdeğiştirmeleri arasında salınmaktadır. θ sarkaç ipinin t anında düşeyle yaptığı açıyı gösteriyorsa:

$$(\theta')^2 = 2\frac{g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha)$$

olduğunu göstermek için enerji yöntemini kullanınız. $\sin\theta \approx \theta$ alınmasına imkan veren küçük genliklerle salınım halinde sarkacın priyodunu bulunuz.

30. (a) 29. problemdeki diferansiyel denklemde $cosu = 1 - 2\sin^2 \frac{u}{2}$ yarım açı formülünü kullanarak

$$(\theta')^2 = 4\frac{g}{l}\left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

ifadesini elde ettikten sonra $t = 0$ da $\theta = 0$ olduğunu varsayarak bu eşitliği integre ediniz.

(b) (a) şıkkında elde ettiğiniz integralde

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\phi}{2}$$

dönüsümü yaparak

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, \quad k^2 = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

olduğunu gösteriniz. Bu integrale genellikle **birinci çeşitten eliptik integral** denir ve $F(\phi, k)$ ile gösterilir. Bu fonksiyonun değeri birçok kitapta tablolar halinde verilmiştir.

31. 29. ve 30. problemin sonuçları ile birlikte $F(\phi, k)$ tablolarını kullanarak iki yana doğru 90° salınan bir sarkacın gerçek periyodunu, $\sin \theta \approx \theta$ alınması ile elde edilen periyod ile karşılaştırınız.

Green Fonksiyonları

Sise kaynaklar arasında verilen kitaplardan birinden, mesela C. Ray Wylie- Louis C. Barrett'ten Green fonksiyonları bahsini inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. l uzunluğundaki bir sicim için Green fonksiyonunu sabitlerin değişimi yöntemi ile oluşturunuz.

2. $x = l/4$ ve $x = l/2$ noktalarında P tekil kuvvetleri taşıyan l uzunluğundaki telin şekil değiştirme eğrisini bulunuz.

3. $x = l/4$ noktasında P, $x = l/2$ noktasında $-2P$, $x = 3l/4$ noktasında $3P$ tekil kuvvetleri taşıyan l uzunluğundaki telin şekil değiştirme eğrisini bulunuz.

4. birim uzunluk başına $w(x) = -x$ yükü taşıyan l uzunluğundaki telin şekil değiştirme eğrisini, önce ilgili diferansiyel denklemi çözerek, sonra da telin Green fonksiyonu yardımıyla bulunuz.

5. 4. problemi, birim uzunluk başına yük

$$w(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < l/2 \\ -1, & l/2 < x \leq l \end{cases}$$

olduğu halde çözünüz.

6. birim uzunluk başına $w(x) = -x$ yükü ve $x = l/4$ noktasında P tekil kuvveti taşıyan l uzunluğundaki telin şekil değiştirme eğrisini bulunuz.

7. $y'' + 2y' + 2y = 0$ denklemi ve $y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 0$ sınır koşulları için Green fonksiyonunu bulunuz. Bu Green fonksiyonu simetrik midir? Diferansiyel denklem $e^{2x}y''+2e^{2x}y'+2e^{2x}y = 0$ olsaydı Green fonksiyonu ne olurdu? Bu Green fonksiyonu simetrik midir?

8. (a) her normal

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

diferansiyel denkleminin

$$[r(x)y']' + p(x)y = 0$$

şeklinde bir denkleme denk olduğunu gösteriniz. *Hatırlatma:* verilen denklemi $[1/a_0(x)]e^{\int [a_1(x)/a_0(x)]dx}$ ile çarpınız.

(b) $[r(x)y']' + p(x)y = 0$ diferansiyel denklemi ile α_1, α_2'nin birlikte sıfır olmaması ve β_1, β_2nin birlikte sıfır olmaması koşuluyla

$$\alpha_1 y(a) = \alpha_2 y'(a)$$

$$\beta_1 y(b) = \beta_2 y'(b)$$

sınır koşullarına ait Green fonksiyonunun simetrik olduğunu gösteriniz. *Hatırlatma:* ikinci basamaktan denklemin iki çözümü için hesaplanan Wronskianı hakkındaki Abel formülünü hatırlayınız.

9. $y'' - k^2 y = 0, \quad k \neq 0$ denklemi ve $y(0) = 0, y(1) = 0$ sınır koşulları için Green fonksiyonunu

(a) Tanımı kullanarak (b) Formülü kullanarak bulunuz.

Aşağıda 10-14'deki sınır değer problemleri için Green fonksiyonlarını bulunuz.

10. $y'' + y' = 0, \quad y(0) = 0, y'(\pi) = 0$

11. $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, y'(\pi) = 0$

12. $y'' = 0, \quad y(0) = 0, y(1) = 0$

13. $y'' = 0, \quad y(0) = 0, y'(l) = 0$

14. $y'' + k^2 y = 0, \quad k \neq 0, y(0) = y(1), y'(0) = y'(1)$

15. $y'' + k^2 y = 0, \quad k \neq 0$ denklemi ve aşağıdaki sınır koşulları için Green fonksiyonlarını bulunuz:
(a) $y(0) = y'(b) = 0$ (b) $y(b) = y'(0) = 0$
(c) $y'(a) = y'(b) = 0$ (d) $y(a) = y'(a), y(b) = 0$

16. $y'' - k^2 y = 0, \quad k \neq 0$ denklemi ve 15. problemin (a), (b), (c) ve (d) sınır koşulları için Green fonksiyonlarını bulunuz.

17. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ denklemi ve $y(0) = 0, y(1) = 0$ sınır koşulları için Green fonksiyonunu bulunuz. Bu sınır değer probleminin niçin sonsuz çoklukta Green fonksiyonu vardır? *Hatırlatma:* Diferansiyel denklem nerede normaldir?

18. l uzunluğunda düzgün bir şafta T torku uygulanınca, şaftta meydana gelen θ burulma açısı ; E_s şaftın yapıldığı malzemenin kesmeye karşı elastiklik modülü, J şaftın kesit alanının, bu kesitin ağırlık merkezine göre kutupsal eylemsizlik momenti olmak üzere $\theta = Tl/E_s J$ formülü ile verilir. Bu formülü kullanarak sol ucundan bağlanmış, sağ ucunda serbest şaftın s noktasına uygulanan birim torkun, x noktasında meydana getireceği burulma açısını verecek etki fonksiyonunu bulunuz.

19. (a) Sonsuz küçük uzunlukta bir şaftın uçlarına uygulanan bir torkun burulma açısının limitini gözönüne alarak, burulmuş bir şaftın

herhangi bir kesitinden iletilen torkun:

$$T = E_s J \frac{d\theta}{dx}$$

formülüyle verilebileceğini gösteriniz.

(b) (a)'daki sonucu kullanarak, birim uzunluk başına $t(x)$ gibi bir torkun düzgün bir şaftta meydana getireceği burulmanın

$$E_s J \theta'' = -t(x)$$

denklemini sağlayacağını gösteriniz.

20. 19. problemin (b) kısmındaki sonucu kullanarak iki ucu da bağlandığı için burulamayan l uzunluğunda düzgün şaftın Green fonksiyonunu bulunuz.

21. 18. problemin sonucunu kullanarak sol ucu bağlı sağ ucu serbest l uzunluklu düzgün şaftın serbest burulma titreşimlerinin $\phi(x)$ maksimum şekil değiştirme fonksiyonunun sağladığı integral denklemi bulunuz.

22. 20. problemin sonucunu kullanarak iki ucu bağlı l uzunluklu düzgün şaftın serbest burulma titreşimlerinin $\phi(x)$ maksimum şekil değiştirme fonksiyonunun sağladığı integral denklemi bulunuz.

23. Düzgün yatay bir kirişin s noktasına uygulanan birim yükten dolayı x noktasında meydana gelecek şekil değiştirmeyi veren etki fonksiyonunu bulunuz. Bu $g(x,s)$ etki fonksiyonunun şu özellikleri bulunduğunu gösteriniz. Üsler x'e göre türevleri gösteriyor.

(a) $g(x,s)$ $\quad 0 \leq x < s, s < x \leq l$ için $EIy^{iv} = 0$ denklemini sağlar.

(b) $g(x,s)$ kirişin uç koşullarını sağlar:

$$g(0,s) = g'(0,s) = g''(l,s) = g'''(l,s) = 0$$

(c) $0 \leq xlel$ için $g(x,s), g'(x,s)\text{ve}g''(x,s)$ süreklidir.

(d) $x = s$ için $g'''(x,s)$ in $-1/EI$ ya eşit bir sıçraması vardır.

$g(x,s)$, x ve s'nin simetrik bir fonksiyonu mudur?

24. 23. problemin etki fonksiyonunu kullanarak düzgün yatay bir kirişin $x = l/2$ ve $x = l$ noktalarına uygulanan P yüklerinden dolayı x noktasında meydana gelecek şekil değiştirmeyi bulunuz.

25. l uzunluklu düzgün yatay bir kirişte birim uzunluk başına $w(x) = x$ yayılı yükünden dolayı meydana gelecek şekil değiştirmeyi $EIy^{iv} = -w(x)$ denkleminden ve 23. problemdeki etki fonksiyonundan yararlanarak bulunuz.

26. l uzunluklu düzgün yatay bir kirişin kesit alanı sabittir ama sabit ucundan x kadar uzakta birim uzunluk başına yoğunluğu $\rho(x) = 2l - x$ ile verilmektedir. Kirişin uç şekil değiştirmesini 23. problemdeki Green fonksiyonundan yararlanarak bulunuz.

27. Baş katsayısı a_0 olan dördüncü basamaktan bir diferansiyel denklemin Green fonksiyonunu tanımlarken, 23. problemin akla getirdiği aşağıdaki özellikleri gözönüne alarak, $EIy^{iv} - y = 0$ denkleminin $y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0$ koşulu ile birlikte Green fonksiyonunu bulunuz.

(a) $g(x, s)$, $x = s$ dışında $EIy^{iv} - y = 0$ denklemini sağlar.

(b) $g(x, s)$ denkleme eşlik eden sınır koşullarını sağlar.

(c) $g(x, s), g'(x, s)$ ve $g''(x, s)$ fonksiyonları, problemin serbest değişkeninin değişim aralığında süreklidir.

(d) $x = s$ için $g'''(x, s)$ in $-1/a_0$ a eşit bir sıçraması vardır.

27. problemde konan koşulları kullanarak aşağıdaki sınır değer problemlerinin Green fonksiyonlarını bulunuz.

28. $EIy^{iv} = 0 \quad y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0$ (basit destekli kiriş)

29. $EIy^{iv} = 0 \quad y(0) = y'(0) = y(l) = y'(l) = 0$ (gömüü uçlu kiriş)

30. $EIy^{iv} = 0 \quad y(0) = y'(0) = y(l) = y''(l) = 0$ (bir ucu gömülü, bir ucu basit destekli kiriş)

OKUNMASI TAVSİYE EDİLEN KİTAPLAR

Agnew (1) Spiegel (50) Kaplan (30) Wylie (57) Rainville (17)

Bölüm 6

Serilerle Çözüm

4. Bölümde, mesela sabit karsayılı denklemler gibi bazı yüksek basamaktan denklemlerin, bilinen elemanter fonksiyonların sonlu bir bileşimi olarak ifade edilebilen çözümlere sahip olduklarını gördük. Oysa, iki ya da daha yüksek basamaktan diferansiyel denklemlerin bilinen fonksiyonlar cinsinden çözümleri genellikle yoktur. Bu yüzden böyle denklemlerin çözümlerini ifade etmek için başka gereçler bulmalıyız. Bu gereçlerden birini, sonsuz seri temsilleri temin eder ve bu bölüm, seri şeklindeki çözümlerin bulunmasına tahsis edilmiştir.

6.1 Adî Nokta Civarinda Seri Çözüm

A. Temel Kavramlar ve Souçlar

İkinci basamaktan

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0 \tag{6.1}$$

lineer diferansiyel denklemini gözönüne alalım ve bu denklemin bilinen fonksiyonların sonlu lineer bileşimi olarak yazılabilen hiçbir çözümü olmadığını kabul edelim. Fakat sonsuz seri şeklinde yazılabilen çözümleri bulunsun. Daha açık olarak $c_0, c_1, \ldots$'lar sabitler olmak üzere

$$c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \tag{6.2}$$

şeklinde yazılabilen bir çözümün var oluğunu kabul edelim. (6.2)'deki ifadeye, $x - x_0$ cinsinden bir *kuvvet serisi* denir. Bölece (6.1) diferansiyel denkleminin (6,2) şeklinde ifade edilebilen bir *kuvvet serisi çözüm*'e sahip olduğunu varsayıyoruz. Varsayımın geçerli olması halinde, (6.2)'deki seri (6.1) denkleminin gerçekten çözümü olacak şekilde (6.2)'deki $c_0, c_1, \ldots$ katsayılarını hesaplamaya başlayabiliriz.

Ancak acaba bu varsayım hangi şartlar altında geçerlidir? Yani (6.1) denklemi hangi şartlar altında (6.2)'deki gibi bir çözüme *sahip olur?* Bu çok önemli bir sorudur. Çünkü bu şekilde bir çözüm mevcut değilse, onu bulmağa çalışmak çok abes olacaktır. (6.2) şeklinde bir çözümün varlığı hakkındaki bu önemli soruyu cevaplamağa başlamadan önce bazı temel kavramlar tanıtalım. Bu amaçla (6.1) denklemini

$$P_1(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)} \quad \text{ve} \quad P_2(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}$$

olmak üzere, yukarıdakine eşdeğer

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = 0 \tag{6.3}$$

biçiminde yazalım.

TANIM. Bir fonksiyonun, bir x_0 noktası civarındaki

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Taylor serisi, mevcut ve x_0'ı içine alan bir açık aralıktaki her x için $f(x)$'e yakınsaksa, f fonksiyonuna x_0'da *analitik*'tir denir.

Buradan polinom şeklindeki bütün fonksiyonların her yerde analitik olacaklarını, değerleri e^x, $\sin x$, $\cos x$ olan fonksiyonların da aynı özelliği paylaşacağını anlıyoruz. Rasyonel fonksiyonlar paydalarının sıfır olduğu x değerleri dışında analitiktir. Mesela $\frac{1}{x^2-3x+2}$ ile tanımlı rasyonel fonksiyon, $x = 1$ ve $x = 2$ dışında analitiktir.

TANIM. (6.3) normalize edilmiş eşdeğer formdaki $P_1(x)$, $P_2(x)$ fonksiyonlarının ikisi birden x_0 noktasında analitik ise, x_0'a (6.1) denkleminin bir *alelade nokta*'sı denir. Bu iki fonksiyondan en az biri x_0'da analitik *değil* ise, bu noktaya (6.1)'in bir *tekil nokta*'sı denir.

Örnek 6.1.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2+2)y = 0 \tag{6.4}$$

diferansiyel denkleminde $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x^2+2$'dir. Bu iki fonksiyon da polinom olduğundan, her yerde analitiktirler. Böylece her nokta bu denklemin alelade noktasıdır.

Örnek 6.2.

$$(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 0 \tag{6.5}$$

diferansiyel denklemi (6.3)'deki gibi normalleştirilmiş değildir. Önce onu normalleştirerek

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x}{x-1}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x(x-1)}y = 0$$

elde ederiz. Bu denklemde $P_1(x) = \frac{x}{x-1}$, $P_2(x) = \frac{1}{x(x-1)}$'dir. Bu iki fonksiyon da P_1 fonksiyonu $x = 1$ dışında, P_2 fonksiyonu da $x = 0,\ 1$ dışında her yerde analitiktir. Böylece $x = 0$ ve $x = 1$ noktaları verilen diferansiyel denklemin tekil noktaları ve bunların dışındaki her nokta da alelade noktası olur. P_1 fonksiyonu $x = 0$ noktasında analitik olduğu halde bu noktanın denklem için bir tekil nokta oluşuna dikkat ediniz.

Artık şimdi (6.2) yapısında kuvvet serisi çözümlerinin ne zaman var olacaklarını söyleyen teoremi verebilecek duruma geldik.

TEOREM 6.1.

Hipotez. x_0 denklemin bir alelade noktasıdır.

Hüküm. (6.1) diferansiyel denkleminin

$$c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \tag{6.2}$$

yapısında iki tane sıfırdan farklı, lineer bağımsız kuvvet serisi çözümü vardır ve bu kuvvet serileri x_0 civarındaki bir $|x-x_0| < R, \quad R > 0$ aralığındaki her x için yakınsarlar.

Bu teorem (6.1) denkleminin kuvvet serisi şeklinde bir çözüme sahip olması için yeter şartı vermektedir. Bu teoreme göre x_0 diferansiyel denklemin bir alelade noktası ise bu denklem, $x - x_0$'ın kuvvetleri cinsinden *iki tane* seri çözüme sahiptir ve bu kuvvet serisi çözümler *lineer bağımsız*'dır. Böylece, x_0 noktası diferansiyel denklemin bir alelade noktası ise bu denklemin *genel çözüm*'ü, bu iki kuvvet serisinin lineer bileşimi olarak yazılabilir. Bu önemli teoremin ispatı bu kitabın çerçevesi dışında kalıyor.

Örnek 6.3. Örnek 6.1'de bütün noktaların

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2+2)y = 0 \tag{6.4}$$

diferansiyel denkleminin alelade noktası olduğunu görmüştük. Buna göre (6.4) diferansiyel denkleminin her x_0 civarında

$$c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \tag{6.2}$$

yapısında iki tane sıfırdan farklı, lineer bağımsız kuvvet serisi çözümü vardır.

Örnek 6.4. Örnek 6.2'de $x = 0,\ 1$ noktalarının (6.5) diferansiyel denkleminin yegane tekil noktaları olduğunu görmüştük. Buna göre (6.4) diferansiyel denkleminin her $x_0 \neq 0, 1$ noktası civarında iki tane sıfırdan farklı, lineer bağımsız kuvvet serisi çözümü vardır. Mesela $x = 2$ alelade noktası civarında diferansiyel denklemin

$$c_0 + c_1(x-2) + c_2(x-2)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-2)^n$$

şeklinde iki tane sıfırdan farklı, lineer bağımsız kuvvet serisi çözümü vardır. Ancak $x = 0$ tekil noktası civarında

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$$

ve $x = 1$ tekil noktası civarında

$$c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n$$

şeklindeki çözümlerin varlığı konusunda hiç bir garantimiz *yoktur*.

A. Çözüm Yöntemi

Şimdi belli şartlar altında (6.1) denkleminin (6.2) yapısında kuvvet serisi çözümlerine sahip olduğu garanti edildikten sonra, bu çözümleri bizzat bulmak için nasıl hareket edilecek? Başka bir deyişle $c_0, c_1, \ldots$ katsayıları,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \tag{6.2}$$

serisi (6.1) diferansiyel denkleminin bir çözümü olacak şekilde nasıl belirlenecek? Önce bu katsayıların bulunması için izlenecek yolu kısaca anlatacağız ve sonra durumu çeşitli örnekler üzerinde göstereceğiz.

x_0, (6.1) denkleminin bir alelade noktası ise, bu denklemin $x - x_0$'ın kuvvet serileri halindeki çözümleri mevcuttur. Onlardan bir tanesi

$$y = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \tag{6.6}$$

olsun. Bu kuvvet serisi x_0 civarındaki bir $|x - x_0| < R, \quad R > 0$ aralığındaki her x için yakınsadığından, bu aralıkta terim terim türev alarak sırasıyla

$$\frac{dy}{dx} = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1} \tag{6.7}$$

ve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2c_2 + 6c_3(x - x_0) + 12c_4(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x - x_0)^{n-2} \tag{6.8}$$

elde ederiz. Şimdi (6.6), (6.7) ve (6.8) eşitliklerinin sağ taraflarındaki serileri, (6.1)'de y, y', y'' yerine koyacağız. Sonra benzer terimleri yeniden grupladığımızda, $K_i (i = 0, 1, 2, \ldots)$ katsayıları (6.6) çözümünün $c_0, c_1, \ldots$ katsayılarının fonksiyonları olmak üzere

$$K_0 + K_1(x - x_0) + K_2(x - x_0)^2 + \ldots = 0 \tag{6.9}$$

elde ederiz. (6.9)'un, x_0 civarındaki bir $|x - x_0| < R, \quad R > 0$ aralığındaki her x için doğru olması,

$$K_0 = K_1 = K_2 = \ldots = 0$$

ile mümkündür. Yani, (6.9)'un sol tarafında $x - x_0$'ın her kuvvetinin katsayısını ayrı ayrı sıfıra eşitlemeliyiz. Bu, (6.6) serisinin (6.1) diferansiyel denkleminin bir çözümü olması için, (6.6)'daki $c_0, c_1, \ldots$ katsayıları tarafından sağlanması gereken bir dizi şart ortaya çıkarır. c_n'ler bu şartlar sağlanacak şekilde seçilirse, sonuçta ortaya çıkacak (6.6) serisi, (6.1) diferansiyel denkleminin aranan çözümü olacaktır. Şimdi aşağıdaki örneklerde bu yöntemi ayrıntılı biçimde anlatacağız.

Örnek 6.5.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2+2)y = 0 \tag{6.4}$$

diferansiyel denkleminin x'in kuvvetleri şeklindeki (yani $x_0 = 0$ civarında) seri çözümünü bulunuz.

Çözüm. $x_0 = 0$ noktasının bu denklem için bir alelade nokta olduğunu ve lineer bağımsız iki tane istenen tip seri çözümün var olduğunu daha önce görmüştük. Uygulayacağımız yöntem bu iki çözümü bir çırpıda bulacak.

$x_0 = 0$ olmak üzere (6.6) tipinde bir çözüm alalım. Yani,

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{6.10}$$

olsun. Bunu terim terime türeterek,

$$\frac{dy}{dx} = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1} \tag{6.11}$$

ve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2} \tag{6.12}$$

elde ederiz. Şimdi (6.10), (6.11) ve (6.12)'deki serileri, (6.4)'de y, y', y'' yerine koyunca

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1} + (x^2+2)\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$$

buluruz. x sayma indisi olan n'den bağımsız olduğundan bunu

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n \tag{6.13}$$

şeklinde yazabiliriz. (6.9) yapısına sokabilmek için de birinci ve üçüncü toplamların, x'lerin üsleri n olacak şekilde yeniden yazılmaları gerekir. (6.13)'teki birinci toplamı gözönüne alalım.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} \tag{6.14}$$

Burada $m = n - 2$ alırsak, $n = m + 2$ ve $n = 2$'de $m = 0$ olduğundan, (6.14) toplamı

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)c_{m+2} x^m \tag{6.15}$$

haline gelir. Sayma indisi sadece bir "duyarsız değişken" olduğundan, (6.15)'de m ile n'yi değiştirerek (6.13)'ün birinci toplamını

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n \tag{6.16}$$

olarak yeniden yazarız. Benzer şekilde üçüncü terim olan

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} \tag{6.17}$$

toplamı, $m = n + 2$ konulunca

$$\sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} x^m \tag{6.18}$$

haline gelir. (6.18)'de m ile n değiştirilince, (6.13)'ün üiüncü toplamı

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n \tag{6.19}$$

olarak yeniden yazılabilir. Böylece (6.14)'ü eşdeğeri olan (6.16) ve (6.17)'yi de (6.19)'la değiştirince, (6.13) denklemi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n = 0 \tag{6.20}$$

olur.

Her ne kadar buradaki toplamların hepsinde x, x^n olarak n. kuvvetiyle bulunuyorsa da, toplam indislerinin sayma kümeleri aynı değil. Birinci ve dördüncü toplamlar 0'dan ∞'a, ikincisi 1'den ∞'a ve üçüncüsü de 2'den sonsuza kadar değişiyor. Ortak sayma indisi kümesi olan 2'den ∞'a aralığının dışında kalan terimleri ayrıca yazarak, kalan terimlerin hepsini tek bir toplama sembolü altında toplayabiliriz. Mesela (6.20)'nin birinci toplamdaki $n = 0$ ve $n = 1$'e karşılık olan terimleri ayrı yazarak onu

$$2c_2 + 6c + 3x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$

olarak yazabiliriz. Benzer şekilde

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n = c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} nc_n x^n$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n = 2c_0 + 2c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} 2c_n x^n$$

olur ki (6.20) denklemi yeniden

$$2c_2 + 6c_3 x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + c_1 x \sum_{n=2}^{\infty} nc_n x^n +$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n + 2c_0 + 2c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} 2c_n x^n = 0$$

olarak yazılabilir. Şimdi x'in benzer kuvvetlerini bir araya toplayarak bu denklemi

$$(2c_0+2c_2)+(3c_1+6c_3)x+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+(n+2)c_n+c_{n-2}]x^n = 0 \tag{6.21}$$

olarak basitleştiririz.

Artık (6.21) denklemi bizim istediğimiz (6.9) yapısındadır. (6.21)'in, $x = 0$ civarındaki bir $|x| < R, \quad R > 0$ aralığındaki her x için doğru olması, (6.21)'in sol tarafındaki x'in kuvvetlerinin katsayılarının ayrı

ayrı sıfır olması ile mümkündür. Yani, (6.21)'in sol tarafında x'in her kuvvetinin katsayısını ayrı ayrı sıfıra eşitlemeliyiz. Bu bize hemen

$$3c_0 + 2c_2 = 0 \tag{6.22}$$

$$3c_1 + 6c_3 = 0 \tag{6.23}$$

ve

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+2)c_n + c_{n-2} = 0, \quad n \geq 2 \tag{6.24}$$

şartlarını verir. (6.22)'den c_2'yi c_0 cinsinden ifade etme imkanı buluruz:

$$c_2 = -c_0 \tag{6.25}$$

(6.22)'ten de c_3'ü c_1 cinsinden hesaplarız:

$$c_3 = -\frac{1}{2}c_1 \tag{6.26}$$

(6.24) ifadesine *rekürans formülü* denir. Bu formül $n \geq 2$ için c_{n+2}'yi kendisinden daha önce gelen c_n ve c_{n-2} cinsinden hesaplama imkanı verir:

$$c_{n+2} = -\frac{(n+2)c_n + c_{n-2}}{(n+2)(n+1)}, \quad n \geq 2 \tag{6.27}$$

$n = 2$ için bu formülden

$$c_4 = -\frac{4c_2 + c_0}{12}$$

bulunur. Şimdi (6.25)'i kullanırsak bu,

$$c_4 = \frac{1}{4}c_0$$

verir ki, c_4'ü c_0 cinsinden hesaplamış oluruz. $n = 3$ için (6.27)'den

$$c_5 = -\frac{5c_3 + c_1}{20}$$

bulunur. (6.26)'yı kullanırsak buradan,

$$c_5 = \frac{3}{40}c_1$$

bulunur ki, c_5'i c_1 cinsinden hesaplamış oluruz. Benzer şekilde hareket ederek tek indisli katsayıları c_1 ve çift indisli katsayıları c_0 cinsinden hesaplarız. c_2, c_3, c_4 ve c_5'in burada elde edilen eşdeğerlerini yerlerine yazarsak (6.10) çözümü

$$y = c_0 + c_1 x - c_0 x^2 - \frac{1}{2} c_1 x^3 + \frac{1}{4} c_0 x^4 + \frac{3}{40} c_1 x^5 + \dots$$

haline gelecektir. c_0 ve c_1'li terimleri ayırırsak,

$$y = c_0 \left(1 - x^2 + \frac{1}{4} x^4 + \dots\right) + c_1 \left(x - \frac{1}{2} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + \dots\right) \qquad (6.30)$$

olur. Bu, (6.4) diferansiyel denkleminin x'in kuvvetleri cinsinden yazılabilen çözümünü x^5'li terime kadar verir. (6.30)'daki iki parantezin içindeki seriler, (6.4)'ün lineer bağımsız iki çözümünün kuvvet serisi açılımları ve c_1, c_2'ler de keyfî sabitlerdir. Böylece (6.30), (6.4)'ün x'in kuvvetleri cinsinden yazılabilen genel çözümünü (x^5'li terime kadar) verir.

Örnek 6.6.

$$\begin{cases} (x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + xy = 0 \\ y(0) = 4, \\ y'(0) = 6 \end{cases} \qquad (6.31-32-33)$$

başlangıç değer probleminin bir kuvvet serisi çözümünü bulunuz.

Çözüm. Önce $x = \pm 1$ noktası dışında bütün noktaların bu denklem için bir alelade nokta olduğunu gözlemleyelim. Böylece (6.31)'in, $x_0 \neq \pm 1$ olmak üzere (6.6) tipinde çözümlerini ele alabiliriz. Ancak başlangıç şartları $x = 0$'da verilmiş olduğundan $x_0 = 0$ alacağız ve x'in kuvvetleri şeklinde olan kuvvet serisi çözümlerini bulacağız.

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (6.34)$$

olsun. Bunu terim terime türeterek,

$$\frac{dy}{dx} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \qquad (6.35)$$

ve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2} \tag{6.36}$$

elde ederiz. Şimdi (6.34), (6.35) ve (6.36)'daki serileri (6.31)'de y, y', y'' yerine koyunca

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2} + 3\sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^{n+1} = 0 \tag{6.37}$$

elde ederiz. Bunu (6.9) yapısına sokabilmek için de ikinci ve dördüncü toplamların, x'lerin üsleri n olacak şekilde yeniden yazılmaları gerekir. Bu yapılınca (6.37) denkleminden

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + 3\sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n = 0 \tag{6.38}$$

buluruz.

Ortak sayma indisi kümesi olan 2'den ∞'a aralığının dışında kalan terimleri ayrıca yazarak kalan terimlerin hepsini tek bir toplama sembolü altında toplayabiliriz.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^n - 2c_2 - 6c_3x - \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + 3c_1x +$$
$$+3\sum_{n=2}^{\infty} nc_nx^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n = 0$$

olarak yazılabilir. Şimdi x'in benzer kuvvetlerini bir araya toplayarak bu denklemi

$$-2c_2 + (c_0 + 3c_1 - 6c_3)x + \sum_{n=2}^{\infty}[-(n+2)(n+1)c_{n+2} + n(n+2)c_n + c_{n-1}]x^n = 0 \tag{6.39}$$

olarak basitleştiririz.

(6.39)'un, $x = 0$ civarındaki bir $|x| < R, \quad R > 0$ aralığındaki her x için doğru olması, sol tarafta x'in kuvvetlerinin katsayılarının ayrı ayrı sıfır olması ile mümkündür. Böylece (6.39),

$$-2c_2 = 0 \tag{6.40}$$

$$c_0 + 3c_1 - 6c_3 = 0 \tag{6.41}$$

ve

$$-(n+2)(n+1)c_{n+2} + n(n+2)c_n + c_{n-1} = 0, \quad n \geq 2 \tag{6.42}$$

şartlarını verir. (6.40)'dan $c_2 = 0$ buluruz, (6.41)'den

$$c_3 = \frac{1}{6}c_0 + \frac{1}{2}c_1$$

ve (6.42) ifadesinden de

$$c_{n+2} = \frac{n(n+2)c_n + c_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \quad n \geq 2$$

elde edilir. Bu formül arka arkaya kullanılarak

$$c_4 = \frac{8c_2 + c_1}{12} = \frac{1}{12}c_1,$$

$$c_5 = \frac{15c_3 + c_2}{20} = \frac{1}{8}c_0 + \frac{3}{8}c_1, \ldots$$

bulunur. c_2, c_3, c_4 ve c_5'n burada elde edilen eşdeğerlerini çözüm taslağımızda yerlerine yazarsak (6.34) çözümü

$$y = c_0 + c_1 x + \left(\frac{1}{6}c_0 + \frac{1}{2}c_1\right)x^3 + \frac{c_1}{12}x^4 + \left(\frac{1}{8}c_0 + \frac{3}{8}c_1\right)x^5 + \ldots$$

veya

$$y = c_0\left(1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^5 + \ldots\right) + c_1\left(x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{8}x^5 + \ldots\right) \tag{6.43}$$

haline gelir. (6.43) çözümü, (6.31) diferansiyel denkleminin x'in kuvvetleri cinsinden yazılabilen genel çözümünü x^5'li terime kadar verir. Şimdi (6.32) ve (6.33) başlangıç şartlarını uygulamalıyız. (6.32)'yi (6.43)'e uygularsak hemen

$$c_0 = 4$$

buluruz. (6.43)'ün türevini alırsak,

$$\frac{dy}{dx} = 4\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{8}x^4 + \ldots\right) + c_1\left(1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{15}{8}x^4 + \ldots\right) \tag{6.44}$$

Şimdi de (6.33)'ü (6.44)'e uygularsak

$$c_1 = 6$$

elde ederiz. Bunlar yerlerine konduğunda

$$y = 4\left(1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^5 + \ldots\right) + 6\left(x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{8}x^5 + \ldots\right)$$

veya

$$y = 4 + 6x + \frac{11}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{11}{4}x^5 + \ldots$$

verilen başlangıç değer probleminin çözümü olarak bulunur.

Uyarı 1.

6.6. örnekte, y'nin ve birinci türevinin (6.32) ve (6.33) şartlarında verilen değerleri $x = 0$ yerine $x = 2$'de belirlenmiş olsaydı başlangıç değer problemimiz

$$\begin{cases} (x^2 - 1)\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + xy = 0 \\ y(2) = 4, \\ y'(2) = 6 \end{cases} \tag{6.45}$$

olacaktı. Başlangıç değerleri $x = 2$'de verildiğinden seriyi $x - 2$'nin kuvvetleri olarak arayacağız. Yani bu durumda

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-2)^n \tag{6.46}$$

şeklinde çözümler arayacağız. (6.46) şeklinde çözüm bulmanın kolay yolu, önce $t = x - 2$ koymaktır. O zaman (6.45)'deki başlangıç değer problemi

$$\begin{cases} (t^2 + 4t + 3)\frac{d^2y}{dt^2} + (3t + 6)\frac{dy}{dt} + (t + 2)y = 0 \\ y(0) = 4, \\ y'(0) = 6 \end{cases} \tag{6.47}$$

eşdeğer başlangıç değer problemine dönüşür. Burada artık serbest değişken t'dir ve başlangıç şartları $t = 0$'da verilmiştir. Artık (6.47) probleminin

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \tag{6.48}$$

şeklindeki seri çözümleri aranacak. (6.48)'i türetip, (6.47)'deki diferansiyel denklemde yerine koyarsak, c_n katsayıları 6.5. ve 6.6. örneklerde olduğu gibi hesaplanır. Sonra (6.47)'deki başlangıç şartları uygulanır. (6.48)'in çözümünde t yerine $x-2$ koyarak, (6.45) probleminin (6.46) şeklindeki çözümü elde edilir.

Uyarı 2.

6.5. ve 6.6. örneklerde seri çözümler bulundu ama, bu serilerin yakınsaklıklarına hiç bakılmadı. Teorem 6.1'e göre x_0 noktası

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0 \tag{6.1}$$

diferansiyel denkleminin alelade noktası ise, (6.2) şeklindeki seri çözümler x_0 civarındaki bir $|x-x_0|<R, \quad R>0$ aralığında yakınsarlar. (6.1)'i

$$P_1(x)=\frac{a_1(x)}{a_0(x)} \quad \text{ve} \quad P_2(x)=\frac{a_2(x)}{a_0(x)}$$

olmak üzere, yukarıdakine eşdeğer normalleştirilmiş şekliyle yazalım:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P_1(x)\frac{dy}{dx}+P_2(x)y=0 \tag{6.3}$$

x_0 noktası, (6.1)'in alelade noktası ise, P_1 ve P_2 fonksiyonlarının x_0 noktası civarında sırasıyla $|x-x_0|<R_1$ ve $|x-x_0|<R_2$ aralıklarında yakınsayan Taylor serisi açılımları vardır. (6.1) denkleminin (6.2) seri çözümünün, R_1 ve R_2 sayılarının küçüğünden daha küçük olmayan bir R sayısı için $|x-x_0|<R$ aralığında yakınsayacağı ispat edilebilir.

6.5. örneğinin (6.4) diferansiyel denkleminde $P_1(x)=x$ ve $P_2(x)=x^2+2$'dir. Böylece bu örnekte $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ fonksiyonlarının $x_0=0$ alelade noktası civarındaki Taylor serisi açılımları her x için yakınsarlar. Bu yüzden (6.4)'ün (6.30)'daki seri çözümleri de her x için yakınsaktır.

6.6. örneğinin (6.31) diferansiyel denkleminde

$$P_1(x)=\frac{3x}{x^2-1} \quad \text{ve} \quad P_2(x)=\frac{x}{x^2-1}$$

olduğundan bu örnekte, $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ fonksiyonlarının $x_0=0$ alelade noktası civarındaki Taylor serisi açılımlarının ikisi de $|x|<1$ için yakınsarlar. Bu yüzden (6.31)'in (6.43)'deki seri çözümleri en az $|x| < 1$ için yakınsaktır.

ALIŞTIRMALAR

1. 'den 10.'ya kadar problemlerdeki diferansiyel denklemlerin x'in kuvvetleri şeklindeki seri çözümlerini bulunuz.

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$
3. $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (2x^2+1)y = 0$
4. $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2-4)y = 0$
5. $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (3x+2)y = 0$
6. $\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + (3x-2)y = 0$
7. $(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + xy = 0$
8. $(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} - (3x-2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$
9. $(x^3-1)\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{dy}{dx} + xy = 0$
10. $(x+3)\frac{d^2y}{dx^2} + (x+2)\frac{dy}{dx} + y = 0$

11. 'den 14.'ye kadar problemlerdeki başlangıç değer problemlerinin kuvvet serisi çözümlerini bulunuz.

11. $\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
12. $\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$
13. $\begin{cases} (x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 2xy = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$
14. $\begin{cases} (2x^2-3)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$

15. ve 16. problemlerdeki diferansiyel denklemlerin $(x-1)$'in kuvvetleri şeklindeki kuvvet serisi çözümlerini bulunuz.

15. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$
16. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} - y = 0$

17.

$$\begin{cases} x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2y = 0 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 4 \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin $(x-1)$'in kuvvetleri şeklindeki kuvvet serisi çözümlerini bulunuz.

18. n bir sabit olmak üzere

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

şeklindeki diferansiyel denklemlere *Legendre diferansiyel denklemi* denir.

(a) $x = 0$ noktasının bu denklemin alelade noktası olduğunu gösteriniz ve x'in kuvvetleri şeklinde iki lineer bağımsız kuvvet serisi çözümünü bulunuz.

(b) n negatif olmayan bir tamsayı olduğunda, (a) şıkkında bulunan çözümlerden birinin n. dereceden bir polinom olacağını gösteriniz.

6.2 Tekil Nokta Civarinda Seri Çözüm

A. Düzgün Tekil Noktalar

Yeniden

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0 \tag{6.1}$$

ikinci basamaktan lineer diferansiyel denklemini gözönüne alalım ve x_0'da (6.1)'in bir *tekil nokta*'sı olsun. Artık Teorem 6.1 bu noktaya uygulanamaz ve artık bize (6.1) diferansiyel denkleminin

$$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n \tag{6.2}$$

yapısında iki tane sıfırdan farklı, lineer bağımsız kuvvet serisi çözümü garanti edilemez. Aslında x_0 tekil noktası olan (6.1) şeklindeki bir denklemin genel olarak (6.2) yapısında bir kuvvet serisi çözümü de yoktur. Demek ki bu durumda başka tip bir çözüm aramalıyız ama hangi tipten bir çözüm bulabileceğimizi umalım? Belli şartlar altında, r bir gerçel ya da kompleks sayı olmak üzere

$$y=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n \tag{6.49}$$

şeklinde bir çözüm bulunabileceğini biraz sonraki araştırmalarımızla anlıyoruz. Böyle bir çözüm görüldüğü gibi $x-x_0$ cinsinden bir kuvvet serisi ile $x-x_0$'ın belli bir kuvvetinin çarpımına eşittir. Böyle bir çözümün varlığını garanti edecek şartları ortaya çıkarmak için önce tekil noktaları sınıflandıralım.

Bu amaçla (6.1) denkleminin

$$P_1(x)=\frac{a_1(x)}{a_0(x)} \quad \text{ve} \quad P_2(x)=\frac{a_2(x)}{a_0(x)}$$

olmak üzere,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P_1(x)\frac{dy}{dx}+P_2(x)y=0 \tag{6.3}$$

normalize edilmiş eşdeğer biçiminde yazalım.

TANIM. (6.1) diferansiyel denklemini gözönüne alalım ve (6.3) normalize edilmiş eşdeğer formdaki $P_1(x)$, $P_2(x)$ fonksiyonlarından en az birinin x_0 noktasında analitik olmadığını kabul edelim. Böylece x_0 noktası, (6.1) denkleminin bir tekil noktasıdır.

$$(x-x_0)P_1(x),\ (x-x_0)^2P_2(x) \tag{6.50}$$

çarpımları ile tanımlı fonksiyonların ikisi de x_0'da analitik ise, bu noktaya (6.1)'in bir *düzgün tekil nokta*'sı denir. (6.50)'deki çarpım fonksiyonlardan en az biri x_0'da analitik *değil* ise, bu noktaya da (6.1)'in bir *düzgün olmayan tekil nokta*'sı denir.

Örnek 6.7.

$$2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + (x-5)y = 0 \tag{6.51}$$

diferansiyel denklemini normalize ederek yazarsak,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{2x}\frac{dy}{dx} + \frac{x-5}{2x^2}y = 0$$

elde edilir. Burada $P_1(x) = -\frac{1}{2x}$, $P_2(x) = \frac{x-5}{2x^2}$'dir. Bu iki fonksiyon da $x=0$'da analitik değildirler, bu noktanın (6.51)'in bir tekil noktası olduğu sonucuna varırız. (6.50) şeklindeki

$$xP_1(x) = -\frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad x^2P_2(x) = \frac{x-5}{2}$$

çarpımları ile tanımlı fonksiyonlara bakarız. Bu iki fonksiyon da $x = 0$'da analitiktir. Böylece $x=0$ noktası (6.51)'in bir *düzgün* tekil noktasıdır.

Örnek 6.8.

$$x^2(x-2)^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2(x-2)\frac{dy}{dx} + (x+1)y = 0 \tag{6.52}$$

diferansiyel denklemini normalize ederek yazarsak,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x^2(x-2)}\frac{dy}{dx} + \frac{x+1}{x^2(x-2)^2}y = 0$$

elde edilir. Burada

$$P_1(x) = \frac{2}{x^2(x-2)} \quad \text{ve} \quad P_2(x) = \frac{x+1}{x^2(x-2)^2}$$

olur. diferansiyel denklemin tekil noktalarının $x = 0$ ve $x = 2$ olduğu görülmektedir. Bunların cinslerini birer birer bulalım.

Önce $x = 0$ noktasını ele alalım ve (6.50) şeklindeki

$$xP_1(x) = \frac{2}{x(x-2)} \quad \text{ve} \quad x^2P_2(x) = \frac{x+1}{(x-2)^2}$$

çarpımları ile tanımlı fonksiyonlara bakalım. $x^2P_2(x)$ fonksiyonu $x = 0$'da analitiktir. Fakat $xP_1(x)$ fonksiyonu öyle değildir. O halde $x = 0$ noktası (6.52)'nin bir *düzgün olmayan* tekil noktasıdır.

Şimdi de $x = 2$ noktasını ele alalım ve (6.50) şeklindeki

$$(x-2)P_1(x) = \frac{2}{x^2} \quad \text{ve} \quad (x-2)^2P_2(x) = \frac{x+1}{x^2}$$

çarpımları ile tanımlı fonksiyonlara bakalım. İki fonksiyon da $x = 2$'de analitiktir. O halde $x = 2$ noktası (6.52)'nin bir *düzgün* tekil noktasıdır.

Artık tekil noktaların cinslerini ayırmasını öğrendik. Şimdi düzgün tekil noktalar civarında (6.49) tipindeki çözümlerle ilgili temel teoremi vereceğiz.

TEOREM 6.2.

Hipotez. x_0 denklemin bir düzgün tekil noktasıdır.

Hüküm. (6.1) diferansiyel denkleminin, r bir gerçel ya da kompleks sayı olmak üzere

$$y = (x-x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n \tag{6.49}$$

yapısında *en az bir tane* sıfırdan farklı kuvvet serisi çözümü vardır ve bu çözüm, x_0 civarındaki bir $|x-x_0| < R, \quad R > 0$ aralığında geçerlidir.

Örnek 6.9. 6.7. örnekte $x = 0$ noktasının

$$2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + (x-5)y = 0 \tag{6.51}$$

denkleminin bir düzgün tekil noktası olduğunu görmüştük. Teorem 6.2 bu diferansiyel denklemin, $x = 0$ civarındaki bir $|x| < R, \quad R > 0$ aralığında geçerli

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

şeklinde en az bir sıfırdan farklı çözümü olduğunu söylüyor.

Örnek 6.10. 6.8. örnekte $x = 2$ noktasının

$$x^2(x-2)^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2(x-2)\frac{dy}{dx} + (x+1)y = 0 \tag{6.52}$$

denkleminin bir düzgün tekil noktası olduğunu görmüştük. Teorem 6.2 bu diferansiyel denklemin, $x = 2$ civarındaki bir $|x-2| < R, \quad R > 0$ aralığında geçerli

$$(x-2)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-2)^n$$

şeklinde en az bir sıfırdan farklı çözümü olduğunu söylüyor.

$x = 2$ noktasının, (6.52) denkleminin bir tekil noktası olduğunu da gördük. Ancak bu tekil nokta düzgün değildir ve Teorem 6.2 bu noktaya uygulanamaz. Böylece teorem, bu diferansiyel denklemin, $x = 0$'ın herhangi bir delik civarında

$$x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

şeklinde sıfırdan farklı çözümü olduğunu söyleyemiyor.

B. Frobenius Yöntemi

(6.1) denkleminin x_0 düzgün tekil noktası civarında (6.49) yapısında en az bir çözümü bulunduğu bize garanti ediliyor. Ancak bu çözümün c_n katsayıları ve r sayısı nasıl bulunacak? Bu işlem 6.1 kısmındakine benzer ve genel olarak *Frobenius yöntemi* diye bilinir. Yöntemi kısaca özetledikten sonra, (6.51) denklemine uygulayacağız.

Frobenius Yönteminin Ana Çizgileri

(1) x_0 noktası, (6.1) denkleminin bir düzgün tekil noktası olsun. $c_0 \neq 0$ olmak üzere, (6.49) yapısında

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

çözümünü ele alalım. Bunu $c_0 \neq 0$ olmak üzere,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r} \tag{6.53}$$

olarak yazabiliriz.

(2) (6.53)'ün terim terime türetilebileceğini kabul ederek

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r) c_n (x - x_0)^{n+r-1} \tag{6.54}$$

ve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) c_n (x - x_0)^{n+r-2} \tag{6.55}$$

elde ederiz. Şimdi (6.53), (6.54) ve (6.55)'deki serileri, (6.1)'de y, y', y'' yerine koyarız.

(3) Şimdi 6.1. kısımda yapıldığı gibi sonuçta elde edilen seriyi basitleştirerek gurupladığımızda, k belli bir tamsayı ve $K_i (i = 0, 1, 2, \ldots)$ katsayıları (6.53) çözümünün $c_0, c_1, \ldots$ katsayılarının ve r'nin fonksiyonları olmak üzere

$$K_0 (x - x_0)^{r+k} + K_1 (x - x_0)^{r+k+1} + K_2 (x - x_0)^{r+k+2} + \ldots = 0 \tag{6.56}$$

elde ederiz.

(4) (6.56)'nın, x_0 civarındaki bir $|x - x_0| < R, \quad R > 0$ delik aralığındaki her x için doğru olması,

$$K_0 = K_1 = K_2 = \ldots = 0$$

ile mümkündür. (6.9)'un sol tarafında $x - x_0$'ın en küçük kuvvetinin K_0 katsayısını sıfıra eşitlersek, (6.1) diferansiyel denkleminin *indis denklemi* denilen, r cinsinden ikinci dereceden bir denklem elde edilir. Bu ikinci derece denklemin $r_1,\ r_2,\quad r_1 \geq r_2$ köklerine (6.1) denkleminin *üstelleri* denir ve (6.53) taslak çözümündeki r sabitinin yegane mümkün değerleridir. Böylece r bilinmeyen sabiti bu aşamada belirlenmiş olur.

(5) Şimdi (6.56)'daki diğer $K_1,\ K_2,\ \ldots$ katsayılarını sıfıra eşitleyeceğiz. Böylece (6.53) serisinin $c_0, c_1, \ldots$ katsayılarının sağlayacağı, r sabitini de bulunduran bir dizi şart elde etmiş oluruz.

(6) Bu aşamada (5)'de elde edilen bağıntılarda r yerine büyük olan r_1 kökünü koyarız. c_n'leri bu şartlar sağlanacak şekilde seçilirse, sonuçta elde edilecek (6.53) serisi $r = r_1$ için istenen biçimde bir çözüm olur.

(7) $r_1 \neq r_2$ ise, (6)'daki işi r_2 küçük kökü için de tekrarlarız. Böylece (6.53) tipinde bir çözüm daha bulunmuş olur. Ancak bu çözüm, (6)'da elde edilenden lineer bağımsız olmayabilir. Bu durumu bir örnek inceledikten sonra tartışacağız.

Örnek 6.11.

$$2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + (x-5)y = 0 \tag{6.51}$$

diferansiyel denkleminin $x = 0$ civarındaki çözümünü bulmak için Frobenius yöntemini kullanınız.

Çözüm. $x = 0$, (6.51) diferansiyel denkleminin bir düzgün tekil noktası olduğundan $c_0 \neq 0$ olmak üzere

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \tag{6.57}$$

şeklinde bir çözüm arıyoruz. (6.54)'ün terim terime türetilebileceğini kabul ederek

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} \tag{6.58}$$

ve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} \tag{6.59}$$

elde eder, (6.57), (6.58) ve (6.59)'daki serileri, (6.51)'de $y,\ y',\ y''$ yerine koyar,

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} - 5\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

buluruz. Bunu 6.1. kısımdaki gibi sadeleştirirsek,

$$\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+r)(n+r-1)-(n+r)-5]c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^{n+r} = 0$$

ya da

$$[2r(r-1)-r-5]c_0 x^r$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\{[2(n+r)(n+r-1)-(n+r)-5]c_n + c_{n-1}\}x^{n+r} = 0 \quad (6.60)$$

buluruz. Bu, $k=0$ olmak üzere (6.56) biçimindedir.

(6.60)'da x'in en küçük kuvvetinin (yani x^r'nin) katsayısını sıfıra eşitleyerek ($c_0 \neq 0$ kabul edildiğinden)

$$2r(r-1)-r-5=0$$

elde ederiz. Bu (6.51) denkleminin *indis denklemi*'dir ve onu

$$2r^2-3r-5=0$$

olarak yazabilir ve köklerinin

$$r_1 = \frac{5}{2} \quad \text{ve} \quad r_2 = -1$$

olduğunu hemen görebiliriz. Bunlar (6.51) diferansiyel denkleminin *üstelleri*'dir ve (6.57) çözümündeki daha önce bilinmeyen r sabitinin yegane mümkün değerleridir.

(6.60)'da x'in daha yüksek kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyerek

$$[2(n+r)(n+r-1)-(n+r)-5]c_n + c_{n-1} = 0, \quad n \geq 1 \qquad (6.61)$$

rekürans bağıntısını elde ederiz. (6.61)'de r yerine $\frac{5}{2}$ konulunca bu üstele ait rekürans formülü

$$\left[2\left(n+\frac{5}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)-\left(n+\frac{5}{2}\right)-5\right]c_n + c_{n-1} = 0, \quad n \geq 1$$

olur. Bu bağıntı,

$$n(2n+7)c_n + c_{n-1} = 0, \quad n \geq 1$$

veya son olarak

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{n(2n+7)}, \quad n \geq 1 \tag{6.62}$$

halinde basitleşir.

(6.62)'yi kullanarak

$$c_1 = -\frac{c_0}{9}, \quad c_2 = -\frac{c_1}{9} = \frac{c_0}{198}, \quad c_3 = -\frac{c_2}{39} = -\frac{c_0}{7722}, \ldots$$

elde ederiz. (6.57)'de $r = \frac{5}{2}$ ve c_i'lerin bu değerlerini koyarak $r = \frac{5}{2}$ büyük üsteline karşılık olarak

$$\begin{aligned} y &= c_0\left(x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{9}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{198}x^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{7722}x^{\frac{11}{2}} + \ldots\right) \\ &= c_0 x^{\frac{5}{2}}\left(1 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{198}x^2 - \frac{1}{7722}x^3 + \ldots\right) \end{aligned} \tag{6.63}$$

çözümünü elde ederiz.

Şimdi de (6.61)'de r yerine -1 koyarak bu üstele ait

$$[2(n-1)(n-2) - (n-1)]c_n + c_{n-1} = 0, \quad n \geq 1$$

rekürans bağıntısını elde ederiz. Bu bağıntı

$$n(2n-7)c_n + c_{n-1} = 0, \quad n \geq 1$$

veya son olarak

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{n(2n-7)}, \quad n \geq 1 \tag{6.64}$$

halinde basitleşir. (6.64)'ü kullanarak

$$c_1 = \frac{c_0}{5}, \quad c_2 = \frac{c_1}{6} = \frac{c_0}{30}, \quad c_3 = \frac{c_2}{3} = \frac{c_0}{90}, \ldots$$

elde ederiz. (6.57)'de $r = -1$ ve c_i'lerin bu değerlerini koyarak $r = -1$ küçük üsteline karşılık olarak

$$y = c_0\left(x^{-1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30}x + \frac{1}{90}x^2 + \ldots\right)$$

$$= c_0 x^{-1}\left(1 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{30}x^2 + \frac{1}{90}x^3 + \dots\right) \tag{6.65}$$

çözümünü elde ederiz.

$\frac{5}{2}$ ve -1 üstellerine karşılık olarak bulunan (6.63) ve (6.65) çözümleri lineer bağımsızdırlar. Böylece (6.51)'in genel çözümü c_1, c_2'ler keyfî sabitler olmak üzere

$$y = c_1 x^{\frac{5}{2}}\left(1 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{198}x^2 - \frac{1}{7722}x^3 + \dots\right) +$$
$$c_2 x^{-1}\left(1 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{30}x^2 + \frac{1}{90}x^3 + \dots\right)$$

çözümünü elde ederiz.

6.11 örneğinde (6.49) şeklinde iki tane lineer bağımsız çözüm bulduğumuza dikkat edelim. Oysa bu örnekten önce yaptığımız genel incelemede bunun her zaman olmayacağını belirtmiştik. Şimdi şu sorularla karşı karşıya geldik:

(1) (6.1) diferansiyel denklemi hangi şartlar altında (6.49) şeklinde iki tane

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

lineer bağımsız çözüme sahip olur?

(2) (6.1) diferansiyel denklemi x_0 düzgün tekil noktası civarında (6.49) şeklinde iki tane

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

lineer bağımsız çözüme sahip değise, (6.49) şeklindeki çözümle lineer bağımsız ikinci çözümün biçimi nasıldır?

Bu sorulara şu teoremle cevap vereceğiz:

TEOREM 6.3.

Hipotez. x_0 (6.1) diferansiyel denkleminin bir düzgün tekil noktasıdır. r_1, r_2, $r_1 \geq r_2$ x_0'a karşılık indis denkleminin kökleri olsun.

Hüküm. (i) $r_1 - r_2 \neq 0$, N, (N bir pozitif tamsayı) ise (6.1) diferansiyel denklemi $c_0, c_0^* \neq 0$ olmak üzere

$$y = (x - x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \tag{6.66}$$

ve

$$y = (x - x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^*(x - x_0)^n \tag{6.67}$$

şeklinde iki tane sıfırdan farklı lineer bağımsız çözüme sahiptir.

(ii) $r_1 - r_2 = 0,\ N$, (N bir pozitif tamsayı) ise (6.1) diferansiyel denkleminin $c_0 \neq 0$ olmak üzere

$$y = (x - x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n \tag{6.66}$$

ve $c_0^* \neq 0$, C bir sabit olmak, y_1 de (6.66)'nın sağ tarafı olmak üzere

$$y = (x - x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^*(x - x_0)^n + Cy_1(x)\ \ln|x - x_0| \tag{6.68}$$

şeklinde iki tane sıfırdan farklı lineer bağımsız çözümü vardır.

Özel olarak $r_1 = r_2$ ise, $C \neq 0$ olur. Fakat $r_1 - r_2 = N$ pozitif bir tamsayı ise, $C \neq 0$ da olabilir, $C = 0$ da olabilir.

(i). ve (ii). hükümlerdeki çözümler x_0 civarındaki bir $0 < |x - x_0| < R$ delik aralığında geçerlidirler.

Teorem 6.3'ün (i). ve (ii). hükümlerinden, x_0 (6.1) denkleminin bir düzgün tekil noktası olduğunda, bu noktaya ait indis denkleminin *büyük* köküne karşılık *muhakkak* (6.49) yapısında bir (6.66) çözümünün bulunacağını görüyoruz. (i) sonucuna göre, indis denkleminin kökleri arasındaki $r_1 - r_2$ farkı sıfır ya da bir pozitif tam sayı *değilse*, *küçük* kök olan r_2 ye karşılık da yine (6.49) tipinde bir (6.67) çözümü vardır. Ancak $r_1 - r_2$ farkı sıfır ya da bir pozitif tam sayı ise (ii) sonucu, (6.66) temel çözümünden lineer bağımsız olan çözümün genelllikle daha karmaşık olan (6.68) tipinde olacağını söylemektedir. $r_1 - r_2$ farkı bir pozitif tam sayı ve (6.68)'teki C sıfır ise, (6.68)'in daha basit olan (6.67) tipine dönüşeceği görülmektedir. Ama $r_1 - r_2$ bir pozitif tam sayı ve $C \neq 0$, yahut $r_1 - r_2 = 0$ ise, (6.68)'deki ikinci çözüm, $Cy_1(x)\ \ln|x - x_0|$ logaritmik terimini bulundurur ve (6.49) basit yapısında değildir.

Şimdi Frobenius yönteminin kullanılmasında tecrübe kazandıracak, Teorem 6.3'ün sonuçlarının anlaşılmasını sağlayacak ve mevcut olduğu taktirde (6.68) biçimindeki çözümün nasıl bulunacağını gösterecek örnekler vereceğiz.

Örnek 6.12.

$$2x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-3)y=0 \tag{6.69}$$

diferansiyel denkleminin $x=0$ civarındaki çözümünü bulmak için Frobenius yöntemini kullanınız.

Çözüm. $x=0$, (6.69) diferansiyel denkleminin bir düzgün tekil noktası olduğundan $c_0\neq 0$ olmak üzere

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r} \tag{6.70}$$

şeklinde bir çözüm arıyoruz. (6.70)'i terim terime türeterek

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1} \quad \text{ve} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}$$

elde eder, (6.70)'i ve türevlerini (6.69)'da yerlerine koyar,

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r+2}-3\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

elde ederiz. Bunu daha önceki örneklerde yaptığımız gibi sadeleştirirsek,

$$\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+r)(n+r-1)+(n+r)-3]c_nx^{n+r}+\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^{n+r}=0$$

ya da

$$[2r(r-1)+r-3]c_0x^r+[2r(r+1)+(r+1)-3]c_1x^{r+1}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\{[2(n+r)(n+r-1)+(n+r)-3]c_n+c_{n-2}\}x^{n+r}=0 \tag{6.71}$$

buluruz. Bu, $k=0$ olmak üzere (6.56) biçimindedir.

(6.71)'de x'in en küçük kuvvetinin (yani x^r'nin) katsayısını sıfıra eşitleyerek ($c_0 \neq 0$ kabul edildiğinden)

$$2r(r-1)+r-3=0 \quad \text{veya} \quad 2r^2-r-3=0$$

indis denklemini elde ederiz. Bu denklemin kökleri

$$r_1=\frac{3}{2} \quad \text{ve} \quad r_2=-1$$

olur. Kökler arasındaki $r_1-r_2=\frac{5}{2}$ farkı ne sıfırdır, ne de pozitif bir tam sayı. Teorem 6.3'ün (i). sonucuna göre (6.69) diferansiyel denkleminin her biri r_1 ve r_2 köklerinden birine tekabül eden (6.70) tipinde lineer bağımsız iki tane çözümü bulunur.

(6.71)'de x'in daha yüksek kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyerek

$$[2r(r+1)+(r+1)-3]c_1=0 \tag{6.72}$$

şartını ve

$$[2(n+r)(n+r-1)+(n+r)-3]c_n+c_{n-2}=0, \quad n\geq 2 \tag{6.73}$$

rekürans bağıntısını elde ederiz. (6.72)'de r yerine $\frac{3}{2}$ koyarsak $7c_1=0$ yani $c_1=0$ elde ederiz. (6.73)'de r yerine $\frac{3}{2}$ konulunca bu üstele ait rekürans formülü biraz sadeleştirmeyle

$$n(2n+5)c_n+c_{n-2}=0, \quad n\geq 2$$

veya son olarak

$$c_n=-\frac{c_{n-2}}{n(2n+5)}, \quad n\geq 2$$

halinde basitleşir. Bunu kullanarak

$$c_2=-\frac{c_0}{18}, \quad c_3=-\frac{c_1}{33}=0, \quad c_4=-\frac{c_2}{52}=\frac{c_0}{936},\dots$$

elde ederiz. $c_1=0$ olduğundan bütün tek numaralı terimlerinin sıfır olduğunu görüyoruz. (6.70)'de $r=\frac{3}{2}$ ve c_i'lerin bu değerlerini koyarak $r=\frac{3}{2}$ büyük üsteline karşılık olarak

$$y_1=c_0x^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1}{18}x^2+\frac{1}{936}x^4-\dots\right) \tag{6.74}$$

çözümünü elde ederiz.

Şimdi de (6.72)'de r yerine -1 koyarsak $-3c_1 = 0$ ve böylece $c_1 = 0$ buluruz. (6.73)'de r yerine -1 koyarak bu üstele ait

$$n(2n-5)c_n + c_{n-2} = 0, \quad n \geq 2$$

reküranс bağıntısı

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{n(2n-5)}, \quad n \geq 2$$

halinde basitleşir. Bunu kullanarak

$$c_1 = \frac{c_0}{2}, \quad c_3 = -\frac{c_1}{3} = 0, \quad c_4 = -\frac{c_2}{12} = -\frac{c_0}{24}, \ldots$$

elde ederiz. Bu halde de bütün tek numaralı terimlerinin sıfır olduğunu görüyoruz. (6.70)'de $r = -1$ ve c_i'lerin bu değerlerini koyarak $r = -1$ küçük üsteline karşılık olarak

$$y_2 = c_0 x^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \ldots\right) \tag{6.75}$$

çözümünü elde ederiz. (6.74) ve (6.75) çözümleri lineer bağımsız olduğundan (6.69)'un genel çözümünü; c_1, c_2'ler keyfî sabitler, y_1, y_2 de (6.74) ve (6.75) ile tanımlı çözümler olmak üzere

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

olarak buluruz.

Örnek 6.13.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - (x^2 + \frac{5}{4})y = 0 \tag{6.76}$$

diferansiyel denkleminin $x = 0$ civarındaki çözümünü bulmak için Frobenius yöntemini kullanınız.

Çözüm. $x = 0$, (6.76) diferansiyel denkleminin bir düzgün tekil noktası olduğundan $c_0 \neq 0$ olmak üzere

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \tag{6.77}$$

şeklinde bir çözüm arıyoruz. (6.77)'yi terim terime iki kere türeterek (6.76)'da yerlerine koyarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} - \frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

elde ederiz. Bunu sadeleştirirsek,

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)-(n+r)-\frac{5}{4}]c_n x^{n+r} - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^{n+r} = 0$$

ya da

$$\left[r(r-1)-r-\frac{5}{4}\right]c_0 x^r + \left[r(r+1)-(r+1)-\frac{5}{4}\right]c_1 x^{r+1}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(n+r)(n+r-1)-(n+r)-\frac{5}{4}\right]c_n - c_{n-2}\right\}x^{n+r} = 0 \quad (6.78)$$

buluruz.

(6.78)'de x'in en küçük kuvvetinin (yani x^r'nin) katsayısını sıfıra eşitleyerek ($c_0 \neq 0$ kabul edildiğinden)

$$r^2 - 2r - \frac{5}{4} = 0$$

indis denklemini elde ederiz. Bu denklemin kökleri

$$r_1 = \frac{5}{2} \quad \text{ve} \quad r_2 = -\frac{1}{2}$$

olur. Kökler tamsayı olmadıkları halde, aralarındaki $r_1 - r_2$ farkı pozitif bir tam sayı olan 3'tür. Teorem 6.3'ün (ii). sonucuna göre (6.76) diferansiyel denkleminin, $r_1 = \frac{5}{2}$ büyük köküne tekabül eden (6.77) tipinde bir çözümü vardır. Şimdi bu çözümü bulmaya yöneleceğiz.

(6.78)'de x'in daha yüksek kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyerek

$$\left[r(r+1)-(r+1)-\frac{5}{4}\right]c_1 = 0 \quad (6.79)$$

şartını ve

$$\left[(n+r)(n+r-1)-(n+r)-\frac{5}{4}\right]c_n - c_{n-2} = 0, \quad n \geq 2 \tag{6.80}$$

rekürans bağıntısını elde ederiz. (6.79)'da r yerine $\frac{5}{2}$ koyarsak $4c_1 = 0$ yani $c_1 = 0$ elde ederiz. (6.80)'de r yerine $\frac{5}{2}$ konulunca bu üstele ait rekürans formülü biraz sadeleştirmeyle

$$n(n+3)c_n - c_{n-2} = 0, \quad n \geq 2$$

veya $n \geq 2$ olduğundan

$$c_n = \frac{c_{n-2}}{n(n+3)}, \quad n \geq 2$$

olarak bulunur. Bunu kullanarak

$$c_2 = \frac{c_0}{2.5}, \quad c_3 = \frac{c_1}{3.6} = 0, \quad c_4 = -\frac{c_2}{4.7} = \frac{c_0}{2.4.5.7}, \ldots$$

elde ederiz. $c_1 = 0$ olduğundan bütün tek numaralı terimlerinin sıfır olduğunu görüyoruz. Çift numaralı terimler genel olarak

$$c_{2n} = \frac{c_0}{[2.4.6.\ldots(2n)][5.7.9.\ldots(2n+3)]}, \quad n \geq 1$$

şeklinde yazılabilir. (6.77)'de $r = \frac{5}{2}$ ve c_{2n}'lerin bu değerlerini koyarak $r = \frac{5}{2}$ büyük üsteline karşılık olarak

$$y_1 = c_0 x^{\frac{5}{2}}\left(1 + \frac{x^2}{2.5} + \frac{x^4}{2.4.5.7} + \ldots\right)$$

$$= c_0 x^{\frac{5}{2}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{[2.4.6.\ldots(2n)][5.7.9.\ldots(2n+3)]}\right) \tag{6.81}$$

çözümünü elde ederiz.

Şimdi de $r_2 = -\frac{1}{2}$ küçük kökünü ele alacağız. Artık Teorem 6.3, bu küçük köke karşılık (6.76) denkleminin (6.77) şeklinde ikinci bir lineer bağımsız çözümü bulunacağını bize garanti edemiyor. Teoremin (ii). sonucu sadece C sıfır olabilen veya olmayabilen bir sabit olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^* x^{n+r_2} + C y_1(x) \ \ln|x| \tag{6.82}$$

şeklinde, birinci çözümle lineer bağımsız ikinci bir çözümün bulunabileceğini haber veriyor. $C = 0$ ise, kuşkusuz, (6.82) çözümü (6.77) biçiminde olacak ve (6.79) şartı ile (6.80) rekürans formülünde $r = r_2 = -\frac{1}{2}$ koyup bir önceki örnekte olduğu gibi devam edebiliriz. Şimdi (haklılığını göstermeden, bir umutla) durumun böyle olduğunu kabul edelim.

(6.79)'da r yerine $-\frac{1}{2}$ koyarsak $-2c_1 = 0$ ve böylece $c_1 = 0$ buluruz. (6.80)'de r yerine $-\frac{1}{2}$ koyarak bu üstele ait

$$n(n-3)c_n - c_{n-2} = 0, \quad n \geq 2 \tag{6.83}$$

rekürans bağıntısı $n \neq 3$ için

$$c_n = \frac{c_{n-2}}{n(n-3)}, \quad n \geq 2, \quad n \neq 3 \tag{6.84}$$

olarak elde edilir. $n = 2$ için (6.84) formülü $c_2 = -c_0/2$ verir. $n = 3$ için (6.84)'ü kullanamayız. (6.83)'ten $0.c_3 - c_1 = 0$ yahut $c_1 = 0$ olduğundan $0 = 0$ elde edilir ki hiç bir ek şart gelmez. Böylece c_3, c_0'dan bağımsız ikinci bir keyfî sabittir. $n > 3$ için yine (6.84)'ü kullanabiliriz:

$$c_4 = \frac{c_2}{4} = -\frac{c_0}{2.4}, \quad c_5 = \frac{c_3}{2.5},$$

$$c_5 = \frac{c_3}{2.5}, \quad c_6 = \frac{c_4}{12} = -\frac{c_0}{2.4.6.3}, \quad c_7 = \frac{c_5}{4.7} = \frac{c_3}{2.4.5.7}, \ldots$$

elde ederiz. Bu halde 3.'den sonraki bütün tek numaralı terimlerin c_3 cinsinden ve bütün çift numaralı terimlerin c_0 cinsinden hesaplanabileceğini görüyoruz. Aslında (c_6 ve ötesindeki çift numaralı katsayılar için)

$$c_{2n} = -\frac{c_0}{[2.4.6.\ldots(2n)][3.5.7.\ldots(2n-3)]}, \quad n \geq 3$$

ve (c_5 ile ötesindeki tek numaralı katsayılar için)

$$c_{2n+1} = \frac{c_0}{[2.4.6.\ldots(2n-2)][5.7.9.\ldots(2n+1)]}, \quad n \geq 2$$

bulunur. (6.77)'de $r = -\frac{1}{2}$ ve c_n'lerin bu değerlerini koyarak $r = -\frac{1}{2}$ küçük üsteline karşılık olarak c_0, c_3 keyfî sabitler olmak üzere $y = y_2(x)$ çözümü

$$y_2(x) = c_0 x^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2.4} - \frac{x^6}{2.4.6.3} - \ldots\right)$$

$$+c_3x^{-\frac{1}{2}}\left(x^3+\frac{x^5}{2.5}+\frac{x^7}{2.4.5.7}+\dots\right)$$

$$=c_0x^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2.4}-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{2n}}{[2.4.6.\dots(2n)][3.5.7.\dots(2n-3)]}\right)$$

$$+c_3x^{-\frac{1}{2}}\left(x^3+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{[2.4.6.\dots(2n-2)][5.7.9.\dots(2n+1)]}\right) \qquad (6.85)$$

olarak bulunur.

(6.81)'de $c_0=1$ koyarsak $\frac{5}{2}$ büyük üsteline karşılık $y=y_{11}(x)$ özel çözümünü

$$y_{11}(x)=x^{\frac{5}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{[2.4.6.\dots(2n)][5.7.9.\dots(2n+3)]}\right)$$

ve (6.85)'de $c_0=1,\ \ c_3=0$ koyarsak $-\frac{1}{2}$ küçük üsteline karşılık $y=y_{21}(x)$ özel çözümünü

$$y_{21}(x)=x^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2.4}-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{2n}}{[2.4.6.\dots(2n)][3.5.7.\dots(2n-3)]}\right)$$

olarak buluruz. İkisi de (6.77) biçiminde olan bu özel çözümler lineer bağımsız olduğundan (6.76)'nın genel çözümü, $c_1,\ c_2$'ler keyfî sabitler olmak üzere

$$y=c_1y_{11}(x)+c_2y_{21}(x)$$

biçimindedir.

Şimdi (6.85)'deki y_2 çözümünü daha dikkatlice inceleyelim. Katsayısı c_3 olan

$$x^{-\frac{1}{2}}\left(x^3+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{[2.4.6.\dots(2n-2)][5.7.9.\dots(2n+1)]}\right)$$

ifadesi

$$x^{\frac{5}{2}}\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{[2.4.6.\dots(2n-2)][5.7.9.\dots(2n+1)]}\right)$$

$$=x^{\frac{5}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{[2.4.6.\dots(2n)][5.7.9.\dots(2n+3)]}\right)$$

olarak yazılabilecektir ki bu y_{11}'dir. O halde c_0, c_3 keyfî sabitler olmak üzere

$$y_2(x) = c_0 y_{21}(x) + c_3 y_{11}(x) \tag{6.87}$$

yazabiliriz. Şimdi (6.86) ile (6.87)'yi karşılaştıralım. Sadece $-\frac{1}{2}$ küçük üsteli kullanılarak elde edildiği halde, $y = y_2(x)$'in (6.76) diferansiyel denkleminin bizzat genel çözümü olduğunu görüyoruz.

Böylece, indis denkleminin kökleri arasındaki $r_1 - r_2$ farkı pozitif bir tamsayı olduğunda genel çözümü bazen, büyük üstele karşılık olan çözümü açıkça bulma zahmetine katlanmadan, sadece küçük üsteli kullanarak yazma imkanı vardır. Aslında $r_1 - r_2$ farkı pozitif bir tamsayı iken, genel çözümü sadece bununla elde edebilmek umuduyla, önce küçük üsteli ele almak iyi olacaktır.

Örnek 6.14.

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (x^2 - 3x)\frac{dy}{dx} + 3y = 0 \tag{6.88}$$

diferansiyel denkleminin $x = 0$ civarındaki çözümünü bulmak için Frobenius yöntemini kullanınız.

Çözüm. $x = 0$, (6.88) diferansiyel denkleminin bir düzgün tekil noktası olduğundan $c_0 \neq 0$ olmak üzere

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \tag{6.89}$$

şeklinde bir çözüm arıyoruz. (6.89)'u terim terime iki kere türeterek (6.88)'de yerlerine koyarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r+1}$$

$$-3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} + 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

elde ederiz. Bunu sadeleştirirsek,

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1) - 3(n+r) + 3]c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)c_{n-1}x^{n+r} = 0$$

ya da

$$[r(r-1)-3r+3]c_0x^r$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\{[(n+r)(n+r-1)-3(n+r)+3]c_n+(n+r-1)c_{n-1}\}x^{n+r}=0 \quad (6.90)$$

buluruz.

(6.90)'da x'in en küçük kuvvetinin (yani x^r'nin) katsayısını sıfıra eşitleyerek ($c_0 \neq 0$ kabul edildiğinden)

$$r^2-4r+3=0$$

indis denklemini elde ederiz. Bu denklemin kökleri

$$r_1=3 \quad \text{ve} \quad r_2=1$$

olur. Kökler arasındaki r_1-r_2 farkı pozitif bir tam sayı olan 2'dir. Teorem 6.3'ün (ii). sonucuna göre (6.88) diferansiyel denkleminin, $r_1 = 3$ büyük köküne karşılık (6.89) tipinde bir çözümü vardır. Küçük üstelle doğrudan genel çözümü bulma umudu varsa da biz şimdi bu çözümü bulmaya yöneleceğiz.

(6.90)'da x'in daha yüksek kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyerek, $r_1=3$ büyük üsteli için

$$[(n+r)(n+r-1)-3(n+r)+3]c_n+(n+r-1)c_{n-1}=0, \quad n \geq 1 \quad (6.91)$$

rekürans bağıntısını elde ederiz. (6.91)'de r yerine 3 koyarsak

$$n(n+2)c_n+(n+2)c_{n-1}=0, \quad n \geq 1$$

veya $n \geq 1$ olduğundan rekürans bağıntısı

$$c_n=-\frac{c_{n-1}}{n}, \quad n \geq 1$$

olarak bulunur. Bunu kullanarak

$$c_1=-c_0, \quad c_2=-\frac{c_1}{2}=\frac{c_0}{2!},$$

$$c_3=-\frac{c_2}{3}=-\frac{c_0}{3!},\ldots,c_n=-\frac{(-1)^n c_0}{n!},\ldots$$

elde ederiz. (6.89)'da $r = 3$ ve c_n'lerin bu değerlerini koyarak $r = 3$ büyük üsteline karşılık olarak

$$y_1(x) = c_0 x^3 \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots\right)$$

çözümünü elde ederiz. Parantez içindeki seriyi tanıyoruz. e^{-x} fonksiyonunun Maclaurin açılımı. O halde c_0 bir keyfî sabit olmak üzere

$$y_1(x) = c_0 x^3 e^{-x}$$

yazabiliriz.

Şimdi de $r_2 = 1$ küçük kökünü ele alacağız. Artık 6.13 örneğinde olduğu gibi, Teorem 6.3, bu küçük köke karşılık diferansiyel denklemin (6.89) şeklinde ikinci bir lineer bağımsız çözümü bulunacağını bize garanti edemiyor.

Bununla birlikte aynı örnekte olduğu gibi böyle bir çözümün var olduğunu kabul edip, onu bulma ümidiyle (6.91)'de r yerine 1 koyarız. Bu adımın bizi genel çözüme de götürebileceğinin bilincindeyiz.

Böylece (6.91)'de r yerine 1 koyarak bu üstele ait

$$n(n-2)c_n + nc_{n-1} = 0, \quad n \geq 1 \tag{6.93}$$

rekürans bağıntısı $n \neq 2$ için

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{n-2}, \quad n \geq 1, \quad n \neq 2 \tag{6.94}$$

olarak elde edilir. $n = 1$ için (6.94) formülünü kullanamayız. (6.93)'ten $0.c_2 + 2c_1 = 0$ yahut $c_1 = 0$ buluruz. Fakat $c_1 = c_0$ olduğundan $c_0 = 0$ elde edilir ki bu, (6.89)'u yazarken yapılan $c_0 \neq 0$ varsayımı ile çelişir. Bu çelişki bize, $r_2 = 1$ küçük köküne karşılık (6.89) şeklinde çözüm bulunamayacağını gösterir.

Yine (6.94)'ü $n \geq 3$ için kullanmağa kalktığımızda, daha önce elde etttiğimiz $y_1(x)$ çözümünü elde ediyoruz. Çünkü Böylece $0.c_2 + 2c_1 = 0$ şartından c_2'nin keyfî olduğunu görüyoruz. (6.94)'ü $n \geq 3$ için kullanırsak, arka arkaya

$$c_3 = -c_2, \quad c_4 = -\frac{c_3}{2} = \frac{c_2}{2!},$$

$$c_5 = -\frac{c_4}{3} = -\frac{c_2}{3!}, \ldots, c_{n+2} = -\frac{(-1)^n c_2}{n!}, \ n \geq 1, \ldots$$

elde ederiz. Böylece (6.89)'da $r = 1$ ve c_n'lerin bu değerlerini koyarak $r = 1$ küçük üsteline karşılık olarak biçimsel olarak,

$$y(x) = c_2 x \left[x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^5}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n!} + \ldots \right]$$

$$= c_2 x^3 \left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots \right] = c_2 x^3 e^{-x}$$

çözümünü elde ederiz. Bunu (6.92) ile karşılaştırırsak, $y = y_1(x)$ çözümü ile aynı olduğunu görürüz.

Şimdi (6.88)'in y_1'den lineer bağımsız çözümünü arayacağız. Teorem 6.3'ten bu çözümün $c_n^* \neq 0, \ C \neq 0$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^* x^{n+1} + C y_1(x) \ \ln|x| \tag{6.95}$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. Böyle bir çözümün bulunması için bir çok yöntem var. Biz 4.1 kısmında anlatılan mertebe düşürme yolunu kullanacağız. f, (6.88)'deki bilinen çözüm olmak üzere $y = fu$ diyelim. f olarak $c_0 = 1$ konmuş (6.92) ile tanımlanan y_1 bilinen çözümünü alalım.

$$y = x^3 e^{-x} u \tag{6.96}$$

diyelim. Buradan

$$\frac{dy}{dx} = x^3 e^{-x} \frac{du}{dx} + (3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}) u \tag{6.97}$$

ve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^3 e^{-x} \frac{d^2u}{dx^2} + 2(3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}) \frac{du}{dx} + (x^3 e^{-x} - 6x^2 e^{-x} + 6x e^{-x}) u \tag{6.98}$$

elde edilir. (6.96), (6.97) ve (6.98); (6.88) diferansiyel denkleminde y ve ilk iki türevi yerine konursa, sadeleştirmelerden sonra

$$x \frac{d^2u}{dx^2} + (3 - x) \frac{du}{dx} = 0 \tag{6.99}$$

bulunur. Burada $v = du/dx$ dönüşümü yapılırsa, bu ikinci basamak denklem hemen

$$x\frac{dv}{dx} + (3-x)v = 0$$

birinci basamak diferansiyel denklemine indirgenmiş olur. Bu ayrılabilen denklemin bir özel çözümü $v = x^{-3}e^x$'tir. Böylece (6.99) denkleminin bir özel çözümü

$$u = \int x^{-3}e^x \, dx$$

olur. Demek ki

$$y_2(x) = x^3e^{-x}\int x^{-3}e^x \, dx \tag{6.100}$$

olmak üzere $y = y_2(x)$, (6.88)'in, (6.92) ile tanımlı y_1 çözümünden lineer bağımsız bir özel çözümüdür.

Şimdi (6.100) ile tanımlanan çözümün aslında (6.95) yapısında olduğunu göstereceğiz. e^x'in MacLaurin serisini (6.100)'de yerine koyarsak

$$y_2(x) = x^3e^{-x}\int x^{-3}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots\right)dx =$$

$$= x^3e^{-x}\int \left(x^{-3} + x^{-2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{6} + \frac{x}{24} + \dots\right)dx$$

Bunu terim terim integre ederek

$$y_2(x) = x^3e^{-x}\left(-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{6}x + \frac{1}{48}x^2 + \dots\right)$$

buluruz. Şimdi de e^{-x}'in MacLaurin serisini kullanırsak

$$y_2(x) = \left(x^3 - x^4 + \frac{x^5}{2} - \frac{x^6}{6}\dots\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{1}{48}x^2 + \dots\right) + \frac{1}{2}x^3e^{-x}\ln|x|$$

yazabiliriz. Son olarak bu iki seriyi çarparsak,

$$y_2(x) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots\right) + \frac{1}{2}x^3e^{-x}\ln|x|$$

elde ederiz ki bu, $y_1(x) = x^3 e^{-x}$ olmak üzere (6.95) tipindedir. (6.88) diferansiyel denkleminin genel çözümü böylece C_1, C_2 keyfî sabitler olmak üzere

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

olarak yazılabilir.

Bu örnekte şanslıydık ve birinci çözüm y_1'i kapalı olarak yazabildik. Bu yüzden y_2'yi bulmak için gerekli hesaplamalar basitleşti. Birinci çözüm kapalı olarak yazılamasa da, ikinci çözüm basamak düşürme yöntemi ile bulunabilir. Bu durumda hesaplar, y_1'in seri açılımı ile sürdürülmelidir. Ancak bu durumda işler çok karmaşıklaşacaktır.

6.12, 6.13 ve 6.14. örneklerde, $r_1 - r_2 = 0$ hali dışında Teorem 6.3'de sıralanan imkanlar ele alınmış oluyor. İndis denkleminin köklerinin eşit olduğu bu durumda her iki kök, r bunların ortak değerleri olmak üzere, aynı

$$y_1 = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

çözümünü vereceklerdir. Böylece Teorem 6.3'ün (ii). sonucunda belirtildiği gibi, lineer bağımsız ikinci çözüm, $C \neq 0$ olmak üzere

$$y_2 = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* (x - x_0)^n + C y_1(x) \ \ln|x - x_0|$$

şeklinde olacaktır. Bir kere y_1 bulunduktan sonra, y_2'yi basamak düşürme yoluyla bulabiliriz. Bu yöntem 6.14 örneğinde anlatıldı. Bu konuya başka bir örnek, 6.3 kısmında sıfırıncı basamaktan Bessel denkleminin çözümü sırasında verilmiştir.

ALIŞTIRMALAR

1. 'den 4.'ye diferansiyel denklemlerin tekil noktalarının yerlerini ve cinslerini bulunuz.

1. $(x^2 - 3x)\frac{d^2y}{dx^2} + (x+2)\frac{dy}{dx} + y = 0$

2. $(x^3 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (x^2 - 2x)\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

3. $(x^4 - 2x^3 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2(x-1)\frac{dy}{dx} + x^2y = 0$

4. $(x^5 + x^4 - 6x^3)\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{dy}{dx} + (x-2)y = 0$

5. 'den 26.'ya kadar problemlerdeki diferansiyel denklemlerin $x = 0$ civarındaki çözümlerini bulmak için Frobenius yöntemini kullanınız.

5. $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2-1)y = 0$

6. $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (2x^2-3)y = 0$

7. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 + \frac{8}{9}\right)y = 0$

8. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + \left(2x^2 + \frac{5}{9}\right)y = 0$

9. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$

10. $2x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2y = 0$

11. $3x\frac{d^2y}{dx^2} - (x-2)\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

12. $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + xy = 0$

13. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$

14. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + (x^4 + x)\frac{dy}{dx} - y = 0$

15. $x\frac{d^2y}{dx^2} - (x^2+2)\frac{dy}{dx} + xy = 0$

16. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

17. $(2x^2 - x)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x-2)\frac{dy}{dx} + (-2x^2 + 3x - 2)y = 0$

18. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + \frac{3}{4}y = 0$

19. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + (x-1)y = 0$

20. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + (x^3 - x)\frac{dy}{dx} - 3y = 0$

21. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 8(x^2-1)y = 0$

22. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{dy}{dx} - \frac{3}{4}y = 0$

23. $x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2y = 0$

24. $2x\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + y = 0$

25. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + (x^2+1)y = 0$

26. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + (x^2-3)y = 0$

6.3 Bessel Denklemi ve Fonksiyonlari

A. Sıfırıncı Basamaktan Bessel Denklemi

p bir parametre olmak üzere

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-p^2)y=0 \tag{6.101}$$

ikinci basamaktan lineer diferansiyel denklemine *p. basamaktan Bessel denklemi* , p. basamaktan Bessel denkleminin herhangi bir çözümüne de p. basamaktan Bessel fonksiyonu denir. Bessel denklemi ve Bessel fonksiyonları fizik ve mühendislikte bir çok problemde ortaya çıkar, bu denklemin ve çözümlerinin teori ve uygulamalarıyla ilgili pek çok yayın vardır.

$p=0$ ise (6.101) denklemi

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+xy=0 \tag{6.102}$$

haline gelir ve buna *sıfırıncı basamaktan Bessel denklemi* denir. Bu denklemin, $x=0$ noktasının bir delik komşuluğunda geçerli çözümlerini arayacağız. $x=0$, (6.102) diferansiyel denkleminin bir düzgün tekil noktasıdır ve $c_0\neq 0$ olmak üzere

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r} \tag{6.103}$$

şeklinde bir çözüm ararız. (6.103)'ü iki defa türetip (6.102)'de yerlerine koyarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r+1}=0$$

elde ederiz. Bunu sadeleştirirsek,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2c_nx^{n+r-1}+\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^{n+r-1}=0$$

ya da

$$r^2c_0x^{r-1}+(1+r)^2c_1x^r+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+r)^2c_n+c_{n-2}]x^{n+r-1}=0 \tag{6.104}$$

buluruz.

(6.104)'te x'in en küçük kuvvetinin (yani x^r'nin) katsayısını sıfıra eşitleyerek

$$r^2 = 0$$

indis denklemini elde ederiz. Köklerin

$$r_1 = 0 \quad \text{ve} \quad r_2 = 0$$

olduğunu hemen görebiliriz.

(6.104)'te x'in daha yüksek kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyerek

$$c_1(1+r)^2 = 0 \tag{6.105}$$

şartını ve

$$(n+r)^2 c_n + c_{n-2} = 0, \quad n \geq 2 \tag{6.106}$$

rekürans bağıntısını elde ederiz. (6.105)'de $r = 0$ konulunca hemen $c_1 = 0$ bulunur. (6.106)'da $r = 0$ konulunca da rekürans formülü

$$n^2 c_n + c_{n-2} = 0, \quad n \geq 2$$

veya

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{n^2}, \quad n \geq 2$$

halinde basitleşir.

Bu rekürans formülünü kullanarak birbiri ardınca

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2}, \quad c_3 = -\frac{c_1}{3^2} = 0, \quad c_4 = -\frac{c_2}{4^2} = \frac{c_0}{2^2.4^2}, \ldots$$

elde ederiz.

$c_1 = 0$ olduğundan bütün tek numaralı terimlerinin sıfır olduğunu görüyoruz. Çift numaralı terimler genel olarak

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^2.4^2.6^2.\ldots.(2n)^2}, \quad = \frac{(-1)^n c_0}{(n!)^2.2^{2n}}, \quad n \geq 1$$

şeklinde yazılabilir. (6.103)'de $r = 0$ ve c_{2n}'lerin bu değerlerini koyarak

$$y_1(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

çözümünü elde ederiz.

$c_0 = 1$ koyarak (6.102) diferansiyel denkleminin önemli bir özel çözümünü elde ederiz. Bu özel çözüm, J_0 ile gösterilen ve *birinci çeşitten ve sıfırıncı basamaktan Bessel fonksiyonu* denilen bir fonksiyon tanımlar. Yani J_0, (6.102)'nin

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \tag{6.107}$$

ile tanımlı özel çözümüdür. Bu serinin bazı terimlerini yazarsak,

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \dots \end{aligned} \tag{6.108}$$

elde ederiz.

İndis denkleminin kökleri eşit olduğundan lineer bağımsız ikinci çözüm Teorem 6.3'ün (ii). sonucunda belirtildiği gibi, $C \neq 0$ olmak üzere

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n^*(x - x_0)^n + Cy_1(x)\ \ln|x - x_0|$$

şeklinde olacaktır. Bu çözümü basamak düşürme yoluyla bulabileceğimizi biliyoruz. Bu yöntem 6.14 örneğinde anlatıldı. Aslında Teorem 4.7'ye göre bu ikinci çözüm

$$y_2(x) = J_0(x) \int \frac{e^{-\int \frac{dx}{x}}}{[J_0(x)]^2} dx$$

ve böylece

$$y_2(x) = J_0(x) \int \frac{dx}{x[J_0(x)]^2}$$

ile verilir. (6.108)'den

$$[J_0(x)]^2 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{32} - \frac{5x^6}{576} + \dots$$

olur ki,

$$\frac{1}{[J_0(x)]^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{32} + \frac{23x^6}{576} + \dots$$

ve buradan

$$y_2(x) = J_0(x) \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \frac{5x^3}{32} + \frac{23x^5}{576} + \ldots \right) dx$$

$$= J_0(x) \left(\ln|x| + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \frac{23x^6}{3456} + \ldots \right)$$

$$= J_0(x) \ln|x| + \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \ldots \right) \times$$

$$\times \left(\frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \frac{23x^6}{3456} + \ldots \right)$$

$$= J_0(x) \ln|x| + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \frac{11x^6}{13824} + \ldots$$

bulunur. Böylece ikinci çözüm olan y_2'nin baştan bir kaç terimini mertebe düşürme yoluyla bulduk. Ancak hesaplarımız yukarıdaki serinin genel c_{2n}^* katsayısı hakkında bilgi vermemektedir. Aslında genel katsayı için bir formül bulunabilecek gibi görünmüyor. Bununla birlikte

$$(-1)^2 \frac{1}{2^2(1!)^2}(1) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4},$$

$$(-1)^3 \frac{1}{2^4(2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{2^4.2^2.2} = -\frac{3}{128},$$

$$(-1)^4 \frac{1}{2^6(3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{11}{2^6.6^2.6} = \frac{11}{13824}$$

olduğuna bakarsak, y_2 yi aşağıdaki gibi daha sistematik olak yazabiliriz

$$y_2(x) = J_0(x) \ln|x| + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{2^4(2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{x^4}{2^6(3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \ldots$$

Daha da ileri giderek c_{2n}^* genel katsayısının

$$c_{2n}^* = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \right), \quad n \geq 1$$

olduğundan kuşkulanıyoruz. Pek kolay olmasa da bunun doğru olduğu gösterilebilir. Bunun doğru olduğu kabul edilirse y_2 çözümü

$$y_2(x) = J_0(x)\ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) \quad (6.109)$$

olur. (6.109) ile tanımlı y_2 çözümü, $J_0(x)$'ten lineer bağımsız olduğundan (6.102) diferansiyel denkleminin genel çözümü bunların bir lineer bileşimi olarak yazılabilir. Oysa çoğu defa böyle yapılmaz, (6.102)'nin ikinci çözümü olarak J_0 ile y_2'nin, γ sabiti

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = 0.5772.$$

ile tanımlı *Euler sabiti* olmak üzere,

$$\frac{2}{\pi}[y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_0(x)]$$

özel lineer bileşimi kullanılır. Buna *ikinci çeşitten sıfırıncı mertebeden Bessel fonksiyonu* (Weber formu) denir ve genellikle Y_0 ile gösterilir. Böylece (6.102) denkleminin ikinci çözümü

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\right]\times$$
$$\times\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+(\gamma-\ln 2)J_0(x)\right]$$

veya

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\ln\frac{|x|}{2}+\gamma\right)J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\right]\times$$
$$\times\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\right] \quad (6.110)$$

olarak alınır. Böylece Y_0 fonksiyonunu (6.102)diferansiyel denkleminin ikinci çözümü olarak alırsak genel çözüm; c_1, c_2 keyfî sabitler ve J_0 ile Y_0 sırasıyla (6.107) ve (6.110) ile tanımlı fonksiyonlar olmak üzere

$$y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x) \quad (6.111)$$

şeklinde yazılabilir.

J_0 ve Y_0 fonksiyonlarının değerleri kitaplarda tablolar halinde verilmiştir. Bu fonksiyonların bir çok ilginç özelliği Şekil 6.1'deki grafiklerinde görülmektedir.

Şekil 6.1

B. p. Basamaktan Bessel Denklemi

Şimdi 6.3A kesiminin baş tarafında tanıtılmış olan p. basamaktan Bessel denklemini inceleyeceğiz. Bu, p gerçel ve pozitif bir sabit olmak üzere

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-p^2)y=0 \tag{6.101}$$

denklemidir. Bu denklemin, $x=0$ noktasının bir delik komşuluğunda geçerli çözümlerini arayacağız. $x=0$, (6.102) diferansiyel denkleminin bir düzgün tekil noktasıdır ve $c_0\neq 0$ olmak üzere

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r} \tag{6.112}$$

şeklinde bir çözüm ararız. (6.112)'yi iki defa türetip (6.101)'de yerlerine koyar ve örneklerdeki gibi sadeleştirirsek,

$$(r^2-p^2)c_0x^r+[(1+r)^2-p^2]c_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\{[(n+r)^2-p^2]c_n+c_{n-2}\}x^{n+r}=0 \tag{6.113}$$

buluruz.

(6.113)'de x'in çeşitli kuvvetlerinin katsayısını sıfıra eşitleyerek

$$r^2 - p^2 = 0 \tag{6.114}$$

$$[(r+1)^2 - p^2]c_1 = 0 \tag{6.115}$$

ve

$$[(r+n)^2 - p^2]c_n + c_{n-2} = 0, \quad n \geq 2 \tag{6.116}$$

bulunur. (6.114) denklemi (6.101) diferansiyel denkleminin indis denklemidir. Bu denklemin köklerinin $r_1 = p > 0$ ve $r_2 = -p$ olduğunu hemen görebiliriz. $r_1 - r_2 = 2p > 0$ farkı pozitif tamsayı değilse Teorem 6.3'ten, (6.101) diferansiyel denkleminin (6.112) tipinde iki tane lineer bağımsız çözümü vardır. Halbuki $r_1 - r_2 = 2p > 0$ farkı pozitif tamsayı ise, sadece $r_1 = p$ büyük kökü için bu tür bir çözümün varlığından emin olabiliriz. Şimdi varlığı daima garanti edilmiş olan bu çözümü arayacağız.

(6.115)'te $r = r_1 = p$ koyarsak, $(2p+1)c_1 = 0$ buluruz. $p > 0$ olduğundan $c_1 = 0$ olmalıdır. (6.116)'da $r = r_1 = p$ koyarsak p büyük köküne karşılık,

$$n(n+2p)c_n + c_{n-2} = 0, \quad n \geq 2$$

veya

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{n(n+2p)}, \quad n \geq 2 \tag{6.117}$$

rekürans bağıntısını elde ederiz. $c_1 = 0$ olduğundan bütün tek numaralı terimlerinin sıfır olduğunu görüyoruz. Çift numaralı terimler genel olarak

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{(-1)^n c_0}{[2.4.6.\dots(2n)][(2+2p)(4+2p)\dots(2n+2p)]} \\ &= \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} n![(1+p)(2+p)\dots(n+p)]}, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece (6.101) diferansiyel denkleminin $r = p$ büyük üsteline karşılık olarak

$$y_1 = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+p}}{2^{2n} n![(1+p)(2+p)\dots(n+p)]}, \tag{6.118}$$

çözümünü elde ederiz. p bir pozitif tamsayı olduğu zaman bunu

$$y_1 = c_0 2^p p! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}, \tag{6.119}$$

olarak yazabiliriz.

p bir pozitif tamsayı olmadığı zaman, $y_1(x)$'i (6.119)'dakine benzer olarak yazabilmek için, faktöriyel fonksiyonunu genelleştirmemiz gerekir. Böyle bir genelleştirme, şimdi tanıtacağımız *gama fonksiyonu* denilen fonksiyon kullanılarak yapılabilir.

$N > 0$ için gamma fonksiyonu

$$\Gamma(N) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{N-1} dx, \tag{6.120}$$

yakınsak has olmayan integrali ile tanımlanır. N pozitif tamsayı olduğu zaman

$$N! = \Gamma(N+1) \tag{6.121}$$

olacağı gösterilebilir. N pozitif fakat tamsayı olmadığı zaman $N!$'i tanımlamak için (6.121)'i kullanırız. Gamma fonksiyonu yayınlarda geniş olarak araştırılmış bir fonksiyondur. $\Gamma(N)$'nin

$$\Gamma(N+1) = N\,\Gamma(N), \quad (N > 0) \tag{6.122}$$

rekürans formülünü sağlayacağı gösterilebilir. Kitaplarda $\Gamma(N)$'nin değerleri tablolar halinde verilmiştir. Bu tablolarda N genellikle $1 \leq N \leq 2$ aralığında değişir. $\Gamma(N)$'nin bu aralıktaki değerleri ve (6.122) formülü tekrar tekrar kullanılarak, bu fonksiyonun her $N > 0$ için değeri hesaplanabilir. Mesela $(3/2)!$'i hesaplamak isteyelim. (6.121)'deki tanımdan $(3/2)! = \Gamma(5/2)$ olduğunu görürüz. (6.122) formülünden de $\Gamma(5/2) = 3/2\,\Gamma(3/2)$ olduğundan tablolardan $\Gamma(3/2) \sim 0.8862$ değeri alınıp kullanılırsa, $(3/2)! = \Gamma(5/2) \sim 1.3293$ bulunur.

$N < 0$ için (6.120)'deki integral ıraksar ve böylece N'nin negatif değerleri için $\Gamma(N)$, (6.120) ile tanımlanmaz. $\Gamma(N)$'nin $N < 0$ değerleri için tanımı, (6.122) rekürans formülünün pozitif N'ler için olduğu kadar negatif N'ler için de geçerli olduğu kabul edilerek yapılır. Bu formülün tekrar tekrar kullanılmasıyla $\Gamma(N)$, N'nin her tamsayı olmayan negatif değeri için tanımlanmış olur.

Böylece $\Gamma(N)$, her $N \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$ için tanımlanmış olur. Bu fonksiyonun grafiği Şekil 6.2'de görülmektedir.

Şekil 6.2
$\Gamma(N)$'nin grafiği

Şimdi (6.118)'deki p'nin bir pozitif tamsayı olmadığı çözüme dönelim. (6.122) rekürans formülünü arka arkaya $N = n+p,\ n+p-1,\ n+p-2, \ldots,\ p+1$ için uygularsak,

$$\Gamma(n+p+1) = (n+p)(n+p-1)(n+p-2)\ldots(p+1)\Gamma(p+1)$$

elde ederiz. O zaman p bir pozitif tamsayı olmadığı zaman elde edilen (6.118) çözümünü

$$\begin{aligned} y_1 &= c_0\Gamma(p+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+p}}{2^{2n} n!\Gamma(n+p+1)} \\ &= c_0 2^p \Gamma(p+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+p} \qquad (6.123) \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Şimdi (6.121)'i $N = p$ ve $N = n + p$ için kullanırsak, (6.123) çözümünün (6.119) şekline girdiğini görüyoruz. Böylece (6.101) denkleminin $p > 0$ büyük köküne karşılık olan çözümü, p bir pozitif tamsayı olmadığı zaman, $p!$ ve $(n+p)!$ sırasıyla $\Gamma(p+1)$ ve $\Gamma(n+p+1)$ ile tanımlanmak üzere, (6.119) ile verilmektedir.

(6.119)'daki c_0 keyfî sabitini $2^p p!$ olarak alırsak, (6.101)'in bir özel çözümünü elde ederiz. Bu özel çözüm, *birinci çeşitten ve p. basamaktan Bessel fonksiyonu* denilen ve J_p ile gösterilen bir fonksiyon tanımlar. Böylece J_p fonksiyonu (6.101)'in, $(n + p)!$ sayısı p bir pozitif tamsayı olmadığı zaman $\Gamma(n + p + 1)$ olmak üzere,

$$J_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+p} \tag{6.124}$$

ile tanımlı özel çözümüdür.

Buradaki incelemelerin başından beri (6.101)'de ve bu yüzden de (6.124)'te $p > 0$ aldık. (6.101)'de $p = 0$ ise (6.101), (6.102) ile verilen sıfırıncı basamaktan Bessel fonksiyonuna, (6.124)'teki çözüm de (6.107) ile verilen birinci çeşitten ve sıfırıncı basamaktan Bessel fonksiyonuna dönüşür.

$p = 1$ için (6.101) diferansiyel denklemi

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - 1)y = 0 \tag{6.125}$$

birinci basamaktan Bessel denklemi haline gelir. (6.124)'te $p = 1$ konursa, (6.125) diferansiyel denkleminin *birinci çeşitten birinci basamaktan Bessel fonksiyonu* denilen ve J_1 ile gösterilen çözümü elde edilir. Yani J_1 fonksiyonu

$$J_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \tag{6.126}$$

ile tanımlanmıştır. (6.107) ile tanımlanmış J_0 ve (6.126) ile tanımlanmış J_1 fonksiyonlarının grafikleri Şekil 6.3'te görülmektedir.

Şekil 6.3

Birinci çeşitten Bessel fonksiyonlarının birçok ilginç özellikleri bu şekillerden gözlenebilmektedir. Bunlardan biri, J_0 ve J_1'n sönümlü titreşimler gibi davranmaları ve J_0'ın sıfırlarının J_1'in sıfırlarını ayırmasıdır.

Artık $p \geq 0$ için p. basamaktan (6.101) Bessel denkleminin bir çözümünün (6.124) ile verileceğini biliyoruz. Şimdi (6.101)'in bu birinci çözümden lineer bağımsız ikinci bir çözümünün bulunması işini kısaca ele alacağız. $p = 0$ için bunu yaptık ve çözümü (6.110) ile verdik. $p > 0$ için, $2p$ bir pozitif tamsayı olmadığında (6.101) diferansiyel denkleminin $r_2 = -p$ küçük köküne karşılık olarak (6.112) şeklinde bir çözüme sahip olacağını da gördük. Şimdi bu küçük kökle çalışacağız.

(6.115)'de $r = r_2 = -p$ koyarsak,

$$(-2p + 1)c_1 = 0 \tag{6.127}$$

(6.116)'da $r = r_2 = -p$ koyarsak,

$$n(n - 2p)c_n + c_{n-2} = 0, \quad n \geq 2 \tag{128}$$

veya

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{n(n - 2p)}, \quad n \geq 2,\ n \neq 2p \tag{6.129}$$

rekürans bağıntısını elde ederiz. (6.127), (6.128) ve (6.129)'u kullanırsak, $-p$ köküne karşılık olan $y = y_2(x)$ çözümü bulunur. Aşağıdaki biçimlerde çözümlere yol açan üç farklı durum ortaya çıkar.

(i) $2p$ bir pozitif tamsayı değilse, c_0 keyfî bir sabit ve α_{2n}'ler bilinen sabitler olmak üzere

$$y_2(x) = c_0 x^{-p}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n} x^{2n}\right) \tag{6.130}$$

olur.

(ii) $2p$ bir *tek* pozitif tamsayı olduğu zaman c_0, c_{2p} keyfî sabitler ve β_{2n}, γ_{2n}, $(n = 1, 2, \ldots)$'lar bilinen sabitler olmak üzere

$$y_2(x) = c_0 x^{-p}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{2n} x^{2n}\right) + c_{2p} x^{-p}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{2n} x^{2n}\right) \tag{6.131}$$

olur.

(iii) $2p$ bir *çift* pozitif tamsayı olduğu zaman c_{2p} keyfî bir sabit ve δ_{2n}, $(n = 1, 2, \ldots)$'lar bilinen sabitler olmak üzere

$$y_2(x) = c_0 x^{-p}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n} x^{2n}\right) \tag{6.132}$$

olur.

(i) halinde (6.130) ile tanımlı çözüm, J_p ile lineer bağımsızdır. (ii) halinde (6.131) ile $c_{2p} = 0$ olmak üzere tanımlı çözüm de, J_p ile lineer bağımsızdır. Ancak (iii) halinde (6.132) ile tanımlı çözüm, J_p'nin bir sabit katıdır ve bu yüzden J_p ile lineer bağımsız değildir. Böylece $2p$ bir *çift* pozitif tamsayı olmadığı zaman, $-p$ küçük köküne karşılık (6.112) tipinde lineer bağımsız bir çözüm vardır. Başka bir deyişle, p bir pozitif tamsayı olmadığı zaman, (6.101) diferansiyel denkleminin

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n-p} \tag{6.133}$$

tipinde, J_p ile lineer bağımsız bir çözümü vardır.

(6.133)'teki c_{2n} katsayılarını hesaplamak kolaydır. $-p$ küçük köküne karşılık olarak elde edilen (6.129) rekürans formülü, p büyük köküne karşılık olan (6.117) rekürans formülünden, buradaki p, $-p$ ile değiştirilerek elde edilebilir. Böylece (6.133) tipindeki çözüm, (6.124)'te p yerine

$-p$ konularak elde edilir. Bu bize hemen, $(n-p)!$ sayısı $\Gamma(n-p+1)$ ile tanımlanmak üzere,

$$J_{-p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n-p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}, \tag{6.134}$$

ile tanımlı J_p fonksiyonunu verir.

Böylece $p > 0$ bir pozitif tamsayı olmadığı zaman, (6.101) diferansiyel denkleminin lineer bağımsız iki çözümü, (6.124) ile tanımlı J_p ile, (6.134) ile tanımlı J_{-p} fonksiyonudur. O halde $p > 0$ bir pozitif tamsayı olmadığı zaman, p. basamaktan Bessel diferansiyel denkleminin genel çözümü, J_p ve J_{-p} sırasıyla (6.124) ve (6.134) ile tanımlı fonksiyon, C_1, C_2 keyfî sabitler olmak üzere

$$y = C_1 J_p + C_2 J_{-p}$$

ile verilir.

p bir pozitif tamsayı olduğunda, (6.132) ile tanımlı fonksiyon, daha önce de söylediğimiz gibi, J_p ile lineer bağımsız değildir. Bu durumda J_p ile lineer bağımsız çözüm, $C \neq 0$ olmak üzere

$$y_p(x) = x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* x^n + C J_p(x) \ln|x|$$

ile tanımlı $y = y_p(x)$ fonksiyonudur. Bu lineer bağımsız çözüm basamak düşürme ile bulunabilir. O zaman (6.101) diferansiyel denkleminin genel çözümü, J_p ve y_p'nin bir lineer bileşimi olarak yazılabilir. Ancak sıfırıncı basamaktan Bessel denkleminde de olduğu gibi, (6.101) diferansiyel denkleminin ikinci çözümü olarak J_p ve y_p'nin özel bir lineer bileşimini almak gelenek olmuştur. Bu özel lineer bileşim γ Euler sabiti olmak üzere

$$Y_p = \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\ln \frac{|x|}{2} + \gamma \right) J_p(x) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} + \right\}$$

$$\left\{ + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k} \right] \left[\frac{1}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \right] \right\}, \tag{6.135}$$

ile tanımlanan Y_p fonksiyonudur. Y_p çözümüne *ikinci çeşitten, p. basamaktan Bessel fonksiyonu* (Weber formu) denir.

Böylece p pozitif bir tam sayı ise, (6.101) diferansiyel denkleminin lineer bağımsız iki çözümü, (6.124) ile tanımlı J_p ile (6.135) ile tanımlı Y_p fonksiyonlarıdır. Böylece p pozitif bir tam sayı olduğunda, p. basamaktan Bessel denkleminin genel çözümü, C_1, C_2 keyfî sabitler ve J_p, Y_p sırasıyla (6.124) ve (6.135) ile tanımlı fonksiyonlar olmak üzere

$$y = C_1 J_p(x) + c_2 Y_p(x)$$

şeklinde yazılır.

ALIŞTIRMALAR

1. k bir sabit olmak üzere $J_0(kx)$ fonksiyonunun

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + k^2xy = 0$$

diferansiyel denklemini sağlayacağını gösteriniz.

2. $y = u(x)/\sqrt{x}$ dönüşümünün, (6.101)'deki p. basamaktan Bessel denklemini

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left[1 + \left(\frac{1}{4} - p^2\right)\frac{1}{x^2}\right]u = 0$$

denklemine dönüştüreceğini ispatlayınız.

3. 2. alıştırmanın sonucunu, $\frac{1}{2}$. basamaktan Bessel denkleminin çözümünü bulmak için kullanınız.

4. J_p'nin (6.124)'teki seri ifadesini kullanarak, k bir sabit olmak üzere,

$$\frac{d}{dx}[x^p J_p(kx)] = kx^p J_{p-1}(kx) \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dx}[x^{-p} J_p(kx)] = -kx^{-p} J_{p+1}(kx)$$

olacağını gösteriniz.

5. 4. problemin sonuçlarını kullanarak

$$\frac{d}{dx}[J_p(kx)] = kJ_{p-1}(kx) - \frac{p}{x}J_p(kx),$$

$$\frac{d}{dx}[J_p(kx)] = -kJ_{p+1}(kx) + \frac{p}{x}J_p(kx),$$

ve bunlardan yararlanarak da

$$\frac{d}{dx}[J_p(kx)] = \frac{k}{2}[J_{p-1}(kx) - J_{p+1}(kx)],$$

$$J_p(kx) = \frac{kx}{2p}[J_{p-1}(kx) + J_{p+1}(kx)]$$

olduğunu gösteriniz.

6. 5. problemin sonuçlarını kullanarak
(a) $J_1(x)$ ve $\frac{d}{dx}[J_1(x)]$'i, $J_0(x)$ ve $J_1(x)$ cinsinden hesapla.
(b) $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ fonksiyonunu $J_{n-\frac{1}{2}}(x)$ ve $J_{n-\frac{3}{2}}(x)$ cinsinden hesapla.

OKUNMASI TAVSİYE EDİLEN KİTAPLAR

I. Temel Teori ve Yöntemler

Agnew (1)	Hildebrand (22)
Burkhill (8)	Kaplan (3)
Coddington (12)	Martin and Reissner (38)
Ford (17)	Rainville (45)

II. Bessel Fonksiyonları İle İlgili Ek Kaynaklar

Churchill (10)	Wylie (57)
Hochstadt (24)	

III. Daha İleri Teori

Birkhoff ve Rota (6)	Ince (26)
Coddington ve Levinston (13)	

Bölüm 7

Diferansiyel Denklem Sistemleri

Bundan önceki bölümlerde, bir tek serbest değişkene bağlı tek bir denklemle uğraşıyorduk. Şimdi iki bilinmeyen fonksiyon için yazılmış iki diferansiyel denklemden oluşan sistemleri ele alacağız. İlgimizi lineer sistemler üzerinde toplayacak ve bu sistemlerin temel teorisini kısaca gözden geçireceğiz. Bu incelemede gerekli kavramları tanıttıktan sonra bazı teoremleri ispatsız olarak ifade edeceğiz. Bundan sonra çeşitli çözüm yöntemlerini anlatacağız. En sonunda da lineer sistemlerin bazı uygulamalarına sıra gelecek.

7.1 Lineer Sistemlerin Temel Teorisi

A. Lineer Sistemler ve Çözümleri

Şimdi iki bilinmeyen fonksiyon için yazılmış iki diferansiyel denklemden oluşan sistemlerle başlayacağız. Bu tür sistemler

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y + b_1(t) \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y + b_2(t) \end{cases} \tag{7.1}$$

şeklindedir. Buradaki a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 fonksiyonlarının bir $a \le t \le b$ gerçel aralığında sürekli olduklarını kabul ediyoruz. (7.1) sistemindeki $b_1(t)$, $b_2(t)$ fonksiyonları her t için sıfır oluyorsa, bu sisteme *homojen sistem*, aksi halde *homojen olmayan sistem* denir.

Örnek 7.1.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y \end{cases} \tag{7.2}$$

sistemi homojen,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y - 5t \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y - 4 \end{cases} \tag{7.3}$$

sistemi homojen değildir.

TANIM. (7.1) sisteminin *çözümü*, bir $a \leq t \leq b$ gerçel aralığında sürekli türevlere sahip olan ve bu aralıktaki her t için

$$\begin{cases} \frac{df(t)}{dt} = a_{11}(t)f(t) + a_{12}g(t) + b_1(t) \\ \frac{dg(t)}{dt} = a_{21}(t)f(t) + a_{22}g(t) + b_2(t) \end{cases}$$

eşitliklerini sağlayan bir

$$(f,\ g) \tag{7.4}$$

sıralı fonksiyon ikilisidir. Başka bir deyişle

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \tag{7.5}$$

fonksiyonları, $a \leq t \leq b$ gerçel aralığındaki her t için (7.1)'deki denklemlerin ikisini birden sağlarlar.

Gösterim. (7.1) sisteminin bir çözümünü göstermek için

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \tag{7.5}$$

yazacağız.

Örnek 7.2. Her t için $(e^{5t},\ -3e^{5t})$ ile tanımlanan ve

$$\begin{cases} x = e^{5t} \\ y = -3e^{5t} \end{cases} \tag{7.6}$$

olarak gösterilen sıralı fonksiyon çifti, (7.2) sisteminin bir çözümüdür. Yani

$$\begin{cases} x = e^{5t} \\ y = -3e^{5t} \end{cases} \tag{7.6}$$

(7.2)'deki denklem çiftinin ikisini birden sağlar. (7.6)'yı (7.2)'de yerine koyarak bunu doğrudan gösterelim.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(e^{5t}) = 2(e^{5t}) - (-3e^{5t}) \\ \frac{d}{dt}(-3e^{5t}) = 3(e^{5t}) + 6(-3e^{5t}) \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} 5e^{5t} = 2e^{5t} + 3e^{5t} \\ -15e^{5t}) = 3e^{5t} - 18e^{5t} \end{cases}$$

olur ki, (7.6) gerçekten (7.2) sisteminin bir çözümüdür. Okuyucularımız her t için $(e^{3t}, \ -e^{3t})$ ile tanımlanan ve

$$\begin{cases} x = e^{3t} \\ y = -e^{3t} \end{cases}$$

olarak gösterilen sıralı fonksiyon çiftinin de, (7.2) sisteminin bir çözümü olduğunu göreceklerdir.

Şimdi lineer sistemlerin genel teorisinin incelenmesine geçiyoruz. Bu teori ile, 4.1 kısmında daha yüksek basamaktan tek lineer denklem için verilen temel teori arasındaki benzerlik dikkatimizi çekecektir. Teorem 7.1, (7.1) sistemi ile ilgili temel varlık teoremidir.

TEOREM 7.1.

Hipotez. (7.1) sistemindeki $a_{11}, \ a_{12}, \ a_{21}, \ a_{22}, \ b_1, \ b_2$ fonksiyonları bir $a \leq t \leq b$ aralığında sürekli, t_0 bu aralığın bir noktası, c_1 ve c_2 de iki keyfî sabit olsun.

Hüküm. (7.1) diferansiyel denklem sisteminin

$$f(t_0) = c_1 \quad \text{ve} \quad g(t_0) = c_2$$

olacak şekilde bir tek

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

çözümü vardır ve bu çözüm bütün $a \leq t \leq b$ aralığında tanımlıdır.

Örnek 7.3. (7.3) sistemini ele alalım. Teorem 7.1'in hipotezindeki bütün süreklilik gereksinimleri her kapalı $a \leq t \leq b$ aralığında yerine gelmektedir. Böylece t_0 bu aralığın bir noktası, c_1 ve c_2 de iki keyfî sabit ise, (7.3) sisteminin $f(t_0) = c_1$ ve $g(t_0) = c_2$ şartlarını sağlayan bir tek $x = f(t),\ y = g(t)$ çözümü vardır. Mesela $f(2) = 5$ ve $g(2) = -7$ olacak şekilde bir tek $x = f(t),\ y = g(t)$ çözümü vardır.

B. Homojen Lineer Sistemler

(7.1) sistemindeki $b_1(t),\ b_2(t)$ fonksiyonlarının ikisinin birden her t için sıfır olduğunu kabul edelim ve

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y \end{cases} \tag{7.7}$$

lineer *homojen sistem*'ini ele alalım. Bu sistemle ilgili ilk sonucumuz şudur:

TEOREM 7.2.

Hipotez.

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = f_2(t) \\ y = g_2(t) \end{cases} \tag{7.8}$$

(7.7) homojen sisteminin lineer bağımsız iki çözümü olsun. c_1 ve c_2 de iki keyfî sabit olsun.

Hüküm.

$$\begin{cases} x = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \\ y = c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) \end{cases} \tag{7.9}$$

fonksiyon çifti de (7.7) diferansiyel denklem sisteminin bir çözümüdür.

TANIM. (7.9) çözümüne, (7.8)'deki çözümlerin lineer bileşimi denir.

Bu tanım yardımıyla Teorem 7.2'yi yeniden şöyle ifade edebiliriz.

TEOREM 7.2. (yeni ifadesi) (7.7) sisteminin iki çözümünün herhangi lineer bileşimi, yine bu sistemin bir çözümüdür.

Örnek 7.4.

$$\begin{cases} x = e^{5t} \\ y = -3e^{5t} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = e^{3t} \\ y = -e^{3t} \end{cases}$$

fonksiyon çiftlerinin (7.2) sisteminin iki çözümü olduğunu görmüştük. Teorem 7.2 bize, c_1 ve c_2 de iki keyfî sabit olmak üzere,

$$\begin{cases} x = c_1 e^{5t} + c_2 e^{3t} \\ y = -3c_1 e^{5t} - c_2 e^{3t} \end{cases}$$

çiftinin de yine (7.2) sistemin bir çözümü olduğunu söylüyor. Mesela $c_1 = 4$ ve $c_2 = -2$ için,

$$\begin{cases} x = 4e^{5t} - 2e^{3t} \\ y = -12e^{5t} + 2e^{3t} \end{cases}$$

çözümünü elde ederiz.

TANIM.

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = f_2(t) \\ y = g_2(t) \end{cases}$$

(7.7) homojen sisteminin iki çözümü olsun. İkisi birden sıfır olmayan c_1 ve c_2 sabitleri, $a \leq t \leq b$ gerçel aralığındaki her t için

$$\begin{cases} c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = 0 \\ c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) = 0 \end{cases} \tag{7.10}$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa, bu çözümlere $a \leq t \leq b$ gerçel aralığında *lineer bağımlıdırlar* denir.

TANIM.

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = f_2(t) \\ y = g_2(t) \end{cases}$$

(7.7) homojen sisteminin iki çözümü olsun. Bu çözümler $a \leq t \leq b$ gerçel aralığında lineer bağımlı değillerse, bu aralıkta *lineer bağımsızdırlar* denir. Yani $a \leq t \leq b$ gerçel aralığındaki her t için

$$\begin{cases} c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = 0 \\ c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) = 0 \end{cases} \tag{7.11}$$

olması, $c_1 = c_2 = 0$ olmasını gerektiriyorsa,

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = f_2(t) \\ y = g_2(t) \end{cases}$$

çözümleri, $a \le t \le b$ gerçel aralığında lineer bağımsızdır.

Örnek 7.5. (7.2) sisteminin

$$\begin{cases} x = e^{5t} \\ y = -3e^{5t} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = 2e^{5t} \\ y = -6e^{5t} \end{cases}$$

çözümleri her $a \le t \le b$ gerçel aralığında lineer bağımlıdır. Çünkü bu durumda (7.10) şartları

$$\begin{cases} c_1 e^{5t} + 2c_2 e^{5t} = 0 \\ -3c_1 e^{5t} - 6c_2 e^{5t} = 0 \end{cases} \tag{7.12}$$

haline gelir ve ikisi birden sıfır olmayan c_1 ve c_2 sabitleri (7.12) şartı $a \le t \le b$ aralığında sağlanacak şekilde bulunabilir. Mesela $c_1 = 2$ ve $c_2 = -1$ için bu iş olur. Diğer taraftan (7.2) sisteminin

$$\begin{cases} x = e^{5t} \\ y = -3e^{5t} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = e^{3t} \\ y = -e^{3t} \end{cases}$$

çözümleri her $a \le t \le b$ gerçel aralığında lineer bağımsızdır. Çünkü bu durumda (7.11) şartları

$$\begin{cases} c_1 e^{5t} + c_2 e^{3t} = 0 \\ -3c_1 e^{5t} - c_2 e^{3t} = 0 \end{cases}$$

haline gelir ki, bu şartın $a \le t \le b$ aralığındaki her t için sağlanması ancak $c_1 = c_2 = 0$ ile mümkündür.

Şimdi (7.7) homojen lineer sisteminin lineer bağımsız çözümlerinin kümesi ile ilgili temel teoremi ifade edeceğiz.

TEOREM 7.3. (7.7) lineer sisteminin ikişer lineer bağımsız çözümden oluşan çözüm kümeleri vardır. (7.7) lineer sisteminin her çözümü, sistemin iki lineer bağımsız çözümünden oluşan kümenin elemanlarının bir lineer bileşimi olarak yazılabilir.

Örnek 7.6.

$$\begin{cases} x = e^{5t} \\ y = -3e^{5t} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = e^{3t} \\ y = -e^{3t} \end{cases}$$

fonksiyon çiftlerinin (7.2) sisteminin iki çözümü olduğunu görmüştük. Bu, Teorem 7.3'ün birinci kısmını doğrular. Teoremin ikinci kısmı bize, (7.2) denkleminin her çözümünün c_1 ve c_2 de iki keyfî sabit olmak üzere,

$$\begin{cases} x = c_1 e^{5t} + c_2 e^{3t} \\ y = -3c_1 e^{5t} - c_2 e^{3t} \end{cases}$$

şeklinde yazılabileceğini söylüyor.

4.1. kısımda n. basamaktan bir tek homojen lineer diferansiyel denklem için genel çözümü, n tane olan lineer bağımsız çözümlerin lineer bileşimi olarak tanımladığımızı hatırlayınız. Teorem 7.2 ve 7.3'ün bir sonucu olarak şimdi benzer bir tanımı (7.7)'deki lineer homojen sistem için yapacağız.

TANIM.

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = f_2(t) \\ y = g_2(t) \end{cases}$$

(7.7) lineer homojen sisteminin lineer bağımsız iki çözümü, c_1 ve c_2 keyfî sabitler olsun.

$$\begin{cases} x = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \\ y = c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) \end{cases}$$

çözümüne (7.7) sisteminin *genel çözümü* denir.

Örnek 7.7.

$$\begin{cases} x = e^{5t} \\ y = -3e^{5t} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = e^{3t} \\ y = -e^{3t} \end{cases}$$

fonksiyon çiftleri (7.2) sisteminin lineer bağımsız iki çözümü olduğundan (7.2)'nin genel çözümü, c_1 ve c_2 de iki keyfî sabit olmak üzere,

$$\begin{cases} x = c_1 e^{5t} + c_2 e^{3t} \\ y = -3c_1 e^{5t} - c_2 e^{3t} \end{cases}$$

şeklindedir.

(7.2) sisteminin herhangi iki çözümünün lineer bağımsızlığı için, 4.1. kısmın "Wronski Teoremi"ne benzer bir teorem vereceğiz.

TEOREM 7.4.

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = f_2(t) \\ y = g_2(t) \end{cases}$$

(7.7) homojen sisteminin iki çözümü olsun. Bu çözümlerin $a \leq t \leq b$ aralığında lineer bağımsız olmaları için gerek ve yeter şart, bu aralıktaki her t için

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ g_1(t) & g_2(t) \end{vmatrix} \tag{7.13}$$

determinantının sıfırdan farklı olmasıdır.

Bu determinant için şöyle bir sonucumuz daha var:

TEOREM 7.5. Teorem 7.4'deki $\Delta(t)$ determinantı ya $a \leq t \leq b$ aralığında özdeş olarak sıfırdır, ya da hiçbir noktada sıfır olmaz.

Örnek 7.8.

$$\begin{cases} x = e^{5t} \\ y = -3e^{5t} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = e^{3t} \\ y = -e^{3t} \end{cases}$$

çözümlerinin lineer bağımsız olduğunu göstermek için Teorem 7.4'ü kullanalım. Bu durumda her $a \leq t \leq b$ kapalı aralığında

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} e^{5t} & e^{3t} \\ -3e^{5t} & -e^{3t} \end{vmatrix} = 2e^{8t} \neq 0$$

buluruz. Teorem 7.4'e göre bu çözümler her $a \leq t \leq b$ kapalı aralığında lineer bağımsızdırlar.

C. Homojen Olmayan Lineer Sistemler

Şimdi tekrar kısaca (7.1) homojen olmayan sistemine dönelim. Bir örnekle desteklenmiş bir teorem ve bir tanım, buradaki amacımız için yeterli olacaktır.

TEOREM 7.6.

Hipotez.

$$\begin{cases} x = F(t) \\ y = G(t) \end{cases}$$

(7.1) homojen olmayan lineer sisteminin bir çözümü,

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

de buna karşılık olan (7.7) homojen sisteminin bir çözümü olsun.

Hüküm.

$$\begin{cases} x = f(t) + F(t) \\ y = g(t) + G(t) \end{cases}$$

fonksiyon çifti de (7.1) homojen olmayan diferansiyel denklem sisteminin bir çözümüdür.

TANIM.

$$\begin{cases} x = F(t) \\ y = G(t) \end{cases}$$

(7.1) homojen olmayan lineer sisteminin bir çözümü,

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = f_2(t) \\ y = g_2(t) \end{cases} \tag{7.8}$$

(7.7) homojen sisteminin iki çözümü, c_1 ve c_2 de iki keyfî sabit olsun.

$$\begin{cases} x = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + F(t) \\ y = c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + G(t) \end{cases}$$

fonksiyon çiftine (7.1) homojen olmayan diferansiyel denklem sisteminin *genel çözümü* denir.

Örnek 7.9.

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t \end{cases}$$

fonksiyon çiftinin (7.3) homojen olmayan sisteminin bir çözümü olduğunu görmek kolaydır. Bu sisteme karşılık olan homojen sistem (7.2)'dir ve

$$\begin{cases} x = e^{5t} \\ y = -3e^{5t} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = e^{3t} \\ y = -e^{3t} \end{cases}$$

fonksiyon çiftlerinin (7.2) sisteminin lineer bağımsız iki çözümü olduğunu gördük. Böylece Teorem 7.6'ya göre

$$\begin{cases} x = e^{5t} + 2t + 1 \\ y = -3e^{5t} - t \end{cases},$$

(7.3) homojen olmayan sisteminin bir çözümüdür. Az önce verdiğimiz tanım da (7.3)'ün genel çözümünün, c_1 ve c_2 de iki keyfî sabit olmak üzere

$$\begin{cases} x = c_1e^{5t} + c_2e^{3t} + 2t + 1 \\ y = -3c_1e^{5t} - c_2e^{3t} - t \end{cases}$$

şeklinde yazılabileceğini söylüyor.

ALIŞTIRMALAR

1.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

sistemini gözönüne al.

(a)

$$\begin{cases} x = 2e^{5t} \\ y = e^{5t} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = e^{-t} \\ y = -e^{-t} \end{cases}$$

fonksiyon çiftlerinin bu sistemin çözümleri olduğunu gösteriniz.

(b) (a) kısmındaki iki çözümün her $a \leq t \leq b$ gerçel aralığında lineer bağımsız olduğunu gösteriniz ve sistemin genel çözümünü yazınız.

(c) Sistemin $f(0) = 1$, $g(0) = 2$ şartını sağlayan

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

çözümünü bulunuz. Bu çözüm niçin tektir? Hangi aralıkta tanımlıdır?

2.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + y \end{cases}$$

sistemini gözönüne alınız.

(a)

$$\begin{cases} x = 3e^{7t} \\ y = 2e^{7t} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = e^{-t} \\ y = -2e^{-t} \end{cases}$$

fonksiyon çiftlerinin bu sistemin çözümleri olduğunu gösteriniz.

(b) (a) kısmındaki iki çözümün her $a \leq t \leq b$ gerçel aralığında lineer bağımsız olduğunu gösteriniz ve sistemin genel çözümünü yazınız.

(c) Sistemin $f(0) = 0, \quad g(0) = 8$ şartını sağlayan

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

çözümünü bulunuz.

3. (a)

$$\begin{cases} x = 2e^{2t} \\ y = -3e^{7t} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = e^{7t} \\ y = e^{7t} \end{cases}$$

fonksiyon çiftlerinin

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$$

sistemin çözümleri olduğunu gösteriniz.

(b) (a) kısmındaki iki çözümün her $a \leq t \leq b$ gerçel aralığında lineer bağımsız olduğunu gösteriniz ve sistemin genel çözümünü yazınız.

(c)

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -5t - 2 \end{cases}$$

fonksiyon çiftinin

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 2y + 5t \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y + 17t \end{cases}$$

homojen olmayan lineer sistemin bir özel çözümü olduğunu gösteriniz ve bu sistemin genel çözümünü yazınız.

4.

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = f_2(t) \\ y = g_2(t) \end{cases}$$

(7.7) homojen lineer sisteminin iki çözümü ve $\Delta(t)$ de (7.13) ile tanımlanan determinant olsun. Δ'nın

$$\frac{d\Delta}{dt} = [a_{11}(t) + a_{22}(t)]\Delta$$

birinci basamak diferansiyel denklemini sağlayacağını gösteriniz.

5. Teorem 7.2'yi ispat ediniz.

6. Teorem 7.6'yı ispat ediniz.

7. Üç bilinmeyen fonksiyon için yazılmış

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y + a_{13}(t)z + b_1(t) \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y + a_{23}(t)z + b_2(t) \\ \frac{dz}{dt} = a_{31}(t)x + a_{32}(t)y + a_{33}(t)z + b_3(t) \end{cases} \qquad (A)$$

şeklinde üç diferansiyel denklemden oluşan sistemi ele alınız ve bu kısımda verilen teoriyi bu tür sistemlere genişletiniz.

(a) Özel olarak (7.1) ve (7.7) sistemleri için metinde yapılan çözüm, genel çözüm, lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık tanımlarını örnek alarak (A) sistemi ve ona karşılık olan homojen sistem için benzer tanımları yapınız.

(b) Bu kısımdaki teoremlerin benzerlerin (A) sistemi ve ona karşılık olan homojen sistem için de ifade ediniz.

EK ALIŞTIRMALAR

1. (a) $\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
vektörlerinin

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = (1/t)x_1 - x_2 + (1/t)x_3 \end{cases}$$

sisteminin bir tam çözümü olduğunu gösteriniz.

(b) x_1, x_2 ve x_3'ün wronskianlarının bir noktada sıfır fakat $w(t) \not\equiv 0$ olduğunu gösteriniz. Bu wronskian ile ilgili teoremle çelişiyor mu?

(c) x_3'ü t ve $w'(t)$ cinsinden ifade ediniz.

(d) Aşağıdaki vektör fonksiyonlardan hangileri verilen diferansiyel sistemin çözümüdür?

$$(i)\ \begin{bmatrix} 2t-\cos t \\ 2+\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \quad (ii)\ \begin{bmatrix} t\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(iii)\ \begin{bmatrix} t-2\sin t \\ 1-2\cos t \\ 2\sin t \end{bmatrix} \quad (iv)\ \begin{bmatrix} \cos t+\sin t \\ \cos t-\sin t \\ sint-\cos t \end{bmatrix}.$$

2. (a) $\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ t \end{bmatrix}$

vektörlerinin

$$\begin{cases} x_1' = -\frac{t}{1-t}x_2 + \frac{1}{1-t}x_3 \\ x_2' = \frac{1}{1+t}x_1 + \frac{1+t^2}{1-t^2}x_2 - \frac{1}{1-t}x_3 \\ x_3' = \frac{t}{1+t}x_1 + \frac{t^3+2t+1}{1-t^2}x_2 - \frac{t^2+2t+1}{1-t}x_3 \end{cases}$$

sisteminin çözümleri için bir taban oluşturduğunu gösteriniz.

(b) x_1, x_2 ve x_3'ün wronskianlarının bir noktada sıfır fakat $w(t) \not\equiv 0$ olduğunu gösteriniz. Bu wronskian ile ilgili teoremle çelişiyor mu?

(c) x_1, x_2 ve x_3'ün ikişer ikişer birbirlerine dik oldukları tüm t noktalarını bulunuz.

(d) Aşağıdaki vektör fonksiyonlardan hangileri verilen diferansiyel sistemin çözümüdür?

$$(i)\ \begin{bmatrix} t \\ 2+t \\ t^2 \end{bmatrix}, \quad (ii)\ \begin{bmatrix} 2 \\ t-1 \\ t(t-1) \end{bmatrix}, \quad (iii)\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1+t \\ t^2 \end{bmatrix} \quad (iv)\ \begin{bmatrix} t+1 \\ 0 \\ 1-t \end{bmatrix}$$

3. $x_1 = y,\ x_2 = y', \ldots, x_n = y^{(n-1)}$ yerine koyması

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = 0$$

diferansiyel denklemini $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ birinci basamak sistemine dönüştürür. Sistemin herhangi n çözüm vektörünün wronskianının n. basamak denklemin bunlara karşılık olan çözümlerinin wronskianı ile çakıştığını gösteriniz.

4. $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$, bir I aralığında normal homojen n bilinmeyen cinsinden birinci basamak sistem olsun. $w = det[\mathbf{x_1 x_2} \ldots \mathbf{x_n}]$ de bu denklemin I aralığında tanımlı n tane çözümünün wronskianı olsun.

(a) $w(t) = (a_{11}(t) + \ldots + a_{nn}(t))w'(t)$ eşitliğini çıkarınız.

(b) (a)'daki ifadeyi kullanarak $t_0 \in I$ iken $\forall t \in I$ için

$$w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+a_{22}(s)+\ldots+a_{nn}(s)]ds}$$

olduğunu gösteriniz.

(c) (b)'de $w(t)$ için verilen formülü kullanarak I üzerinde ya $w(t) \equiv 0$ olacağını, ya da $w(t)$ nin hiçbir zaman sıfır olamayacağını kanıtlayınız.

5. n bilinmeyenli homojen birinci basamak sistemin normal olduğu bir I aralığında en çok n tane lineer bağımsız çözümü olduğunu kanıtlayınız.

6. Bir $X = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_n]$ matris fonksiyonu türevli ise ve tekil değilse, $\mathbf{x}' = X'X^{-1}\mathbf{x}$ sisteminin, temel matrisi X olan bir birinci basamak sistem olduğunu kanıtlayınız. *Hatırlatma:* $\mathbf{x} = X\mathbf{c}$ ve $\mathbf{x}' = X'\mathbf{c}$ denklemleri arasından $\mathbf{c}$'yi yokediniz.

7. Aşağıdaki matrisleri temel matris kabul eden homojen birinci basamak sistemleri bulunuz. *Hatırlatma:* 6. probleme bakınız.

(a) $\begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} t & 1 \\ -1 & t^2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ 0 & t & t \\ 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} \sec t & \sec t & \sec t \\ 0 & \sec t & \tan t \\ 0 & \tan t & \sec t \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & e^{-t} & 0 \\ t & t & t \\ e^t & 0 & e^t \end{bmatrix}$

8-11. problemlerde homojen sistemlerin temel matrisleri verilmiştir. Homojen olmayan sistemlerin özel çözümlerini bulunuz.

8.
$$\begin{bmatrix} \cos t & \cos 2t \\ -\cos t & \cos 2t \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1' = -(\frac{1}{2}\tan t + \tan 2t)x_1 + (\frac{1}{2}\tan t - \tan 2t)x_2 + \sec 2t + \tan t \\ x_2' = -(\frac{1}{2}\tan t - \tan 2t)x_1 - (\frac{1}{2}\tan t + \tan 2t)x_2 + \sec 2t - \tan t \end{cases}$$

9. $\begin{bmatrix} e^{-t} & e^t \\ e^{-t} & 2e^t \end{bmatrix}$, $\begin{cases} x_1' = -3x_1 + 2x_2 + e^t \sec^2 t \\ x_2' = -4x_1 + 3x_2 + 2e^t \sec^2 t \end{cases}$

10. $\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{t} \\ 2t & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{cases} x_1' = -\frac{2}{t}x_1 - \frac{1}{t^2}x_2 + 1 - \frac{1}{t} \\ x_2' = 2x_1 + \frac{2}{t}x_2 + 2 - t \end{cases}$

11. $\begin{bmatrix} t & t & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix}$, $\begin{cases} x_1' = \frac{1}{t}x_1 + \frac{1}{t^2}x_2 - \frac{1}{t^2}x_3 + \frac{1}{1+t^2} \\ x_2' = 3t^2 \\ x_3' = -\frac{1}{t}x_2 + \frac{1}{t}x_3 + t^2 \end{cases}$

Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözünüz.

12. $\begin{cases} x_1' = x_1 + 3x_2 + 3e^{-2t}t^{1/2} \\ x_2' = 3x_1 + x_2 - 3e^{-2t}t^{1/2} \end{cases}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{cases} x_1' = x_1 - 3x_2 + 3e^t \sec 3t \\ x_2' = 3x_1 + x_2 \end{cases}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

14. $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_3 - \frac{1}{1+t^2} \\ x_2' = x_2 + 2x_3 - \frac{2}{1+t^2} \\ x_3' = x_1 + 2x_2 + 5x_3 + \frac{1}{1+t^2} \end{cases}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

15. $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 + 4x_3 + \frac{e^{3t}1}{t} \\ x_2' = 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2\frac{e^{3t}1}{t} \\ x_3' = 2x_1 + x_2 - x_3 + \frac{e^{3t}1}{t} \end{cases}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 6e^3 \\ 12e^3 \\ 6e^3 \end{bmatrix}$

7.2 Sabit Katsayili Homojen Sistemler

A. Giriş

Bu kısımda $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2$ katsayıları gerçel sabitler olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y \\ \frac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y \end{cases} \tag{7.14}$$

şeklindeki lineer homojen sistemlerle ilgileneceğiz. Bu tür sistemlerin çözümlerini bulmak istiyoruz ama nasıl başlayacağız? 4.1. kısımda sabit katsayılı n. basamaktan tek denklemler için üstel fonksiyonlar şeklinde çözümler aradığımızı ve bulduğumuzu hatırlayın. Yüksek basamaktan tek lineer denklemlerle, lineer sistemler arasındaki benzerliğe dayanarak (7.14) sisteminin üstel fonksiyon çözümlerini arayabiliriz. Bu yüzden A, B ve λ sabitler olmak üzere

$$\begin{cases} x = Ae^{\lambda t} \\ y = Be^{\lambda t} \end{cases} \tag{7.15}$$

şeklinde çözümler arayacağız. (7.15)'i (7.14)'te yerine koyarsak

$$\begin{cases} A\lambda e^{\lambda t} = a_1 A e^{\lambda t} + b_1 B e^{\lambda t} \\ B\lambda e^{\lambda t} = a_2 A e^{\lambda t} + b_2 B e^{\lambda t} \end{cases}$$

elde ederiz. Buradan A, B bilinmeyenleri için

$$\begin{cases} (a_1 - \lambda)A + b_1 B = 0 \\ a_2 A + (b_2 - \lambda)B = 0 \end{cases}$$

sistemini elde ederiz. Bu sistemin kuşkusuz $A = B = 0$ çözümü vardır. Ancak bu değerler (7.14) sisteminin $x = y = 0$ ilginç olmayan çözümüne götürür. Böyle bir sistemin sıfırdan farklı çözümü olması için gerek ve yeter şart,

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{7.17}$$

olmasıdır. Bu determinantı açarsak, λ bilinmeyeni cinsinden

$$\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \tag{7.18}$$

ikinci derece denklemi elde edilir. Bu denkleme (7.14) sistemine ait *karakteristik denklem*, bu denklemin $\lambda_1, \ \lambda_2$ köklerine de *karakteristik kökler* denir. (7.15) çifti, (7.14) sisteminin çözümü olacaksa, (7.15)'teki λ'nın bu köklerden birisi olması gerekir. $\lambda = \lambda_1$ olsun. (7.16) cebirsel sisteminde $\lambda = \lambda_1$ konursa, bu cebirsel sistemin $A_1, \ B_1$ gibi sıfırdan farklı çözümünü elde edebiliriz. Bu değerlerle (7.14) sisteminin sıfırdan farklı çözümü

$$\begin{cases} x = A_1 e^{\lambda t} \\ y = B_1 e^{\lambda t} \end{cases}$$

olur.

Bu incelemede birbirinden ayrı üç durum ortaya çıkabilir:

(i) $\lambda_1, \ \lambda_2$ kökleri gerçel ve farklı.

(ii) $\lambda_1, \ \lambda_2$ kökleri eşit.

(i) $\lambda_1, \ \lambda_2$ kökleri eşlenik kompleks.

B. (i). Hal. (7.18) Karakteristik Denkleminin Kökleri Gerçel ve Farklı.

(7.18) karakteristik denkleminin $\lambda_1, \ \lambda_2$ kökleri gerçel ve farklı ise, herbiri bu farklı köklerden biri için olmak üzere (7.15) yapısında iki tane farklı çözüm bulabileceğimizi umuyoruz. Bu farklı çözümler ayrıca lineer bağımsızdır. Şimdi bu durumu şu teoremle özetliyoruz:

TEOREM 7.7.

Hipotez. (7.14) denklemine ait (7.18) karakteristik denkleminin $\lambda_1, \ \lambda_2$ kökleri gerçel ve farklıdır.

Hüküm. (7.14) sisteminin, $A_1, \ B_1, \ A_2, \ B_2$ belirli sabitler olmak üzere

$$\begin{cases} x = A_1 e^{\lambda_1 t} \\ y = B_1 e^{\lambda_1 t} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = A_2 e^{\lambda_2 t} \\ y = B_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

şeklinde lineer bağımsız, sıfırdan farklı iki çözümü vardır. Böylece (7.14) sisteminin genel çözümü $c_1, \ c_2$ keyfî sabitler olmak üzere

$$\begin{cases} x = c_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 A_2 e^{\lambda_2 t} \\ y = c_1 B_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 B_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

olarak yazılabilir.

Örnek 7.10.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases} \tag{7.19}$$

sisteminin genel çözümünü bulalım. (7.15) tipinde bir çözüm kabul edelim:

$$\begin{cases} x = Ae^{\lambda t} \\ y = Be^{\lambda t} \end{cases} \tag{7.20}$$

(7.20)'yi (7.19)'da yerine koyarsak,

$$\begin{cases} A\lambda e^{\lambda t} = 6Ae^{\lambda t} - 3Be^{\lambda t} \\ B\lambda e^{\lambda t} = 2Ae^{\lambda t} + Be^{\lambda t} \end{cases}$$

ve buradan da λ bilinmeyeni için

$$\begin{cases} (6-\lambda)A - 3B = 0 \\ 2A + (1-\lambda)B = 0 \end{cases} \tag{7.21}$$

cebirsel sistemi elde edilir. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümü olabilmesi için

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. Bu determinantı açarak

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$

Karakterisitk denklemini elde ederiz. Bunu çözünce de $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 4$ köklerini buluruz. (7.21)'de $\lambda = \lambda_1 = 3$ koyunca

$$\begin{cases} 3A - 3B = 0 \\ 2A - 2B = 0 \end{cases}$$

elde ederiz. Bu sistemin sıfırdan farklı sade bir çözümü $A = B = 1$ olur. A, B, λ'nın bu değerleri için

$$\begin{cases} x = e^{3t} \\ y = e^{3t} \end{cases} \tag{7.22}$$

sıfırdan farklı çözümünü buluruz. (7.21)'de şimdi de $\lambda = \lambda_2 = 4$ koyunca

$$\begin{cases} 2A - 3B = 0 \\ 2A - 3B = 0 \end{cases}$$

elde ederiz. Bu sistemin sıfırdan farklı sade bir çözümü $A = 3,\ B = 2$ olur. A, B, λ'nın bu değerleri için de

$$\begin{cases} x = 3e^{4t} \\ y = 2e^{4t} \end{cases} \tag{7.23}$$

sıfırdan farklı çözümünü buluruz. Teorem 7.7'ye göre (7.22) ve (7.23) çözümleri lineer bağımsızdır. İstenirse Teorem 7.4 kullanılarak bu çözümlerin lineer bağımsızlığı ortaya çıkarılabilir ve (7.19) sisteminin genel çözümü, $c_1,\ c_2$ keyfî sabitler olmak üzere

$$\begin{cases} x = c_1e^{3t} + 3c_2e^{4t} \\ y = c_1e^{3t} + 2c_2e^{4t} \end{cases}$$

olarak yazılabilir.

C. (ii). Hal. (7.18) Karakteristik Denkleminin Kökleri Gerçel ve Eşit.

(7.18) karakteristik denkleminin $\lambda_1,\ \lambda_2$ kökleri gerçel ve eşit ise, (7.15) yapısında sadece bir tane çözüm bulabileceğimizi hissediyoruz. Bazı basit haller dışında bu doğrudur. Peki ikinci lineer bağımsız çözüm nasıl bulunacak? Bir tek yüksek basamak denklemde katlı kök bulunması halinde yaptıklarımızı hatırlayalım. Bu düşünce bizi ikinci çözümü

$$\begin{cases} x = Ate^{\lambda t} \\ y = Bte^{\lambda t} \end{cases}$$

şeklinde aramaya yöneltirse de, burada durum daha karmaşıktır ve ikinci çözümü

$$\begin{cases} x = (A_1t + A_2)e^{\lambda t} \\ y = (B_1t + B_2)e^{\lambda t} \end{cases} \tag{7.24}$$

şeklinde ararız. Bunu Örnek 7.11'de göstereceğiz. Önce (ii) halini bir teoremle özetleyelim.

TEOREM 7.8.

Hipotez. (7.14) denklemine ait (7.18) karakteristik denkleminin $\lambda_1,\ \lambda_2$ kökleri gerçel ve eşittir. Bunların ortak değerini λ ile gösterelim.

Hüküm. (7.14) sisteminin, A, B, A_1, A_2, B_1, B_2'ler belirli sabitler olmak üzere,

$$\begin{cases} x = Ae^{\lambda t} \\ y = Be^{\lambda t} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = (A_1 t + A_2)e^{\lambda t} \\ y = (B_1 t + B_2)e^{\lambda t} \end{cases}$$

şeklinde iki tane lineer bağımsız çözümü vardır. O zaman (7.14) sisteminin genel çözümü c_1, c_2 keyfî sabitler olmak üzere

$$\begin{cases} x = c_1 Ae^{\lambda t} + c_2(A_1 t + A_2)e^{\lambda t} \\ y = c_1 Be^{\lambda t} + c_2(B_1 t + B_2)e^{\lambda t} \end{cases}$$

olarak yazılabilir.

Örnek 7.11.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases} \tag{7.25}$$

sisteminin genel çözümünü bulalım. (7.15) tipinde bir çözüm kabul edelim:

$$\begin{cases} x = Ae^{\lambda t} \\ y = Be^{\lambda t} \end{cases} \tag{7.26}$$

(7.26)'yı (7.25)'de yerine koyarsak,

$$\begin{cases} A\lambda e^{\lambda t} = 4Ae^{\lambda t} - Be^{\lambda t} \\ B\lambda e^{\lambda t} = Ae^{\lambda t} + 2Be^{\lambda t} \end{cases}$$

ve buradan da λ bilinmeyeni için

$$\begin{cases} (4 - \lambda)A - B = 0 \\ A + (2 - \lambda)B = 0 \end{cases} \tag{7.27}$$

cebirsel sistemi elde edilir. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümü olabilmesi için

$$\begin{vmatrix} 6 - \lambda & -3 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. Bu determinantı açarak

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

karakterisitk denklemini elde ederiz. Buradan da $(\lambda-3)^2=0$ buluruz. Böylece (7.28) karakteristik denkleminin kökleri gerçel ve eşittir $3,3$. (7.27)'de $\lambda=3$ koyunca

$$\begin{cases} A-B=0 \\ A-B=0 \end{cases}$$

elde ederiz. Bu sistemin sıfırdan farklı sade bir çözümü $A=B=1$ olur. A,B,λ'nın bu değerleri için (7.25) sisteminin

$$\begin{cases} x=e^{3t} \\ y=e^{3t} \end{cases} \tag{7.29}$$

sıfırdan farklı çözümünü buluruz.

Karakteristik denklemin köklerinin ikisi de 3 olduğundan, ikinci çözüm, $\lambda=3$ olmak üzere (7.24) şeklinde olacaktır. Böylece A_1 ile B_1 aynı zamanda sıfır olmamak şartıyla $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2$ sabitlerini,

$$\begin{cases} x=(A_1t+A_2)e^{3t} \\ y=(B_1t+B_2)e^{3t} \end{cases} \tag{7.30}$$

ifadesi (7.25)'in çözümü olacak şekilde belirleyeceğiz. (7.30)'u (7.25)'te yerine yazarsak

$$\begin{cases} (3A_1t+3A_2+A_1)e^{3t}=4(A_1t+A_2)e^{3t}-(B_1t+B_2)e^{3t} \\ (3B_1t+3B_2+B_1)e^{3t}=(A_1t+A_2)e^{3t}+2(B_1t+B_2)e^{3t} \end{cases}$$

ve buradan da

$$\begin{cases} (A_1-B_1)t+(A_2-A_1-B_2)=0 \\ (A_1-B_1)t+(A_2-A_1-B_2)=0 \end{cases}$$

cebirsel sistemi elde edilir ki, bu eşitliklerin özdeşlik olması için

$$\begin{cases} A_1-B_1=0, \quad A_2-A_1-B_2=0 \\ A_1-B_1=0, \quad A_2-A_1-B_2=0 \end{cases} \tag{7.31}$$

olması gerekir. Böylece (7.30)'un, (7.25) sisteminin bir çözümü olması için $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2$ sabitleri, (7.31) denklemleri sağlanacak şekilde seçilmelidir. $A_1-B_1=0$ denklemlerinden $A_1=B_1$ bulunur. (7.31)'deki diğer iki denklem, A_2 ile B_2'nin

$$A_1=B_1=A_2-B_2 \tag{7.32}$$

eşitliğini sağlamaları gerektiğini gösterir. A_1 ile B_1 için kolayımıza gelen ve sıfır olmayan her sayıyı alabiliriz. $A_1 = 1$ ve $B_1 = 1$ alalım. O zaman (7.32) denklemi $A_2 - B_2 = 1$ halini alır. A_2 ve B_2 için bu bağıntıyı sağlayan her sayıyı alabiliriz. $A_2 = 1$ ve $B_2 = 0$ alalım. O zaman

$$\begin{cases} x = (t+1)e^{3t} \\ y = te^{3t} \end{cases} \tag{7.33}$$

çözümünü elde ederiz. Teorem 7.8'e göre (7.29) ve (7.33) çözümleri lineer bağımsızdır ve (7.25) sisteminin genel çözümü c_1, c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$\begin{cases} x = c_1e^{3t} + c_2(t+1)e^{3t} \\ y = c_1e^{3t} + c_2te^{3t} \end{cases}$$

olarak yazılabilir.

D. (iii). Hal. (7.18) Karakteristik Denkleminin Kökleri Kompleks ve Eşlenik.

(7.18) karakteristik denkleminin λ_1, λ_2 kökleri kompleks ve eşlenik $a+bi$ ve $a-bi$ sayıları ise, herbiri bir köke karşılık olmak üzere (7.15) yapısında iki tane çözüm bulabileceğiz:

$$\begin{cases} x = A_1^*e^{(a+bi)t} \\ y = B_1^*e^{(a+bi)t} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = A_2^*e^{(a-bi)t} \\ y = B_2^*e^{(a-bi)t} \end{cases} \tag{7.34}$$

Ancak bunlar kompleks çözümlerdir. Gerçel çözümler elde etmek için (7.34)'deki çözümlerden birincisini alır ve şöyle devam ederiz: Önce bu çözümdeki komplleks katsayıları A_1, A_2, B_1, B_2'ler gerçel sabitler olmak üzere, $A_1^* = A_1 + iA_2$ ve $B_1^* = B_1 + iB_2$ şeklinde yazarız. Sonra

$$e^{i\theta} = \cos\theta + \sin\theta$$

şeklinde olan Euler formülünü kullanarak (7.34)'deki birinci çözümü

$$\begin{cases} x = (A_1 + iA_2)e^{at}(\cos bt + i\sin bt) \\ y = (B_1 + iB_2)e^{at}(\cos bt + i\sin bt) \end{cases}$$

haline getiririz. Bunu yeniden

$$\begin{cases} x = e^{at}[(A_1\cos bt - A_2\sin bt) + i(A_2\cos bt + A_1\sin bt)] \\ y = e^{at}[(B_1\cos bt - B_2\sin bt) + i(B_2\cos bt + B_1\sin bt)] \end{cases} \tag{7.35}$$

olarak yazmak mümkündür. Kompleks fonksiyonlardan

$$f_1(t) + if_2(t), \ g_1(t) + ig_2(t)$$

gibi bir çiftin (7.14) sisteminin çözümü olabilmesi için hem gerçel kısımlarından oluşan $f_1(t), \ g_1(t)$ çiftinin ve hem de sanal kısımlarından oluşan $f_2(t), \ g_2(t)$ çiftinin (7.14) sisteminin ayrı ayrı çözümleri olması gerekir. Böylece (7.14) sisteminin (7.35) çözümünün gerçel kısmı olan

$$\begin{cases} x = e^{at}(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) \\ y = e^{at}(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) \end{cases} \tag{7.36}$$

ve sanal kısmı olan

$$\begin{cases} x = e^{at}(A_2 \cos bt + A_1 \sin bt) \\ y = e^{at}(B_2 \cos bt + B_1 \sin bt) \end{cases} \tag{7.37}$$

ayrı ayrı (7.14) sisteminin çözümleridirler. Ayrıca bu (7.36) ve (7.37) çözümleri lineer bağımsızdırlar. (7.13) determinantını bu çözümler için hesaplayarak lineer bağımsızlığı gösterebiliriz.

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \begin{vmatrix} e^{at}(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) & e^{at}(A_2 \cos bt + A_1 \sin bt) \\ e^{at}(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) & e^{at}(B_2 \cos bt + B_1 \sin bt) \end{vmatrix} \\ &= e^{2at}(A_1 B_2 - A_2 B_1) \end{aligned} \tag{7.38}$$

B_1^* kompleks sayısı A_1^* kompleks sayısının bir gerçel katı olmadığından $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ olur ki $\Delta(t) \neq 0$ olur. Böylece Teorem 7.4'ten (7.36) ve (7.37) çözümlerinin gerçekten lineer bağımsız oldukları ortaya çıkar. Bu iki gerçel çözümün lineer bileşimleri, (7.14) sisteminin genel çözümü olur. (7.34)'deki çözümlerden ikincisinin alınması, yeni çözümler ortaya çıkarmaz. Bunları bir teorem halinde özetleyelim.

TEOREM 7.9.

Hipotez. (7.14) denklemine ait (7.18) karakteristik denkleminin $\lambda_1, \ \lambda_2$ kökleri kompleks ve eşlenik $a + bi$ ve $a - bi$ sayılarıdır.

Hüküm. (7.14) sisteminin, $A_1, \ A_2, \ B_1, \ B_2$'ler belirli gerçel sabitler olmak üzere,

$$\begin{cases} x = e^{at}(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) \\ y = e^{at}(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = e^{at}(A_2 \cos bt + A_1 \sin bt) \\ y = e^{at}(B_2 \cos bt + B_1 \sin bt) \end{cases}$$

şeklinde iki tane lineer bağımsız çözümü vardır. O zaman (7.14) sisteminin genel çözümü c_1, c_2 keyfî sabitler olmak üzere

$$\begin{cases} x = e^{at}[c_1(A_1\cos bt - A_2\sin bt) + c_2(A_2\cos bt + A_1\sin bt)] \\ y = e^{at}[c_1(B_1\cos bt - B_2\sin bt) + c_2(B_2\cos bt + B_1\sin bt)] \end{cases}$$

olarak yazılabilir.

Örnek 7.12.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -5x + y \end{cases} \tag{7.39}$$

sisteminin genel çözümünü bulalım. (7.15) tipinde bir çözüm kabul edelim:

$$\begin{cases} x = Ae^{\lambda t} \\ y = Be^{\lambda t} \end{cases} \tag{7.40}$$

(7.40)'ı (7.39)'da yerine koyarsak,

$$\begin{cases} A\lambda e^{\lambda t} = 3Ae^{\lambda t} + 2Be^{\lambda t} \\ B\lambda e^{\lambda t} = -5Ae^{\lambda t} + Be^{\lambda t} \end{cases}$$

ve buradan da λ bilinmeyeni için

$$\begin{cases} (3-\lambda)A + 2B = 0 \\ -5A + (1-\lambda)B = 0 \end{cases} \tag{7.41}$$

cebirsel sistemi elde edilir. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümü olabilmesi için

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. Bu determinantı açarak

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

karakterisitk denklemini elde ederiz. Böylece (7.28) karakteristik denkleminin kökleri kompleks ve eşlenik $2 \mp 3i$ sayıları olur. (7.41)'de $\lambda = 2 + 3i$ koyunca

$$\begin{cases} (1-3i)A + 2B = 0 \\ -5A + (-1-3i)B = 0 \end{cases}$$

elde ederiz. Bu sistemin sıfırdan farklı sade bir çözümü $A = 2,\ B = -1 + 3i$ olur. A, B, λ'nın bu değerleri için (7.39) sisteminin

$$\begin{cases} x = 2e^{(2+3i)t} \\ y = (-1+3i)e^{(2+3i)t} \end{cases}$$

sıfırdan farklı çözümünü buluruz. Euler formülünü kullanılınca

$$\begin{cases} x = e^{2t}[(2\cos 3t) + i(2\sin 3t)] \\ y = e^{2t}[(-\cos 3t - 3\sin 3t) + i(3\cos 3t - \sin 3t)] \end{cases}$$

elde edilir. (7.39) sisteminin çözümü olan bu kompleks fonksiyon çiftinin gerçel ve sanal kısımları ayrı ayrı (7.39) denkleminin çözümü olduğundan,

$$\begin{cases} x = 2e^{2t}\cos 3t \\ y = -e^{2t}(\cos 3t + 3\sin 3t) \end{cases} \tag{7.42}$$

ve

$$\begin{cases} x = 2e^{2t}\sin 3t \\ y = e^{2t}(3\cos 3t - \sin 3t) \end{cases} \tag{7.43}$$

gibi iki tane gerçel çözüm elde edilir. (7.42) ve (7.43) çözümleri lineer bağımsız olduğundan son olarak (7.39) sisteminin genel çözümü, $c_1,\ c_2$ keyfî sabitler olmak üzere

$$\begin{cases} x = 2e^{2t}(c_1\cos 3t + c_2\sin 3t) \\ y = e^{2t}[c_1(-\cos 3t - 3\sin 3t) + c_2(3\cos 3t - \sin 3t)] \end{cases}$$

olarak yazılabilir.

ALIŞTIRMALAR

1.'den 22.'ye kadar problemlerdeki lineer sistemlerin herbirinin genel çözümünü bulunuz.

1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}$ 6. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 3y \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = 9x + 2y \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$ 10. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 6x - y \end{cases}$

11. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$ 14. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 3y \end{cases}$

15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$ 16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$

17. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$ 18. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$

19. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 2y \end{cases}$ 20. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$

21. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$ 22. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$

23. $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2$ katsayıları gerçel sabitler olmak üzere

$$\begin{cases} t\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y \\ t\frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y \end{cases}$$

sistemini gözönüne al. $t = e^s$ dönüşümünün bu sistemi bir sabit katsayılı lineer sisteme dönüştüreceğini gösteriniz.

24.
$$\begin{cases} t\frac{dx}{dt} = x + y \\ t\frac{dy}{dt} = -3x + 5y \end{cases}$$
sistemini çözmek için 23. problemin sonucunu kullanınız.

25.
$$\begin{cases} t\frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ t\frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$
sistemini çözmek için 23. problemin sonucunu kullanınız.

26. $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2$ katsayıları gerçel sabitler olmak üzere
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y \end{cases}$$
sistemini gözönüne al. Bu sistemin
$$\begin{cases} x = Ae^{\lambda t} \\ y = Be^{\lambda t} \end{cases}$$
şeklinde bir çözüme sahip olması için $a_2b_1 > 0$ şartının yeter fakat gerek olmayan bir şart olduğunu gösteriniz.

Bu kısımdaki sonuçları genelleştirerek 27., 28., 29. ve 30. problemleri çözünüz.

27. $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - z \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y - 4z \\ \frac{dz}{dt} = 4x + y - 4z \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y + z \\ \frac{dz}{dt} = -3x - 6y + 6z \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - z \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y + z \\ \frac{dz}{dt} = -3x + y - z \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y + 2z \\ \frac{dz}{dt} = -3x - 6y + z \end{cases}$$

EK ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki birinci basamak sistemlerin tam çözümlerini ve verildiğinde başlangıç koşullarını sağlayan çözümlerini bulunuz.

1. $\begin{cases} x_1' = -2x_1 - 13x_2 \\ x_2' = x_1 + 4x_2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1' = -3x_1 - 4x_2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1' = -\frac{3}{2}x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 + \frac{5}{2}x_2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -2x_1 - x_2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1' = -3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 4x_2 \\ x_2' = -2x_1 - x_2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 5x_1 - 3x_2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + 3x_2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 25x_1 - 10x_2 \end{cases} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 40 \end{bmatrix}$

10. $\begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2 \\ x_2' = -3x_1 + 2x_2 + 2\sin t \end{cases} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + t \\ x_2' = 3x_1 - 2x_2 + 2t \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1' = -2x_2 - 2\sec 2t \\ x_2' = 2x_1 + 2\csc 2t \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_3 \\ x_2' = -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_3' = 4x_1 - 3x_3 \end{cases} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

14. $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = 2x_1 - x_2 - 5x_3 \end{cases} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_3 \\ x_2' = -2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_3' = 8x_1 - 3x_3 \end{cases} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$

16. $\begin{cases} x_1' = \frac{1}{2}x_1 - x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{2t}{1+t^2} \\ x_2' = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{2t}{1+t^2} \\ -\frac{1}{2}x_1 - x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

17. $\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2' = -x_1 + 2x_2 + e^{-t} \\ x_3' = -x_1 - 3x_2 - 1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2' = -x_1 + 4x_2 + e^{2t} \\ x_3' = 3x_1 - x_2 - 5 \end{cases}$

19. $\begin{array}{c} (D+2)x + (D+4)y = 1 \\ (D+1)x + (D+5)y = 2 \end{array}$

20. $\begin{array}{c} (2D+1)x + (D+2)y = 0 \\ (D+3)x + (D+6)y = -3e^t \end{array}$

21. $\begin{array}{c} (D+1)x + (4D-2)y = t-1 \\ (D+2)x + (5D-2)y = 2t-1 \end{array}$

22. $\begin{array}{c} (D+5)x + (D+7)y = 4e^{2t} \\ (2D+1)x + (3D+1)y = 0 \end{array}$

23. $\begin{cases} (2D+1)x + (D+2)y = 6e^t \\ (D+2)x + (D+4)y = 4e^{-t} \end{cases}$

24. $\begin{array}{c} (2D+1)x + (D-1)y = -3\cos t \\ (D+2)x + (D+3)y = 5\sin t \end{array}$

25. $\begin{array}{c} (2D+1)x + (D+2)y = 8e^{-t} \\ (D^2+D+9)x + (D^2-2D+12)y = 6 \end{array}$

26. $\begin{array}{c} (2D+1)x + (D^2+6D+1)y = 0 \\ (D+2)x + (D^2+2D+5)y = 6e^{2t} \end{array}$

27. $$\begin{gathered}(2D^2+5)x+(D^2+3)y=-8\sin 3t\\(D^2+7)x+(D^2+5)y=8\sin 3t\end{gathered}$$

28. $$\begin{gathered}(2D+1)x+(D+1)y=0\\(D-2)x+(D-1)y=0\end{gathered}$$

29. $$\begin{gathered}Dx+(D-2)y=-\ln|\,t\,|\\Dx+(2D-3)y=1-\ln|\,t\,|\end{gathered}$$

30. $$\begin{gathered}(2D+11)x+(D+3)y+(D-2)z=14e^t\\(D-2)x+(D-1)y+Dz=-2e^t\\(D+1)x+(D-3)y+(2D-4)z=4e^t\end{gathered}$$

31. $$\begin{gathered}(3D+1)x+(D+7)y=e^{-t}\\(2D+1)x+(D+5)y=e^{-t}\end{gathered}$$

32. $$\begin{gathered}(D+5)x+(2D+1)y=e^{-t}+e^t\\(D+7)x+(3D+1)y=0\end{gathered}$$

33. $$\begin{gathered}(D+5)x+(D+7)y=2e^t\\(2D+1)x+(3D+1)y=e^t\end{gathered}$$

34. $$\begin{gathered}(D+2)x+(D+3)y=-4\\(2D-6)x+(3D-4)y=2\end{gathered}$$

35. $$\begin{gathered}(D+1)x+(D+2)y=-e^t\\(3D+1)x+(4D+7)y=-7e^t\end{gathered}$$

36. $$\begin{gathered}(D+1)x+(D+2)y=-t+1\\(5D+1)x+(6D+3)y=-2t+1\end{gathered}$$

37. $$\begin{gathered}(2D+1)x+(D+2)y=e^{-t}\\(3D-7)x+(3D+1)y=0\end{gathered}$$

38. $$\begin{gathered}(2D+1)x+(D+2)y=\sin t\\(3D+1)x+(3D+5)y=\cos t\end{gathered}$$

39. Ağırlıkları w olan iki cisim tam esnek, ağırlıksız, T gerilmesi

altında gerilmiş elastik bir tele bağlanmışlardır. Parçacıklar telin boyuna dik doğrultuda o kadar küçük genliklerle titreşiyorlar ki,

(a) Teldeki gerilme sabit kalıyor,

(b) şekildeki açılar sinüsleri tanjantları ile yaklaştırılabilecek kadar küçük oluyor.

Telin sağladığı elastik kuvvet dışındaki bütün kuvvetleri ihmal ederek sistemin davranışını temsil eden diferansiyel denklemleri yazınız. Sistemin doğal frekanslarını ve her frekansta iki cismin titreşim genliklerinin oranını bulunuz.

40.
$$\begin{aligned}(2D+1)x+(D+1)y&=0\\(D-4)x+(D-3)y&=0\end{aligned}$$

sisteminin karakteristik denkleminin $\lambda = 1$ katlı kökü olduğunu gösteriniz. Sistemin a, b, c, d keyfi sabitler olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} te^t$$

şeklinde değil de

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} e^t$$

şeklinde çözümlere sahip olacağını gösteriniz. Sistemin bir tam çözümünü bulunuz.

41.
$$\begin{aligned}(2D+1)x+(D+1)y&=e^t\\(D-7)x+(D-5)y&=0\end{aligned}$$

sistemindeki e^t fonksiyonunun, sistemin tamamlayıcı fonksiyonu ile çakıştığını gösteriniz. Sistemin a, b, c, d keyfi sabitler olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} te^t$$

şeklinde değil de

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} e^t$$

şeklinde çözümlere sahip olacağını gösteriniz. Sistemin bir tam çözümünü bulunuz.

42.

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}e^{-2t}+\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}t^2e^t+\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}te^t+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}e^t$$

vektörünün 6. örnekteki sistemin bir özel çözümü olduğunu gösteriniz.

43.

$$D^m(te^{\lambda t}=\lambda^m te^{\lambda t}+m\lambda^{m-1}e^{\lambda t}$$

olduğunu gösteriniz. Böylece $p(D)$ bir polinom, $P(D)$ de elemanları polinomlar olan bir matris ise;

$$p(D)te^{\lambda t}=p(\lambda)te^{\lambda t}+p'(\lambda)e^{\lambda t}$$

ve

$$P(D)te^{\lambda t}=P(\lambda)te^{\lambda t}+P'(\lambda)e^{\lambda t}$$

olacağını gösteriniz.

44. 43. alıştırmanın sonuçlarını kullanarak $\lambda=r$, $\mid P(\lambda)\mid=0$ karakteristik denkleminin bir katlı kökü ise $\mathbf{x}_1=\mathbf{a}e^{rt}$ ve $\mathbf{x}_2=\mathbf{b}_1te^{rt}+\mathbf{b}_2e^{rt}$ vektör fonksiyonlarının $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ ve $\mathbf{b_1}\neq\mathbf{0}$ olmak üzere $\mathbf{a},\mathbf{b_1},\mathbf{b_2}$ vektörlerinin

$$P(r)\mathbf{a}=0\quad P(r)\mathbf{b_1}=0\quad P(r)\mathbf{b_2}+P'(r)\mathbf{b_1}=0$$

olması koşuluyla $P(D)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ sisteminin çözümleri olduklarını gösteriniz.

45. $D^m(t^2e^{\lambda t})=\lambda^m t^2e^{\lambda t}+2m\lambda^{m-1}te^{\lambda t}+m(m-1)\lambda^{m-2}e^{\lambda t}$ olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak $p(D)$, D cinsinden bir polinom, $P(D)$ de elemanları D cinsinden polinomlar olan bir matris olmak üzere ;

$$p(D)(t^2e^{\lambda t})=p(\lambda)t^2e^{\lambda t}+2p'(\lambda)te^{\lambda t}+p''(\lambda)e^{\lambda t}$$

ve

$$P(D)(t^2e^{\lambda t})=P(\lambda)t^2e^{\lambda t}+2P'(\lambda)te^{\lambda t}+P''(\lambda)e^{\lambda t}$$

olacağını gösteriniz.

46. 45. probleminin sonuçlarını kullanarak λ'nın $\mid P(\lambda) \mid = 0$ denkleminin bir üç katlı kökü olması halinde

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}e^{rt}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_1 te^{rt} + \mathbf{b}_2 e^{rt} \quad \text{ve} \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{c}_1 t2e^{rt} + \mathbf{c}_2 te^{rt} + \mathbf{c}_3 e^{rt}$$

vektör fonksiyonlarının $\mathbf{a_1}, \mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \mathbf{c_3}$ uygun seçilmiş vektörler olmak üzere,

$$P(r)\mathbf{a} = 0, \quad P(r)\mathbf{b_1} = 0, \quad P(r)\mathbf{b_2} + P'(r)\mathbf{b_1} = 0,$$

$$P(r)\mathbf{c_1} = 0, \quad P(r)\mathbf{c_2} + P'(r)\mathbf{c_1} = 0, \quad P(r)\mathbf{c_3} + P'(r)\mathbf{c_2} + P''(r)\mathbf{c_1} = 0$$

olması koşuluyla $P(D)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sisteminin çözümleri olduklarını gösteriniz.

47. 43. ve 45. problemlerinin sonuçlarını $t^3 e^{\lambda t}$ fonksiyonu için genelleştiriniz.

48. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sabit sütun vektörleri ve $P(D)$ de elemanları D ye bağlı polinomlar olan bir matris ise;
(a) $P(D)\mathbf{a} = P(0)\mathbf{a}$ (b) $P(D)\mathbf{b}t = P(0)\mathbf{b}t + P'(0)\mathbf{b}$
(c) $P(D)\mathbf{c}t^2 = P(0)\mathbf{c}t^2 + 2P'(0)\mathbf{c}t + P''(0)\mathbf{c}$
olacağını gösteriniz.

49. 44. problemde $\lambda = r$ sabit katsayılı iki lineer diferansiyel denklemden meydana gelen bir sistemin karakteristik denkleminin iki katlı kökü olduğu zaman

$$P(r)\mathbf{b_1} = 0 \quad P(r)\mathbf{b_2} + P'(r)\mathbf{b_1} = 0$$

sisteminin sıfırdan farklı $\mathbf{b_1}$ ve $\mathbf{b_2}$ vektörleri vermek üzere daima çözülebileceğini gösteriniz.

7.3 Operatörler Yöntemi

A. Diferansiyel Operatörler

Bu kısımda sabit katsayılı lineer sistemleri çözmek için sembolik bir yöntem tanıtacağız. Bu yöntem *diferansiyel operatör* denilen ve şimdi tanıtılacak olan bir gerecin kullanımına dayanır.

x, t serbest değişkeninin n-kere türetilebilen bir fonksiyonu olsun. t'ye göre türetme operatörünü D ile göstereceğiz ve D'ye bir diferansiyel operatör diyeceğiz. dx/dt'yi bu diferansiyel operatör cinsinden Dx ile gösteririz. Yani,

$$Dx \equiv \frac{dx}{dt}$$

olur. Benzer şekilde t'ye göre ikinci türevi D^2x ile gösteririz. Böylece devam edilirse, x'in t'ye göre n. türevi D^nx olur. Yani

$$D^nx = \frac{d^nx}{dt^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

olur. Operatör gösterimini daha da genişleterek

$$(D + c)x = \frac{dx}{dt} + cx$$

ve a, b sabit olmak üzere

$$(aD^n + bD^m)x = a\frac{d^nx}{dt^n} + b\frac{d^mx}{dt^m}$$

yazarız.

$a_0, a_1, \ldots, a_n$'ler gerçel sabitler olmak üzere

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_nx = 0$$

genel lineer diferansiyel denklemi bu gösterimle

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_n)x = 0$$

olarak yazılır. Buradaki D^n, $D^{n-1}, \ldots, D$ operatörlerinin x ile çarpılacak büyüklükler değil de, bu fonksiyon üzerine uygulanacak türetme işlemleri olduğuna dikkat ediniz. $a_0, a_1, \ldots, a_n$'ler gerçel sabitler olmak üzere

$$a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n$$

ifadesinin kendisine n. basamaktan, sabit katsayılı lineer diferansiyel operatör denir. Değişken katsayılı lineer diferansiyel operatörleri 11. Bölüm'de kullanılmıştır ama burada onlarla görülecek işimiz yok.

Örnek 7.13. $3D^2 + 5D - 2$ lineer diferansiyel operatörünü ele alalım. x, t'nin türevli bir fonksiyonu ise,

$$(3D^2 + 5D - 2)x = 3\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} - 2x$$

olur. Mesela $x + t^3$ ise

$$(3D^2 + 5D - 2)t^3 = 3\frac{d^2t^3}{dt^2} + 5\frac{dt^3}{dt} - 2t^3 = 18t + 15t^2 - 2t^3$$

olur.

Şimdi sabit katsayılı lineer diferansiyel operatörlerin bazı özelliklerini inceleyeceğiz. İfadeyi kullanışlı hale getirmek için bu operatörü L harfi ile göstereceğiz. Yani $a_0, a_1, \ldots, a_n$'ler gerçel sabitler olmak üzere

$$L = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n$$

olacak. f_1, f_2 fonksiyonları t'nin n defa türetilebilen fonksiyonları, c_1, c_2 sabitler olsun.

$$L[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 L[f_1] + c_2 L[f_2]$$

olacağı gösterilebilir. Mesela $L = 3D^2 + 5D - 2$ lineer diferansiyel operatörünü $3t^2 + 2\sin t$ üzerine uygularsak

$$L[3t^2 + 2\sin t] = L[3t^2] + L[2\sin t]$$

veya

$$(3D^2+5D-2)[3t^2+2\sin t] = (3D^2+5D-2)[3t^2]+(3D^2+5D-2)[2\sin t]$$

olur. $a_0, a_1, \ldots, a_m$, $b_0, b_1, \ldots, b_n$'ler gerçel sabitler olmak üzere

$$L_1 = a_0 D^m + a_1 D^{m-1} + \ldots + a_{m-1} D + a_m$$

ve

$$L_2 = b_0 D^n + b_1 D^{b-1} + \ldots + b_{n-1} D + b_n$$

ayrıca

$$L_1(r) = a_0 r^m + a_1 r^{m-1} + \ldots + a_{m-1} r + a_m$$

ve

$$L_2(r) = b_0 r^n + b_1 r^{b-1} + \ldots + b_{n-1} r + b_n$$

de L_1, L_2 operatörlerinde D ile r'nin biçimsel olarak değiştirilmesiyle elde edilmiş iki polinom olsun. Bu polinomların çarpımını $L(r)$ ile gösterelim. Yani,

$$L(r) = L_1(r) + L_2(r)$$

olsun. O zaman f, $n+m$ kere türetilebilen bir fonksiyon olmak üzere

$$L_1 L_2 f = L_2 L_1 f = Lf \tag{7.44}$$

olacağı kanıtlanabilir. Burada L operatörü, $L(r)$ çarpım polinomunda r'nin D ile biçimsel olarak değiştirilmesinden elde edilen operatördür. (7.44) denklemi, sabit katsayılı lineer diferansiyel operatörlerin iki önemli özelliğini ortaya çıkarır. Birincisi, f üzerine önce L_1'in ve sonra L_2'nin etkimesinin sonucunun, önce L_2'nin ve sonra L_1'in etkimesinin sonucuna eşit olduğudur. İkincisi de, f üzerine önce L_1'in ve sonra çıkan fonksiyon üzerine L_2'nin etkimesinin sonucunun, f üzerine L çarpım operatörünün etkimesinin sonucuyla aynı olduğudur. Bu önemli özellikleri aşağıdaki örnekle göstereceğiz.

Örnek 7.14. $L_1 = D^2 + 1$, $L_2 = 3D + 2$, $f(t) = t^2$ olsun. O zaman

$$L_1 L_2 f = (D^2+1)(3D+2)t^3 = (D^2+1)(9t^2+2t^3)$$

$$= 9(D^2+1)t^2 + 2(D^2+1)t^3 = 9(2+t^2) + 2(6t+t^3) = 2t^3 + 9t^2 + 12t + 18$$

ve

$$L_2 L_1 f = (3D+2)(D^2+1)t^3 = (3D+2)(6t+t^3) = 6(3D+2)t + (3D+2)t^3$$

$$= 6(3+2t) + (9t^2+2t^3) = 2t^3 + 9t^2 + 12t + 18$$

ve son olarak $L = 3D^3 + 2D^2 + 3D + 2$ olduğundan

$$Lf = (3D^3 + 2D^2 + 3D + 2)t^3 = 3(6) + 2(6t) + 3(3t^2) + 2t^3$$
$$= 2t^3 + 9t^2 + 12t + 18$$

bulunur.

$a_0, a_1, \ldots, a_n$'ler gerçel sabitler olmak üzere

$$L = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n$$

ve

$$L(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n$$

de L operatöründe D ile r'nin biçimsel olarak değiştirilmesiyle elde edilmiş polinom olsun. $r_1, r_2, \ldots, r_n$'ler de $L(r) = 0$ polinom denkleminin köklerini göstersin. O zaman $L(r)$,

$$L(r) = a_0(r - r_1)(r - r_2)\ldots(r - r_n)$$

şeklinde çarpanlarına ayırılabilir. Şimdi burada r ile D yi biçimsel olarak yer değiştirtirsek, $L(D)$ operatörünün çarpanlarına ayrılmış şeklini elde ederiz:

$$L(D) = a_0(D - r_1)(D - r_2)\ldots(D - r_n)$$

Böylece sabit katsayılı lineer diferansiyel operatörler, D cebirsel büyüklüğünün polinomları gibi çarpılabilir ve çarpanlarına ayırılabilirler.

B. Sabit Katsayılı Lineer Sistemler İçin Bir Operatör Yöntemi

Şimdi sabit katsayılı lineer sistemleri çözmek için kullanılabilecek sembolik bir operatörler yönteminin ana hatlarını vereceğiz. L_1, L_2, L_3 ve L_4 sabit katsayılı lineer operatörler olmak üzere

$$\begin{aligned} L_1 x + L_2 y &= f_1(t) \\ L_3 x + L_4 y &= f_2(t) \end{aligned} \tag{7.45}$$

şeklinde bir lineer sistem ele alalım. Yani buradaki L_1, L_2, L_3 ve L_4 operatörleri a, b, α, β'lar sabitler olmak üzere

$$L_1 = a_0D^m + a_1D^{m-1} + \ldots + a_{m-1}D + a_m$$

$$L_2 = b_0D^n + b_1D^{n-1} + \ldots + b_{n-1}D + a_n$$

$$L_3 = \alpha_0D^p + \alpha_1D^{p-1} + \ldots + \alpha_{p-1}D + \alpha_p$$

$$L_4 = \beta_0D^q + \beta_1D^{q-1} + \ldots + \beta_{q-1}D + \beta_q$$

şeklinde sabit katsayılı lineer operatörlerdir.

(7.45) şeklinde ifade edilebilecek basit bir örnek olarak

$$\begin{array}{c} 2\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} - 3x = t \\ 2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + 3x + 8y = 2 \end{array}$$

alınabilir. Operatör gösterimi ile bunu

$$\begin{array}{c} (2D-3)x - 2Dy = t \\ (2D+3)x + (2D+8)y = 2 \end{array}$$

olarak yazabiliriz. Bunun $L_1 = 2D - 3$, $L_2 = -2D$, $L_3 = 2D + 3$ ve $L_4 = 2D + 8$ olmak üzere (7.45) şeklinde olduğu bellidir.

Şimdi tekrar (7.45) genel sistemine dönersek, birinci denkleme L_4'ü, ikinci denkleme de L_2'yi uygulayarak

$$\begin{array}{c} L_4L_1x + L_4L_2y = L_4f_1(t) \\ L_2L_3x + L_2L_4y = L_2f_2(t) \end{array}$$

elde ederiz. Birinci denklemden ikincisini çıkarırsak, $L_4L_2y = L_2L_4y$ olduğundan

$$L_4L_1x - L_2L_3x = L_4f_1 - L_2f_2$$

veya

$$(L_4L_1 - L_2L_3)x = L_4f_1 - L_2f_2 \tag{7.46}$$

elde ederiz. Bu denklemin sol tarafındaki $L_4L_1 - L_2L_3$ ifadesi bir başına sabit katsayılı lineer operatördür. Onun sıfırdan ve sıfır olmayan bir sabitten farklı olduğunu kabul ederek L_5 ile gösterelim. Ayrıca f_1 ve f_2 fonksiyonlarının, (7.46)'nın sağ tarafını mevcut ve t'nin $g_1(t)$ gibi bir fonksiyonu olarak var kılacak özelliklere sahip olduklarını varsayalım. O zaman (7.46) denklemini

$$L_5 x = g_1(t) \tag{7.47}$$

olarak yazabiliriz. Bu (7.47) denklemi artık bir tek x bağlı değişkenine göre yazılmış sabit katsayılı bir lineer diferansiyel denklemdir. İşlemlerimizin öteki bağlı değişken olan y'yi yokettiğine dikkat ediniz. Şimdi X'i (7.47) denkleminden 4. Bölüm'de gördüğümüz yöntemlerle çözeceğiz. (7.47) denklemi N. basamaktan olsun. O zaman (7.47) denkleminin genel çözümü, $u_1, u_2, \ldots, u_N$'ler $L_5 x = 0$ homojen lineer denkleminin N tane olan lineer bağımsız çözümleri, $c_1, c_2, \ldots, c_N$'ler keyfî sabitler, U_1 de $L_5 x = g_1$ denkleminin bir özel çözümü olmak üzere

$$x = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_N u_N + U_1 \tag{7.48}$$

şeklinde yazılabilecektir.

Tekrar (7.45) sistemine dönelim ve birinci, ikinci denklemlere sırasıyla L_3 ve L_1 operatörlerini uygulayalım. O zaman

$$\begin{aligned} L_3 L_1 x + L_3 L_2 y &= L_3 f_1(t) \\ L_1 L_3 x + L_1 L_4 y &= L_1 f_2(t) \end{aligned}$$

elde ederiz. İkinci denklemden birincisini çıkarırsak, $L_3 L_1 x = L_1 L_3 x$ olduğundan

$$(L_1 L_4 - L_2 L_3) y = L_1 f_2 - L_3 f_1$$

elde ederiz. f_1 ve f_2 fonksiyonlarının, sağ tarafı t'nin $g_2(t)$ gibi bir fonksiyonu olarak var kılacak özelliklere sahip olduklarını varsayalım. O zaman bu denklemi $L_5 = L_4 L_1 - L_2 L_3$ olmak üzere

$$L_5 y = g_2(t) \tag{7.49}$$

olarak yazabiliriz. Bu (7.49) denklemi bir tek y bağlı değişkenine göre yazılmış sabit katsayılı bir lineer diferansiyel denklemdir. İşlemlerimiz bu sefer x'i yoketmiştir. Şimdi y'yi (7.49) denkleminden çözersek genel çözümü, $u_1, u_2, \ldots, u_N$'ler $L_5 y = 0$ (veya $L_5 x = 0$) homojen lineer denkleminin, daha önce (7.48)'de de görülen N tane lineer bağımsız çözümü, $k_1, k_2, \ldots, k_N$'ler keyfî sabitler, U_2 de $L_5 y = g_2$ denkleminin bir özel çözümü olmak üzere

$$y = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_N u_N + U_2 \tag{7.50}$$

şeklinde yazılabilecektir.

Böylece x ve y (7.45) sistemini sağlarsa, x'in (7.47)'deki tek diferansiyel denklemi, y'nin de (7.49)'daki tek diferansiyel denklemi sağlayacağını görmüş olduk. Yani x ve y (7.45) sistemini sağlarsa, x (7.48), y de (7.50) şeklindedir. Bununla beraber (7.48)-(7.50) fonksiyon çifti $c_1, c_2, \ldots, c_N, k_1, k_2, \ldots, k_N$ keyfî sabitlerinin her seçimi için (7.45) sistemini sağlamaz. Başka bir deyişle (7.48) ile verilen x ile, (7.50) ile verilen y'nin (7.45) sistemini sağlaması için, $2N$ tane $c_1, c_2, \ldots, c_N$, $k_1, k_2, \ldots, k_N$ keyfî sabiti birbirinden bağımsız olamaz, bir kısmının geri kalanların fonksiyonu olmaları gerekir. (7.45) sisteminin genel çözümündeki bağımsız sabitlerin sayısının, (7.45)'de x ve y'nin operatör katsayılarından oluşan

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix}$$

determinantından elde edilen $L_1 L_4 - L_2 L_3$ operatörünün mertebesine, bu determinantın sıfır olmaması şartıyla eşit olduğu gösterilebilir. Bu operatörün N. basamaktan olduğunu kabul etmiştik. Böylece (7.48)-(7.50) çiftinin (7.45) sistemini sağlaması için, bu çiftte bulunan $2N$ tane $c_1, c_2, \ldots, c_N, k_1, k_2, \ldots, k_N$ keyfî sabitlerinden sadece N tanesi bağımsız olabilir, geri kalan N tanesinin, bunların fonksiyonu olmaları gerekir. Bunlardan hangilerinin bağımsız olduğunu, geri kalanların bunların fonksiyonu olarak nasıl yazılacağını anlamak için, (7.48) ile verilen x ve (7.50) ile verilen y (7.45) sisteminde yerlerine konur. (7.48)-(7.50) çiftinin, (7.45) sisteminin genel çözümü olması için $c_1, c_2, \ldots, c_N$, $k_1, k_2, \ldots, k_N$ sabitlerinin sağlayacağı şartlar buradan elde edilir.

Yukarıdaki işleri bir örnekle gösterelim.

Örnek 7.14.

$$\begin{aligned} 2\tfrac{dx}{dt} - 2\tfrac{dy}{dt} - 3x &= t \\ 2\tfrac{dx}{dt} + 2\tfrac{dy}{dt} + 3x + 8y &= 2 \end{aligned} \tag{7.51}$$

Operatör gösterimi ile bunu

$$\begin{aligned} (2D-3)x - 2Dy &= t \\ (2D+3)x + (2D+8)y &= 2 \end{aligned} \tag{7.52}$$

olarak yazabiliriz. (7.52)'nin birinci denklemine $2D+8$, ikinci denklemine de $2D$ operatörünü uygularsak,

$$\begin{aligned}(2D+8)(2D-3)x-2(2D+8)Dy&=(2D+8)t\\ 2D(2D+3)x+2D(2D+8)y&=(2D)2\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu iki denklemi taraf tarafa toplayınca da

$$[(2D+8)(2D-3)+2D(2D+3)]x=(2D+8)t+(2D)2$$

veya

$$(8D^2+16D-24)x=2+8t+0$$

ve son olarak

$$(D^2+2D-3)x=t+\frac{1}{4} \tag{7.53}$$

elde edilir. (7.53) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$x=c_1e^t+c_2e^{-3t}-\frac{1}{3}t-\frac{11}{36} \tag{7.54}$$

olur.

Şimdi yeniden (7.52) sistemine geri dönüp (7.52)'nin birinci denklemine $2D+3$, ikinci denklemine de $2D-3$ operatörünü uygularsak,

$$\begin{aligned}(2D+3)(2D-3)x-2(2D+3)Dy&=(2D+3)t\\ (2D-3)(2D+3)x+(2D-3)(2D+8)y&=(2D-3)2\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu iki denklemin ikincisinden birincisini çıkarırsak,

$$[(2D-3)(2D+8)+(2D+3)2D]y=(2D-3)2-(2D+3)t$$

veya

$$(8D^2+16D-24)y=0-6-2-3t$$

ve son olarak

$$(D^2+2D-3)x=-\frac{3}{8}t-1 \tag{7.55}$$

elde edilir. (7.55) diferansiyel denkleminin genel çözümü de

$$y=k_1e^t+k_2e^{-3t}+\frac{1}{8}t+\frac{5}{12} \tag{7.56}$$

olur. (7.54) ile verilen x ile, (7.56) ile verilen y, c_1, c_2, k_1, k_2 sabitlerinin uygun bir seçimi için (7.51) sistemini sağlayacaklardır. (7.51)'de x ve y'nin operatör katsayılarından oluşan

$$\begin{vmatrix} 2D-3 & -2D \\ 2D+3 & 2D+8 \end{vmatrix} = 8D^2 + 16D - 24$$

olur. Bu operatörün mertebesi iki olduğundan, (7.54)- (7.56) çiftinin (7.51) sistemini sağlaması için, bu çiftte bulunan c_1, c_2, k_1, k_2 keyfî sabitlerinden sadece iki tanesi bağımsız olabilir. Bunlardan hangilerinin bağımsız olduğunu, geri kalanların bunların fonksiyonu olarak nasıl yazılacağını anlamak için, (7.54) ile verilen x ve (7.56) ile verilen y, (7.51) sisteminin birinci denkleminde yerlerine konursa,

$$\left(2c_1e^t - 6c_2e^{-3t} - \frac{2}{3}\right) - \left(2k_1e^t - 6k_2e^{-3t} + \frac{1}{4}\right)$$

$$- \left(3c_1e^t + 3c_2e^{-3t} - t - \frac{11}{12}\right) = t$$

veya

$$(-c_1 - 2k_1)e^t + (-9c_2 + 6k_2)e^{-3t} = 0$$

elde edilir. Böylece (7.54)-(7.56) çiftinin (7.51) sistemini sağlaması için,

$$\begin{aligned} c_1 - 2k_1 &= 0 \\ -9c_2 + 6k_2 &= 0 \end{aligned} \tag{7.57}$$

olmalıdır. x ile y, (7.51) sisteminin ikinci denkleminde konursa, buna denk şartlar elde edilir. Böylece (7.54)- (7.56) çiftinin (7.51) sistemini sağlaması için, (7.57) şartları yerine gelmelidir. Buradaki dört sabitten herhangi ikisi bağımsız olarak seçilebilir. c_1, c_2'yi bağımsız seçersek,

$$k_1 = -\frac{1}{2}c_1 \quad \text{ve} \quad k_2 = \frac{3}{2}c_2$$

bulunur. Bunlar (7.56)'da yerlerine yazılırsa, sonuçta elde edilen (7.54)-(7.56) çifti (7.51) sisteminin bir genel çözümü olur. Yani (7.51) sisteminin bir genel çözümü c_1, c_2 keyfî sabitler olmak üzere

$$x = c_1e^t + c_2e^{-3t} - \frac{1}{3}t - \frac{11}{36}$$

$$y = -\frac{1}{2}c_1e^t + \frac{3}{2}c_2e^{-3t} + \frac{1}{8}t + \frac{5}{12}$$

olacaktır. (7.57)'de k_1 k_2'yi bağımsız seçseydik, (7.51) sisteminin bir genel çözümü

$$x = -2k_1e^t + \frac{2}{3}k_2e^{-3t} - \frac{1}{3}t - \frac{11}{36}$$
$$y = k_1e^t + k_2e^{-3t} + \frac{1}{8}t + \frac{5}{12}$$

olacaktı.

ALIŞTIRMALAR

1. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x - 4y = e^t$
   $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - y = e^{4t}$

2. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x = -2t$
   $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x - y = t^2$

3. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - 3y = e^t$
   $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x = e^{3t}$

4. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - 2y = 2e^t$
   $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x - 4y = e^{2t}$

5. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - y = e^{-t}$
   $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + y = e^t$

6. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x - y = t$
   $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = e^t$

7. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - 6y = e^{3t}$
   $\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - 2x - 6y = t$

8. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - 3y = 3t$
   $\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - 2x - 3y = 1$

9. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2y = \sin t$
   $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - y = 0$

10. $\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} - 2x + 4y = t$
    $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - y = 1$

11. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x + 5y = 4t$
    $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + 2y = 2$

12. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x + 5y = t^2$
    $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x + 4y = 2t + 1$

13. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x + y = t^2 + 4t$
    $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + 2y = 2t^2 - 2t$

14. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x + y = t - 1$
    $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x = t + 2$

15. $2\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + x - y = 3e^t$

16. $2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - y = -2t$

$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + 2y = e^t$

$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x - y = t^2$

17. $2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - y = 1$
$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x - y = t$

18. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = e^{2t}$
$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - y = 0$

19. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x + y = 1$
$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x + y = 1$

20. $\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = e^t$
$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = 2e^t$

21. $\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = t + 1$
$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x + y = 2t - 1$

22. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = e^t$
$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 4x - y = e^t$

$D = \frac{d}{dt}$ olarak düşünmek suretiyle aşağıdaki denklem sistemlerinin tam çözümlerini bulunuz.

1. $\begin{matrix}(D+5)x + (D+4)y = e^{-t} \\ (D+2)x + (D+1)y = 3\end{matrix}$

2. $\begin{matrix}(D+5)x + (D+3)y = e^{-t} \\ (D+2)x + (D+1)y = 3\end{matrix}$

3. $\begin{matrix}(D+5)x + (D+3)y = e^{-t} \\ (2D+1)x + (D+1)y = 3\end{matrix}$

4. $\begin{matrix}(D-1)x + (D-2)y = 0 \\ (D-5)x + (2D-71)y = e^{-t}\end{matrix}$

5. $\begin{matrix}(D-1)x + (D+9)y = t \\ (D-2)x + (2D+9)y = 4\end{matrix}$

6. $\begin{matrix}(2D+5)x - (2D+3)y = t \\ (D-2)x + (D+2)y = 0\end{matrix}$

7. $\begin{matrix}(2D+3)x + (D+4)y = -\cos t \\ (D+1)x + (D+2)y = 2\sin t\end{matrix}$

8. $\begin{matrix}(2D^2+1)x + (D+2)y = 5 \\ (D^2-16)x + (D-4)y = 4\end{matrix}$

9. $\begin{matrix}(D^2+1)x + (D^2+3)y = 0 \\ (3D+1)x + (2D+6)y = 0\end{matrix}$

10. $\begin{matrix}(9D^2+8)x + (3D^2+4)y = 0 \\ (2D^2+1)x + (D^2+2)y = 120\cos 3t\end{matrix}$

11. $\begin{matrix}(D-1)x - y = 0 \\ -2x + (D-1)y - z = 0 \\ -2y + (D-1)z = 0\end{matrix}$

12. $\begin{matrix}(D+1)x - y = 0 \\ x + (D+2)y + z = e^{-t} \\ 5x + y + (D-2)z = 5e^{-t}\end{matrix}$

13. $$\begin{aligned}(D+1)x+(D+5)y+(2D+5)z&=15e^t\\ (2D+1)x+(D+2)y+(3D+1)z&=10e^t\\ (D+3)x+(3D+4)y+(4D+6)z&=21e^t\end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned}(D+1)x+(D+3)y+(2D+3)z&=15e^t\\ (2D+1)x+(D+2)y+(3D+1)z&=0\\ (D+3)x+(3D+4)y+(4D+6)z&=0\end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned}(D+1)x+(D+1)y+(2D+3)z&=0\\ (2D+1)x+(D+2)y+(3D+5)z&=0\\ (D+3)x+(3D+1)y+(4D+5)z&=0\end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned}(2D^2-D-1)x+(D-1)y&=0\\ (D^2-1)x+(D-1)y&=0\end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned}(3D^2+3D+2)x+(D^2+2D+3)y&=0\\ (2D^2-D-2)x+(D^2+D+1)y&=8\end{aligned}$$

Aşağıdaki denklem sistemlerinin verilen koşulları sağlayan çözümlerini bulunuz.

18. $$\begin{aligned}(2D+1)x+(D+2)y&=0 \qquad (a)x_0=0, y_0=7\\ (D-1)x+(D+3)y&=5 \qquad (b)x_0=0, y_0=7\end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned}(2D^2+3D-9)x+(D^2+7D-14)y&=4\\ (D+1)x+(D+2)y&=0\end{aligned}$$

$(a)x_0=-2, y_0=0, y_0'=-6$

$(b)x_0=3, y_0=-3, x_0'=y$

20. $$\begin{aligned}x&=c_1e^t+c_2e^{2t}\\ y&=c_1e^t+3c_2e^{2t}\end{aligned}$$ 21. $$\begin{aligned}x&=c_1e^{-t}+c_2e^t+c_3e^{2t}\\ y&=c_1e^{-t}-c_2e^t+2c_3e^{2t}\end{aligned}$$

fonksiyon çiftlerini tam çözüm kabul eden bir diferansiyel denklem sistemi yazınız.

22. (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) fonksiyonları

$$\begin{aligned}P_{11}(D)x+P_{12}(D)y&=0\\ P_{21}(D)x+P_{22}(D)y&=0\end{aligned}$$

sisteminin iki çözümü ise, $(c_1x_1+c_2x_2, c_1y_1+c_2y_2)$ fonksiyonlarının da c_1 ve c_2 sabitlerinin bütün değerleri için bu sistemin bir çözümü olacağını gösteriniz.

23. 17. problemde iki denklemin, toplandıklarında y'yi x ve onun çeşitli türevleri cinsinden ifade eden bir ifade verecek operasyonel çarpanlarını bulunuz. Bu, 19. problemdeki denklem sistemi için yapılabilir mi? Bunun genel olarak yapılabileceğini düşünüyor musunuz?

28.

$$
\begin{aligned}
p_{11}((D)x + p_{12}(D)y &= f_1(t) \\
p_{21}((D)x + p_{22}(D)y &= f_2(t)
\end{aligned}
$$

sisteminin operasyonel katsayılarının determinantı özdeş olarak sıfır değilse, bu sistem tamamen bir cebirsel denklem sistemi olarak alındığında Cramer yöntemi ile elde edilecek eşitlikler olan:

$$
\begin{vmatrix} p_{11}(D) & p_{12}(D) \\ p_{21}(D) & p_{22}(D) \end{vmatrix} x = - \begin{vmatrix} p_{12}(D) & f_1(t) \\ p_{22}(D) & f_2(t) \end{vmatrix}
$$

ve

$$
\begin{vmatrix} p_{11}(D) & p_{12}(D) \\ p_{21}(D) & p_{22}(D) \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} p_{11}(D) & f_1(t) \\ p_{21}(D) & f_2(t) \end{vmatrix}
$$

eşitliklerinin elde edilebileceğini gösteriniz.

29. (a) 28. problemde determinantlarla yazılmış olan ve biri yalnız x, diğeri de yalnız y bulunduran iki diferansiyel denklemin karakteristik denklemleri aynı mıdır?

(b) (a)'da adı geçen denklemler çözüldüklerinde tümleyen fonksiyonları yazımda kullanılan keyfî sabitler dışında aynı mıdırlar?

(c) (b) şıkkında adı geçen keyfi sabitlerin sayısı, ilgili teoremdeki sayıya nasıl indirilebilir?

(d) 28. problemde anlatılan Cramer kuralı $n \geq 3$ olan sistemler için de geçerli midir?

30.

$$
\begin{aligned}
(2D^2 - D - 1)x + (2D^2 + 4D - 6)y &= 0 \\
(D^2 + 2D - 3)x + (D^2 + 7D - 8)y &= 0
\end{aligned}
$$

sistemi Cramer yönteminden elde edilen diferansiyel denklemler yardımıyla çözülürse, keyfi sabitlerin sayısını icabeden düzeye indirmek için, elde edilen x ve y'nin ilk verilen denklemlerde yerlerine koyulması gerektiğini gösteriniz.

31. (D-a),

$$
\begin{aligned}
p_{11}(D)x + p_{12}(D)y &= 0 \\
p_{21}(D)x + p_{22}(D)y &= 0
\end{aligned}
$$

sistemindeki operasyonel katsayıların hepsinin basit çarpanı ise ve bunlardan oluşan determinant da $D - a$'yı sadece iki katlı bir çarpan olarak kabul ederse, x ve y için Cramer yöntemi ile elde edilen diferansiyel denklemlerin ikisinin de karakteristik denklemlerinde katlı kök bulunduğu halde x ve y'nin ikisinde de te^{at} teriminin bulunmayacağını gösteriniz. *Yol Gösterme:* İki operasyonel katsayıyı da $D - a$ parantezine al, $(D - a)x = u, (D - a)y = v$ koy ve u ile v'nin ikisinde de e^{at} gibi bir terimin bulunmayacağını göster.

32. Bir diferansiyel denklem sisteminin denklemlerinin biri üzerine baştan başa bir diferansiyel operatör uygulayarak sonucu bir başka denkleme toplamakla, önceki sisteme denk bir sistem elde edileceğini kanıtlayınız.

33. (a) $L_{ij} = a_{ij}(t)D^2 + b_{ij}(t)D + c_{ij}(t) \quad 1 \leq i, j \leq 2$
ile tanımlı operatörlerin hepsinin $a_{ij}(t),\ b_{ij}(t),\ c_{ij}(t)$ katsayıları bir I aralığında sürekli olsunlar. $f_1(t), f_2(t)$ fonksiyonları da aynı aralıkta sürekli olsunlar. I üzerinde her yerde

$$a_{11}(t)a_{22}(t) - a_{12}(t)a_{21}(t) \neq 0$$

ise,

$$
\begin{aligned}
L_{11}x_1 + L_{12}x_2 &= f_1(t) \\
L_{21}x_1 + L_{22}x_2 &= f_2(t)
\end{aligned}
$$

lineer diferansiyel sisteminin I üzerinde normal bir birinci basamak sisteme indirgeneceğini gösteriniz.

(b) (a) kısmındaki tanımları, varsayımları ve sonuçları üç bilinmeyenli üç diferansiyel denklemli $L_{i1}x_1 + L_{i2}x_2 + L_{i3}x_3 = f_i(t) \quad 1 \leq i \leq 3$ sistemi için genişletiniz.

(c) $n(> 3)$ bilinmeyenli ve n denklemli

$$\sum_{j=1}^{n} L_{ij}x_j = f_i(t), \quad 1 \leq i \leq n$$

diferansiyel denklem sistemi için de benzer genişletmelerin yapılabileceğini gösteriniz.

7.4 Uygulamalar

A. Mekaniğe Uygulamalar

Lineer diferansiyel denklem sistemleri mekanikteki birçok problemin matematiksel formülasyonu sırasında karşımıza çıkarlar. Aşağıda bunlardan birini ele alacağız. Lineer diferansiyel denklem sistemlerine yol açan diğer mekanik problemlerini bu kısmın sonundaki alıştırma problemleri arasında bulacaksınız.

Örnek 7.16. Düz bir masa üstü gibi duran BC yatay düzleminde A_1 cismi, doğal uzunluğu L_1 olan kütlesiz S_1 yayı ile bir P sabit noktasına iliştirilmiştir. Başka bir A_2 cismi de, doğal uzunluğu L_2 olan kütlesiz S_2 yayı ile bir A_1 cismine, P noktası ile A_1 ve A_2 cisimlerinin kütle merkezi aynı doğru üzerinde olacak şekilde bağlanmıştır (Şekil 7.1).

Sonra A_1 cismi, O_1 denge konumunun sağına veya soluna doğru a_1 kadar yer değiştiriyor, A_2 de O_2 denge konumunun sağına veya soluna doğru a_2 kadar yer değiştiriyor, ve $t = 0$ anında iki cisim de serbest bırakılıyor (Şekil 7.2). Cisimlerin herhangi bir $t > 0$ anındaki yerleri ne olacaktır?

Formülasyon. BC düzleminin sürtünme kuvvetlerinin ihmal edilmesine imkan verecek derecede düzgün olduğunu kabul ediyoruz. Ayrıca sisteme hiçbir dış kuvvetin tesir etmediğini de varsayıyoruz. A_1 cisminin kütlesi m_1, A_2 cisminin kütlesi m_2, S_1 yayının yay sabiti k_1 ve S_2 yayının yay sabiti de k_2 olsun.

x_1, A_1 cisminin O_1 denge konumundan $t > 0$ anındaki uzaklığını, benzer şekilde x_2 de A_2 cisminin O_2 denge konumundan $t > 0$ anındaki uzaklığını göstersin. A_2 cismi O_2 denge konumunun sağında iken $x_2 > 0$ kabul edelim (Şekil 7.3).

Şekil 7.1-2-3

A_1 cismine $t > 0$ anında tesir eden kuvvetleri hesaplayalım. Bu cisme biri S_1 yayının uyguladığı F_1, diğeri de S_2 yayının uyguladığı F_2 kuvveti olmak üzere iki kuvvet tesir eder. 5.1 kısmında gördüğümüz Hook yasasına göre F_1 kuvvetinin büyüklüğü $k_1|x_1|$ olacaktır. Bu kuvvet, A_1 cismi O_1 denge konumunun sağında olduğunda sola doğru, solunda olduğunda da sağa doğru tesir ettiğinden, $F_1 = -k_1x_1$ alınmalıdır. Yine Hook yasasına göre F_2 kuvvetinin büyüklüğü $k_2.s$ olacaktır. Burada s, S_2 yayının $t > 0$ anındaki uzanımıdır. $s = |x_2 - x_1|$ olduğundan F_2 kuvvetinin büyüklüğü $k_2|x_2 - x_1|$ olur. Bu kuvvet, $x_2 - x_1 < 0$ olduğunda sola doğru, $x_2 - x_1 > 0$ olduğunda da sağa doğru etkidiğinden, $F_2 = k_2(x_2 - x_1)$ alınmalıdır. Şimdi 3.2 kısmında tanıdığınız Newton'ın ikinci hareket yasasını uygularsak

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \tag{7.58}$$

diferansiyel denklemini elde ederiz.

Şimdi A_2 cismine dönüp, ona $t > 0$ anında tesir eden kuvvetleri gözönüne alalım. Bu kuvvetlerden biri S_2 yayı tarafından uygulanan F_3 kuvvetidir. Hook yasasını bir kere daha uygulayarak, bu kuvvetin büyüklüğünün de $k_2.s = k_2|x_2 - x_1|$ olduğunu görürüz. Bu kuvvet, $x_2 - x_1 > 0$ olduğunda sola doğru, $x_2 - x_1 < 0$ olduğunda da sağa doğru etkidiğinden, $F_3 = -k_2(x_2 - x_1)$ alınmalıdır. A_2 cismine Newton'ın ikinci hareket yasasını uygularsak

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 (x_2 - x_1) \tag{7.59}$$

diferansiyel denklemini elde ederiz.

Problemin ifadesinden (7.58) ve (7.59) denklemlerine ilave olarak

$$x_1(0) = a_1, \quad x_1'(0) = 0, \quad x_2(0) = a_2, \quad x_2' = 0 \tag{7.60}$$

başlangıç şartlarımız olduğunu anlarız. Böylece problemin formülasyonu, (7.58) ve (7.59) diferansiyel denklemleriyle (7.60) başlangıç şartlarından oluşur. Diferansiyel denklemleri

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 (x_2 - x_1) \end{cases} \tag{7.61}$$

şeklinde yazarsak, bunların sabit katsayılı, homojen bir diferansiyel denklem sistemi oluşturduklarını görürüz.

Bir Özel Halin Çözümü. (7.61) sistemi ile (7.60) şartlarından oluşan genel problemi çözmek yerine, hesabı basitleştiren bir özel hal ele alacağız. A_1 ve A_2 cisimlerinin kütleleri $m_1 = m_2 = 1$ olsun. Ayrıca S_1 ve S_2'nin yay sabitleri sırasıyla $k_1 = 3$ ve $k_2 = 2$ olsun. Yine $a_1 = -1$ ve a_2=2 alalım. O zaman (7.61) sistemi

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + 5x_1 - 2x_2 = 0 \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} - 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \tag{7.62}$$

ve (7.60) başlangıç şartları da şu hali alır:

$$x_1(0) = -1, \quad x_1'(0) = 0, \quad x_2(0) = 2, \quad x_2' = 0 \tag{7.63}$$

(7.62) sistemini operatör gösterimi ile yazarsak

$$\begin{cases} (D^2+5)x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + (D^2+2)x_2 = 0 \end{cases} \tag{7.64}$$

elde ederiz. (7.64)'ün birinci denklemine (D^2+2) operatörünü uygular, ikinci denklemini 2 ile çarpar ve sonuçları toplarsak,

$$[(D^2+2)(D^2+5) - 4]x_1 = 0 \quad \text{veya} \quad (D^4 + 7D^2 + 6)x_1 = 0 \tag{7.65}$$

buluruz. (7.65)'teki dördüncü basamak diferansiyel denkleme karşılık karakteristik denklem

$$m^4 + 7m^2 + 6 = 0 \quad \text{veya} \quad (m^2+6)(m^2+1) = 0$$

olduğundan, (7.65) diferansiyel denkleminin genel çözümü şöyledir:

$$x_1 = c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_3 \sin \sqrt{6}t + c_4 \cos \sqrt{6}t \tag{7.66}$$

Şimdi (7.64)'teki denklemlerden birincisini 2 ile çarpalım, ikincisine de (D^2+5) operatörünü uygulayalım. Sonra elde edilen denklemleri toplarsak x_2 için

$$(D^4 + 7D^2 + 6)x_2 = 0 \tag{7.67}$$

elde ederiz. (7.67)'nin genel çözümünün

$$x_2 = k_1 \sin t + k_2 \cos t + k_3 \sin \sqrt{6}t + k_4 \cos \sqrt{6}t \tag{7.68}$$

olacağı bellidir. (7.64) sisteminin operatör katsayılarının determinantı

$$\begin{vmatrix} D^2+5 & -2 \\ -2 & D^2+2 \end{vmatrix} = D^4 + 7D^2 + 6 \tag{7.64}$$

olmaktadır. Bu, dördüncü basamaktan bir operatördür. Onun için, (7.62)'nin genel çözümünde dört tane bağımsız sabit bulunmalıdır. (7.66)-(7.68) çiftinin, (7.62) sisteminin bir genel çözümü olması için

$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4$ arasında bulunması gereken ilişkileri bulmak amacıyla, (7.66) ile verilen x_1 ile, (7.68) ile verilen x_2, (7.62) sisteminin denklemlerinde yerlerine yazılır. O zaman

$$k_1 = 2c_1,\ k_2 = 2c_2,\ k_3 = -\frac{1}{2}c_3,\ k_4 = -\frac{1}{2}c_4$$

buluruz. Böylece (7.62) sisteminin genel çözümü

$$\begin{cases} x_1 = c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_3 \sin\sqrt{6}t + c_4 \cos\sqrt{6}t \\ x_2 = 2c_1 \sin t + 2c_2 \cos t - \frac{1}{2}c_3 \sin\sqrt{6}t - \frac{1}{2}c_4 \cos\sqrt{6}t \end{cases} \tag{7.69}$$

olur. Şimdi (7.63)'deki başlangıç şartlarını uygulayalım. $t = 0$'da $x_1 = -1,\ \ dx_1/dt = 0$ şartlarını (7.69)'daki denklemlerden birincisine uygularsak,

$$\begin{cases} -1 = c_2 + c_4 \\ 0 = c_1 + \sqrt{6}c_3 \end{cases} \tag{7.70}$$

buluruz. $t = 0$'da $x_2 = 2,\ \ dx_2/dt = 0$ şartlarını (7.69)'daki denklemlerden ikincisine uygularsak,

$$\begin{cases} 2 = c_2 - \frac{1}{2}c_4 \\ 0 = 2c_1 - \frac{\sqrt{6}}{2}c_3 \end{cases} \tag{7.71}$$

elde ederiz. (7.70), (7.71) denklemlerinden

$$c_1 = 0,\ c_2 = \frac{3}{5},\ c_3 = 0,\ c_4 = -\frac{8}{5}$$

elde edilir. Böylece (7.62) sistemi ile (7.63) şartlarından oluşan problemin özel çözümü

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{5}\cos t - \frac{8}{5}\cos\sqrt{6}t \\ x_2 = \frac{6}{5}\cos t + \frac{4}{5}\cos\sqrt{6}t \end{cases}$$

olarak bulunur.

B. Elektrik Devrelerine Uygulamalar

5.6. kısımda diferansiyel denklemlerin bir tek kapalı yoldan ibaret elektrik deverelerine uygulamalarını gördük. Bir elektrik devresinde böyle kalı yollara lup denir. Şimdi birden fazla lup bulunduran elektrik devrelerini ele alacağız. Mesela Şekil 7.4'e bakınız.

Bu elektrik devresinde $ABMNA$, $BJKMB$ ve $ABJKMNA$ gibi üç tane lup bulunuyor. İki ya da daha fazla lupun birleştiği B ve M gibi noktalara, *düğüm noktaları* ya da *dallanma noktaları* denir. Elektriğin akış yönü oklarla keyfî olarak belirtilmiştir. Birden fazla luplu elektrik devreleri ile ilgili problemleri çözmek için, devre teorisinin iki önemli yasasına ihtiyaç duyarız. Birisi 5.6. kısımda daha önce uygulanmış olan Kirchoff voltaj yasasıdır. Kullanacağımız ikinci yasa ise şudur:

Kirchoff Akım Kanunu. Bir elektrik devresinde bir düğüm noktasına gelen akımların toplamı, bu düğümü terkeden akımların toplamına eşittir.

Bu kanunun uygulanışına bir örnek olarak, Şekil 7.4 ile ilgili olan aşağıdaki problemi çözelim.

Örnek 7.17. E, 30 V'luk bir elektromotor kuvvet, R_1 10 Ω'luk, R_2 20 Ω'luk birer direnç, L_1 0.02 h'lik, L_2 0.04 h'lik birer bobin ve başlangıç akımları sıfır olduğuna göre Şekil 7.4'deki elektrik devresinin akımlarını hesaplayınız.

Şekil 7.4

Formülasyon. $MNAB$ dalından akan akımı i, BM dalının akımını i_1 ve $BJKM$ deki akımı i_2 ile gösterelim.

$ABMNA$, $BJKMB$, $ABJKMNA$ luplarının her birine 5.6. kısımda gördüğümüz Kirchoff Voltaj Kanunu'nu uygulayalım.

$ABMNA$ lupunda voltaj düşmeleri şöyle olur:
(1) R_1 direnci üzerinde: $10i$.
(2) L_1 bobini üzerinde: $0.02\frac{di_1}{dt}$.
Voltaj kanununu $ABMNA$ lupuna uygulayarak

$$0.02\frac{di_1}{dt} + 10i = 30 \tag{7.72}$$

denklemini elde ederiz.

$BJKMB$ lupunda voltaj düşmeleri şöyle olur:
(1) R_2 direnci üzerinde: $20i$.
(2) L_2 bobini üzerinde: $0.04\frac{di_2}{dt}$.
(3) L_1 bobini üzerinde: $-0.02\frac{di_1}{dt}$.
(3)'deki voltaj düşmesindeki eksi işaretinin sebebi, $BJKMB$ lupunu dolanırken yönümüzün, i_1 akımının yönüne ters olmasıdır. $BJKMB$ lupuna tesir eden hiç bir elektromotor kuvveti olmadığından, voltaj kanununu uygulayarak

$$-0.02\frac{di_1}{dt} + 0.04\frac{di_2}{dt} + 20i_2 = 0 \tag{7.73}$$

denklemini elde ederiz.

$ABJKMNA$ lupu için voltaj düşmeleri de şöyle olur:
(1) R_1 direnci üzerinde: $10i$.
(2) R_2 direnci üzerinde: $20i_2$.
(3) L_2 bobini üzerinde: $0.04\frac{di_2}{dt}$.
Voltaj kanununu bu lupa uygulayarak

$$10i + 0.04\frac{di_2}{dt} + 20i_2 = 30 \tag{7.74}$$

denklemini elde ederiz.

(7.72), (7.73) ve (7.74) denklemlerinin bağımsız olmadıklarına dikkat edelim. Mesela (7.74)'ten (7.72)'yi çıkararak (7.73)'ü elde edebiliriz. O halde sadece (7.72) ve (7.74) denklemleriyle yetinebiliriz.

Şimdi de B düğüm noktasına Akım Kanunu'nu uygulayalım. Buradan hemen

$$i = i_1 + i_2 \tag{7.75}$$

elde edebiliriz. Buna göre, (7.72) ve (7.74)'te i'yi i_1+i_2 ile değiştirirsek,

$$\begin{cases} 0.04\frac{di_1}{dt} + 10i_1 + 10i_2 = 30 \\ 10i_1 + 0.04\frac{di_2}{dt} + 30i_2 = 30 \end{cases} \tag{7.76}$$

lineer sistemini elde ederiz. Akımlar başlangıçta sıfır olduğundan, başlangıç şartlarımız

$$i_1(0) = 0 \quad \text{ve} \quad i_2(0) = 0 \tag{7.77}$$

olur.

Çözüm. Operatör gösterimi kullanarak (7.76) sistemini yeniden

$$\begin{cases} (0.04D + 10)i_1 + 10i_2 = 30 \\ 10i_1 + (0.04D + 30)i_2 = 30 \end{cases} \tag{7.78}$$

şeklinde yazarız.

Birinci denkleme $(0.04D + 30)$ operatörünü uygular ve ikinci denklemi 10 ile çarpar, sonuçları birbirinden çıkarırsak,

$$[(0.04D + 30)(0.02D + 10) - 100]i_1 = (0.04D + 30)30 - 300$$

veya

$$(0.0008D^2 + D + 200)i_1 = 600$$

veya son olarak

$$(D^2 + 1250D + 250,000)i_1 = 750,000 \tag{7.79}$$

elde edilir.

Şimdi (7.79) denkleminden i_1'i çözeceğiz. Bu denkleme ait yardımcı denklem

$$m^2 + 1250m + 250,000) = 0 \quad \text{veya} \quad (m + 250)(m + 1000) = 0$$

olur. Böylece (7.79) denkleminin tümleyen fonksiyonunun

$$i_{1_c} = c_1e^{-250t} + c_2e^{-1000t}$$

ve bir özel integralin de $i_{1_p} = 3$ olduğu bellidir. O halde (7.79) denkleminin genel çözümü

$$i_1 = c_1 e^{-250t} + c_2 e^{-1000t} + 3 \tag{7.80}$$

olur.

Şimdi (7.78) sistemine dönüp, birinci denklemi 10 ile çarpar, ikinci denkleme $(0.02D + 10)$ operatörünü uygular ve birinci denklemden ikinci denklemi çıkarırsak, sadeleştirmelerden sonra i_2 için

$$(D^2 + 1250D + 250,000)i_2 = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin genel çözümünün

$$i_2 = k_1 e^{-250t} + k_2 e^{-1000t} \tag{7.81}$$

olduğu bellidir.

(7.78) sisteminin operatör katsayılar determinantı ikinci basamaktan bir operatör olduğundan, (7.76) sisteminin genel çözümünde iki tane bağımsız sabit bulunmalıdır.

(7.80)-(7.81) çiftinin, (7.76) sisteminin bir genel çözümü olması için c_1, c_2, k_1, k_2 arasında bulunması gereken ilişkileri bulmak amacıyla, (7.80) ile verilen i_1'i ve (7.81)'le verilen i_2'yi (7.76) sisteminin denklemlerinde yerlerine koyarsak,

$$k_1 = -\frac{1}{2}c_1, \; k_2 = c_2 \tag{7.82}$$

buluruz. Böylece (7.76) sisteminin genel çözümü

$$\begin{cases} i_1 = c_1 e^{-250t} + c_2 e^{-1000t} + 3 \\ i_2 = -\frac{1}{2}c_1 e^{-250t} + c_2 e^{-1000t} \end{cases} \tag{7.83}$$

ile verilir.

Şimdi (7.77)'deki başlangıç şartlarını uygularsak,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 3 = 0 \\ -\frac{1}{2}c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

buluruz. Bu denklemlerden $c_1 = -2$, $c_2 = -1$ elde edilir ki (7.76) sisteminin (7.77) şartlarını sağlayan çözümü

$$\begin{cases} i_1 = -2e^{-250t} - e^{-1000t} + 3 \\ i_2 = e^{-250t} - e^{-1000t} \end{cases}$$

olarak elde edilir. Son olarak (7.75) bağıntısını kullanırsak,

$$i = -e^{-250t} - 2e^{-1000t} + 3$$

buluruz. Buradan i_2 akımının çabucak sıfır olup, $i = i_1 + i_2$ akımının 3 değerine yaklaşacağını anlarız.

ALIŞTIRMALAR

1. Örnek 7.16'daki problemi, A_1 cisminin kütlesinin $m_1 = 2$, A_2 cisminin kütlesinin $m_2 = 1$, S_1 yayının yay sabitinin $k_1 = 4$, S_2 yayının yay sabitinin $k_2 = 2$, ve başlangıç şartlarının $x_1(0) = 1$, $x_1'(0) = 5$, $x_2(0) = 5$, $x_2'(0) = 0$ olması halinde çözünüz.

2. Kütlesi m olan bir mermi, yatayla θ açısı yapan bir namludan v_0 ilk hızıyla havaya ateşleniyor. Yer çekimi ve hava direnci dışındaki bütün kuvvetleri ihmal ediniz ve hava direncinin m/sn cinsinden hızın sayısal olarak k katı olduğunu varsayınız.

(a) Koordinat başlangıcını silahın bulunduğu noktada, x eksenini yatay, y eksenini de düşey alarak, bu merminin hareketini temsil eden diferansiyel denklem sisteminin

$$\begin{aligned} m\tfrac{d^2x}{dt^2} + k\tfrac{dx}{dt} &= 0 \\ m\tfrac{d^2y}{dt^2} + k\tfrac{dy}{dt} + mg &= 0 \end{aligned}$$

olacağını gösteriniz.

(b) (a) kısmındaki diferansiyel denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

3. E, 100 V'luk bir elektromotor kuvvet, R_1 20 Ω'luk, R_2 40 Ω'luk birer direnç, L_1 0.01 h'lik, L_2 0.02 h'lik birer bobin ve başlangıç akımları sıfır olduğuna göre Şekil 7.5'deki elektrik devresindeki akımları hesaplayınız.

Şekil 7.5

4. Şekil 7.6'daki elektrik devrelerindeki akımlar için diferansiyel denklemler yazınız. Denklemleri çözmeyiniz.

(a) Şekil 7.6(a)'daki devre için E, 15 V'luk bir elektromotor kuvvet, R 20 Ω'luk bir direnç, L 0.02 h'lik bir bobin ve C de 10^{-4} faradlık bir kondansatördür.

(b) Şekil 7.6(b)'deki devre için E, $100 \sin 130t$ V'luk bir elektromotor kuvvet, R_1 20 Ω'luk, R_2 30 Ω'luk birer direnç, ve L 0.05 h'lik bir bobindir.

(c) Şekil 7.6(c)'deki devre için E, 100 V'luk bir elektromotor kuvvet, R_1 20 Ω'luk, R_2 10 Ω'luk birer direnç, C_1, 10^{-4} faradlık ve C_2 de 2.10^{-4} faradlık birer kondansatördür.

Şekil 7.6

EK ALIŞTIRMALAR

1 . İki tankın herbirinde V litre sıvı vardır. Birinci tanktaki sıvı başlangıçta litre başına s_1 gram, ikinci tanktaki sıvı da litre başına s_2 gram tuz bulunduruyor. Birinci tanka litre başına s gram tuz bulunduran tuzlu su dakikada a litre hızla geliyor, iyice karıştırıldıktan sonra aynı hızla ikinci tanka geçiyor. İkinci tanktaki sıvı da iyice karıştırıldıktan sonra aynı hızla dışarı akmaktadır. Her iki tanktaki tuz miktarını zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz. Hangi şartlar altında ikinci tanktaki tuz miktarı yerel ekstremumdan geçer?

2 . İki depo birbirine bağlanmıştır. Birinci depo 100 litre saf su, ikincisi de litresinde 2 gram tuz içeren 100 litre tuzlu su bulunduruyor. Sıvı depolar arasında 5 litre/dakika hızla dolaşıyor ve her an iyice karıştırılıyor. Her iki depodaki tuz miktarını zamanın fonksiyonu olarak bulunuz.

3 . Üç depo birbirine bağlanmıştır. Birinci depo 100 litre saf su, ikincisi litresinde 1 gram tuz içeren, üçüncüsü de litresinde 2 gram tuz içeren 100'er litre tuzlu su bulunduruyor. Sıvı, depolar arasında 5 litre/dakika hızla dolaşıyor ve her an iyice karıştırılıyor. Her üç depodaki tuz miktarını zamanın fonksiyonu olarak bulunuz.

4 . (a) Sıcak su radyatörünün basitleştirilmiş matematik mode-

li olarak özgül ısısı c olan ve p_1 litre sıvı bulunduran bir depo ile aynı sıvıdan p_2 litre bulunduran ikinci bir depo ele alınıyor. Bu depolar arasında sıvı, hacimleri ihmal edilebilecek borularla dakikada q litre hızla dolandırılıyor. Birinci depo T_1 sıcaklığındaki havaya Newton soğuma yasasına göre k_1 orantı katsayısı ile ısı kaybediyor. İkinci depo da T_2 sıcaklığındaki havaya aynı yasaya göre k_2 katsayısı ile ısı kaybediyor. Başlangıçta iki depodaki sıvı da T_0 derecedir. Bir ısı kaynağı birinci depoya dakikada h kalori ısı sağladığını ve her tank içinde sıcaklığın düzgün dağıldığını kabul ederek her tanktaki sıvı sıcaklığını zamanın fonksiyonu olarak verecek olan diferansiyel deenklem sistemini kurunuz.

(b) (a) şıkkında elde ettiğiniz diferansiyel denklemi

$$c = 1,\ p_1 = 900\, litre,\ p_2 = 100\, litre,\ k_1 = 3,\ k_2 = 50,\ q = 15\, litre/dk,$$

$$T_0 = 10°,\ T_1 = 25°,\ T_2 = 20°,\ \text{ve}\ \ h = 100$$

değerleri için çözünüz.

(c) (a) şıkkında elde ettiğiniz diferansiyel denklemi

$$c = 1,\ p_1 = p_2 = 200\ litre,\ k_1 = 2,\ k_2 = 50,\ q = 10\ litre/dakika,$$

$$T_0 = 15°,\ T_1 = 30°,\ T_2 = 20°,\ \ \text{ve}\ \ h = 150$$

değerleri için çözünüz.

OKUNMASI TAVSİYE EDİLEN KİTAPLAR

I. Temel Teori ve Yöntemler

Ford (17)
Martin ve Reissner (38)
Kaplan (30)

II. Daha İleri Teori

Bellman (4)
Ince (26)
Coddington ve Levinston (13)
Hurewitz (25)

Bölüm 8

Laplace Dönüşümü

Bu bölümde başlangıç değer problemlerinin çözümünde bilhassa faydalı olacak bir kavram tanıtacağız. Bu kavram, t gerçel değişkenine bağlı uygun bir $F(t)$ fonksiyonunu, s gerçel değişkeninin başka bir f fonksiyonuna dönüştüren ve *Laplace dönüşümü* denilen kavramdır. Bu dönüşüm, t'nin "bilinmeyen" bir fonksiyonu cinsinden yazılmış bir diferansiyel denkleme ilişkin başalangıç değer problemine uygulandığında onu, s değişkeni bulunduran bir cebirsel probleme dönüştürür. Ancak 8.1 kesiminde önce Laplace dönüşümünün kendisini tanıştıracağız ve en yararlı ve temel özelliklerinden bazılarını çıkaracağız.

8.1 Laplace Dönüşümünün Özellikleri

A. Tanım ve Varlık

TANIM. F, t gerçel değişkeninin $t > 0$ için tanımlı bir fonksiyonu olsun. s bir gerçel değişken ve f de

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt, \tag{8.1}$$

integralinin mevcut olduğu bütün s değerleri için tanımlı olsun. (8.1) integrali ile tanımlı f fonksiyonuna, F'nin *Laplace dönüşümü* denir. F'nin f Laplace dönüşümünü $\mathcal{L}\{F\}$, $f(s)$'yi de $\mathcal{L}\{F(t)\}$ ile gösteririz.

(8.1) integralinin s'nin değerlerinin bir bölgesinde mevcut olacağından emin olmak için, ele alınan F fonksiyonu üzerine bazı kısıtlamalar koymalıyız. Bu kısıtlamalardan kısaca söz etmeden önce bazı basit fonksiyonların Laplace dönüşümlerini doğrudan hesaplayalım.

Örnek 8.1. Her $t > 0$ için $F(t) = 1$ ile tanımlanan F fonksiyonunu ele alalım. $\forall s > 0$ için

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e{-}st.1dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}.1dt =$$

$$\lim_{R\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^R = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-sR}}{s}\right] = \frac{1}{s}$$

olduğundan

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \qquad (s > 0) \tag{8.2}$$

buluruz.

Örnek 8.2. Her $t > 0$ için $F(t) = t$ ile tanımlanan F fonksiyonunu ele alalım. $\forall s > 0$ için

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty e{-}st.tdt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}.tdt = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s^2}(st+1)\right]_0^R$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-sR}}{s^2}(sR+1)\right] = \frac{1}{s^2}$$

olduğundan

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \qquad (s > 0) \tag{8.3}$$

buluruz.

Örnek 8.3. Her $t > 0$ için $F(t) = e^{at}$ ile tanımlanan F fonksiyonunu ele alalım. $\forall s > 0$ için

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e{-}st.e^{at}dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}.e^{at}dt = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^R$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{e^{(a-s)R}}{a-s} - \frac{1}{a-s}\right] == -\frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$

olduğundan

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s-a}, \qquad (s > a) \tag{8.4}$$

buluruz.

Örnek 8.4. Her $t > 0$ için $F(t) = \sin bt$ ile tanımlanan F fonksiyonunu ele alalım. $\forall s > 0$ için

$$\mathcal{L}\{\sin bt\} = \int_0^\infty e{-}st.\sin bt\ dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}.\sin bt\ dt =$$

$$\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{st}}{s^2+b^2}(s\sin bt + b\cos bt)\right]_0^R$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{b}{s^2+b^2} - \frac{e^{-sR}}{s^2+b^2}(s\sin bR + b\cos bR)\right] = \frac{b}{s^2+b^2}$$

olduğundan

$$\mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}, \qquad (s > 0) \tag{8.5}$$

buluruz.

Örnek 8.5. Her $t > 0$ için $F(t) = \cos bt$ ile tanımlanan F fonksiyonunu ele alalım. $\forall s > 0$ için

$$\mathcal{L}\{\cos bt\} = \int_0^\infty e{-}st.\cos bt\ dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}.\cos bt\ dt =$$

$$\lim_{R\to\infty}\left[\frac{e^{st}}{s^2+b^2}(-s\cos bt + b\sin bt)\right]_0^R =$$

$$\lim_{R\to\infty}\left[\frac{s}{s^2+b^2} + \frac{e^{-sR}}{s^2+b^2}(-s\cos bR + b\sin bR)\right] = \frac{s}{s^2+b^2}$$

olduğundan

$$\mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}, \qquad (s > 0) \tag{8.6}$$

buluruz.

Yukarıdaki örneklerin hepsinde (8.1) integralinin bir s bölgesinde mevcut olduğunu doğrudan doğruya gördük. Şimdi bunun daima böyle olduğu bir F fonksiyonları sınıfı belirleyeceğiz. Bu amaç için önce fonksiyonların bazı özelliklerini ele alalım.

TANIM. $a \leq t \leq b$ sonlu aralığı sonlu sayıda alt aralıklara, (i) F fonksiyonu bu aralıkların hepsinin iç tarafında sürekli olacak, (ii) t bu alt aralıkların iç taraflarından uç noktalara yaklaşırken $F(t)$ fonksiyonunun limiti mevcut olacak şekilde parçalanabilirse, F fonksiyonu *parçalı sürekli*'dir denir.

F, $a \leq t \leq b$ aralığında parçalı sürekli ve t_0, $a < t_0 < b$ yukarıdaki tanımda geçen alt aralıklardan birinin iç noktası olsun. t, t_0'a soldan yaklaşırken (yani t'den daha küçük değerlerle yaklaşırken) $F(t)$'nin sonlu limitine; t, t_0'a soldan yaklaşırken *$F(t)$'nin soldan limiti* denir ve

$$\lim_{t \to t_0^-} F(t) \quad \text{veya} \quad F(t_0-)$$

ile gösterilir. Benzer şekilde t, t_0'a sağdan yaklaşırken (yani t'den daha büyük değerlerle yaklaşırken) $F(t)$'nin sonlu limitine, t, t_0'a sağdan yaklaşırken *$F(t)$'nin sağdan limiti* denir ve

$$\lim_{t \to t_0^+} F(t) \quad \text{veya} \quad F(t_0+)$$

ile gösterilir. Böyle bir noktada $F(t_0-)$ ve $F(t_0+)$'nın ikisinin de sonlu olduğunu, fakat genellikle eşit olmayacaklarını tekrar belirtelim.

$F(t)$ fonksiyonu $a \leq t \leq b$ aralığında sürekli ise bu aralıkta parçalı sürekli olacağına ve $F(t)$ fonksiyonu $a \leq t \leq b$ aralığında parçalı sürekli ise bu aralıkta integre edilebilir olduğuna işaret edelim.

Örnek 8.6.

$$F(t) = \begin{cases} -1, & 0 < t < 2, \\ 1, & t > 2 \end{cases}$$

ile tanımlanan F fonksiyonunu ele alalım. $\forall b > 0$ için $F(t)$ fonksiyonu her $0 \leq t \leq b$ aralığında parçalı süreklidir. $t = 2$'de

$$\lim_{t \to 2^-} F(t) = F(2-) = -1$$

$$\lim_{t \to 2^+} F(t) = F(2+) = +1$$

olur. F'nin grafiği Şekil 8.1'de gösterilmiştir.

Şekil 8.1

TANIM. $F(t)$'nin tanımlı olduğu her $t > t_0$ için

$$e^{-\alpha t}|F(t)| < M \tag{8.7}$$

olacak şekilde bir α ve bir M sayısı bulmak mümkünse; F, $e^{\alpha t}$ *üstel mertebesi*'ndendir denir.

Başka bir deyişle bir α sayısı, t'nin yeterince büyük değerleri için $e^{-\alpha t}|F(t)|$ sınırlı olacak şekilde bulunabiliyorsa F, $e^{\alpha t}$ üstel mertebesindendir denir. (8.7)'den $F(t)$'nin tanımlı olduğu her $t > t_0$ için

$$|F(t)| < Me^{\alpha t} \tag{8.8}$$

olur. Böylece F üstel mertebeden ve $t \to \infty$ için F'nin $F(t)$ değerleri sonsuz oluyorsa, bu değerler bir $e^{\alpha t}$'nin bir M katından daha çabuk sonsuz olamazlar. F fonksiyonu $e^{\alpha t}$ üstel mertebesinden ise, herhangi bir $\beta > \alpha$ için $e^{\beta t}$ üstel mertebesinden olacağına dikkat çekelim.

Örnek 8.7. Her sınırlı fonksiyon, $\alpha = 0$ olmak üzere üstel mertebedendir. Böylece mesela $\sin bt$, $\cos bt$ gibi fonksiyonlar üstel mertebedendirler.

Örnek 8.8. $F(t) = e^{at} \sin bt$ fonksiyonu, $\alpha = a$ olmak üzere üstel mertebedendir. Çünkü

$$e^{-\alpha t}|F(t)| = e^{-at}e^{at}|\sin bt| = |\sin bt|$$

olur ki her t için sınırlıdır.

Örnek 8.9. $n > 0$ için $F(t) = t^n$ fonksiyonunu ele alalım.

$$e^{-\alpha t}|F(t)| = e^{-\alpha t}t^n$$

olacağından, $\forall\alpha > 0$ için $\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}t^n = 0$ olduğundan $M > 0$ ve $t_0 > 0$ sabitleri her $t > t_0$ için

$$e^{-\alpha t}|F(t)| < M$$

olacak şekilde bulunabilir. Böylece $F(t) = t^n$, $\alpha > 0$ herhangi bir pozitif sayı olmak üzere üstel mertebedendir.

Örnek 8.10. $F(t) = e^{t^2}$ fonksiyonunu üstel mertebeden değildir. Çünkü bu durumda $e^{-\alpha t}|F(t)| = e^{t^2-\alpha t}$ olacağından, $\forall\alpha > 0$ için

$$\lim_{t\to\infty} e^{t^2-\alpha t} = +\infty$$

olur.

Şimdi (8.1) integralinin mevcut olması için F'nin üzerine konması yeterli olan şartları verecek bir teorem bulacağız. İstenen sonucu elde etmek için ispatsız olarak yüksek matematiğinin aşağıdaki iki teoremine ihtiyacımız var.

TEOREM A. Has olmayan integraller için karşılaştırma testi.

Hipotez. (i) g ve G, $a \leq t \leq \infty$ üzerinde

$$0 \leq g(t) \leq G(t)$$

olur,

(ii) $\int_a^\infty G(t)\, dt$ mevcuttur,

(iii) $g(t)$ fonksiyonu $a \leq t \leq \infty$ aralığının her kapalı alt aralığında integre edilebilir.

Hüküm. $\int_a^\infty g(t)\, dt$ mevcuttur.

TEOREM B.

Hipotez. (i) g gerçel fonksiyonu, $a \leq t < \infty$ ışınının her kapalı alt aralığında integre edilebilir olsun.

(ii) $\int_a^\infty |g(t)|\, dt$ mevcut olsun.

Hüküm. $\int_a^\infty g(t)\, dt$ mevcuttur.

Şimdi Laplace dönüşümü için bir varlık teoremi yazacağız ve ispat edeceğiz.

TEOREM 8.1.

Hipotez. F aşağıdaki özelliklere sahip bir fonksiyon olsun:

(i) F, $a \leq t \leq b$ $(b > 0)$ gibi her sonlu kapalı aralıkta parçalı süreklidir.

(ii) F, üstel mertebedendir. Yani; α, M, $t_0 > 0)$ sayıları her $t > t_0$ için

$$e^{-\alpha t}|F(t)| < M$$

olacak şekilde bulunabilir.

Hüküm.

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt,$$

Laplace dönüşümü mevcuttur.

İspat.

$$\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt = \int_0^{t_0} e^{-st}F(t)dt + \int_{t_0}^\infty e^{-st}F(t)dt$$

elde ederiz. (i) hipotezine göre bu integrallerden birincisi mevcuttur. (ii). hipotezden her $t > t_0$ için

$$e^{-st}|F(t)| < e^{-st}Me^{-\alpha t} = Me^{-(s-\alpha)t}$$

buluruz. Buradan $s > \alpha$ için

$$\int_0^\infty Me^{-(s-\alpha)t}dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R Me^{-(s-\alpha)t}dt = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{Me^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha}\right]_{t_0}^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{M}{s-\alpha}\right] \left[e^{-(s-\alpha)t_0} - e^{-(s-\alpha)R}\right] = \left[-\frac{M}{s-\alpha}\right] e^{-(s-\alpha)t_0}$$

bulunur. Böylece

$$\int_0^\infty Me^{-(s-\alpha)t}dt$$

integralinin $s > \alpha$ için mevcut olduğu anlaşılır. Nihayet (i) hipotezinden $e^{-st}|F(t)|$ fonksiyonu $t_0 \le t < \infty$ aralığının her sonlu kapalı alt aralığında integre edilebilir bir fonksiyondur. Bu yüzden

$$g(t) = e^{-st}|F(t)|, \quad G(t) = Me^{-(s-\alpha)t}$$

olmak üzere Teorem A'yı uygularsak $s > \alpha$ için

$$\int_{t_0}^\infty e^{-st}|F(t)|dt$$

integrali mevcuttur. Başka bir deyişle

$$\int_{t_0}^\infty \left|e^{-st}F(t)\right| dt$$

integrali $s > \alpha$ için mevcuttur. Böylece Teorem B'ye göre

$$\int_{t_0}^\infty e^{-st}F(t)dt$$

integrali de $s > \alpha$ için mevcuttur. Böylece F'nin Laplace dönüşümü $s > \alpha$ için mevcuttur.

Şimdi bir an için geriye dönüp ispata bakalım. Aslında F fonksiyonu konulan hipotezleri sağlayınca

$$\int_{t_0}^\infty e^{-st}|F(t)|dt$$

integralinin $s > \alpha$ için mevcut olduğunu ispat ettik. Ayrıca (i) hipotezi

$$\int_0^{t_0} e^{-st}|F(t)|dt$$

integralinin mevcut olduğunu söylüyordu. Böylece

$$\int_0^\infty e^{-st}|F(t)|dt$$

integralinin $s > \alpha$ için mevcut olduğunu ispat etmiş olduk. Yani F fonksiyonu Teorem 8.1'in hipotezlerini sağlayınca, $s > \alpha$ için sadece $\mathcal{L}\{F\}$ değil, $\mathcal{L}\{|F|\}$ de mevcut olur. Başka bir deyişle

$$\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$$

integrali $s > \alpha$ için mutlak yakınsaktır.

Teorem 8.1'in hipotezlerinin, F fonksiyonunun $\mathcal{L}\{F\}$ dönüşümünün mevcut olması için gerekli olmadığına işaret etmeden de geçmeyelim. Yani Teorem 8.1'in hipotezlerini gerçeklemedikleri halde, $\mathcal{L}\{F\}$ dönüşümleri mevcut F fonksiyonları da vardır. Mesela (i) hipotezinin aşağıdaki daha az kısıtlayıcı şartla değiştirildiğini kabul edelim.

(i)$'$ F fonksiyonu $a > 0$ olmak üzere her $a \leq t \leq b$ kapalı sonlu aralığında parçalı sürekli olsun. Ayrıca $0 < n < 1$ gibi bir n sayısı için

$$\lim_{t\to 0+} |t^n F(t)|$$

sınırlı kalsın.
O zaman (ii) şartı da sağlandığında, $\mathcal{L}\{F\}$ dönüşümünün mevcut olduğu ispat edilebilir. Böylece mesela

$$F(t) = t^{-\frac{1}{3}}, \quad t > 0$$

fonksiyonu için $\mathcal{L}\{F\}$ dönüşümü mevcut olur. Halbuki

$$\lim_{t\to 0+} F(t) = \infty$$

olduğundan F fonksiyonu (i) şartını sağlamamaktadır. Fakat F, $n = 2/3$ için yukarıdaki daha az kısıtlayıcı (i)' şartını sağlamaktadır ve üstel mertebedendir.

B. Laplace Dönüşümünün Temel Özellikleri

TEOREM 8.2. Lineerlik Özelliği. F_1 ve F_2 Laplace dönüşümü mevcut fonksiyonlar; c_1, c_2 de sabitler olsun. O zaman

$$c_1\mathcal{L}\{F_1(t)+F_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{F_2(t)\} \tag{8.9}$$

olur.

İspat. Bu teorem (8.1) denklemindeki tanımdan hemen elde edilir.

Örnek 8.11. $\mathcal{L}\{\sin^2 at\}$'yi bulmak için Teorem 8.2'yi kullanınız.

$$\sin^2 at = \frac{1}{2}(1-\cos 2at)$$

olduğundan

$$\mathcal{L}\{\sin^2 at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(1-\cos 2at)\right\}$$

elde ederiz. Teorem 8.2'yi kullanınca da

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(1-\cos 2at)\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos 2at\}$$

bulunur. (8.2)'den $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ ve (8.6)'dan $\mathcal{L}\{\cos 2at\} = \frac{s}{s^2+4a^2}$ olduğundan

$$\mathcal{L}\{\sin^2 at\} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4a^2} \tag{8.10}$$

elde edilir.

TEOREM 8.3.

Hipotezler. (i) F, $t \geq 0$ için sürekli, gerçel ve $e^{-\alpha t}$ üstel mertebesinden bir fonksiyon olsun.

(ii) $F(t)$'nin $F'(t)$ türevi her sonlu kapalı $0 \leq t \leq b$ aralığında parçalı sürekli olsun.

Hüküm. $s > \alpha$ için $\mathcal{L}\{F'\}$ mevcuttur ve

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s\mathcal{L}\{F(t)\} - F(0) \tag{8.11}$$

olur.

İspat. Laplace dönüşümünün tanımından limitin mevcut olması kaydıyla

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} F'(t)dt$$

olur. Her kapalı $0 \le t \le R$ aralığında $F'(t)$'nin

$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le R$$

olmak üzere $t_1,\ t_2, \ldots, t_n$ gibi en çok n tane süreksizlik noktası bulunabilir. O zaman

$$\int_0^R e^{-st} F'(t)dt = \int_0^{t_1} e^{-st} F'(t)dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} F'(t)dt + \ldots + \int_{t_n}^{R} e^{-st} F'(t)dt$$

yazabiliriz. Sağ tarafta integral altındaki fonksiyonların hepsi de integrasyon bölgelerinde sürekli olduklarından, bunlara kısmî integrasyon uygulayabiliriz:

$$\int_0^R e^{-st} F'(t)dt = \left[e^{-st}F(t)\right]_0^{t_1-} + s\int_0^{t_1} e^{-st} F(t)dt +$$

$$\left[e^{-st}F(t)\right]_{t_1+}^{t_2-} + s\int_{t_1}^{t_2} e^{-st} F(t)dt + \ldots + \left[e^{-st}F(t)\right]_{t_n+}^{R-} + s\int_{t_n}^{R} e^{-st} F(t)dt$$

(i) hipotezinden F, $t \ge 0$ için sürekli olduğundan

$$F(t_1-) = F(t_1+),\ F(t_2-) = F(t_2+),\ \ldots, F(t_n-) = F(t_n+)$$

bulunur. Yukarıdaki integralleri, bunları gözönüne alarak toplarsak geriye,

$$\int_0^R e^{-st} F'(t)dt = -F(0) + e^{-sR}F(R) + s\int_0^R e^{-st} F(t)dt$$

kalır. Yine (i). hipotezden $F(t)$, $e^{-\alpha t}$ üstel mertebesindendir. Buna göre $M,\ t_0 > 0$ sayıları $t > t_0$ için $e^{-\alpha t}|F(t)| < M$ olacak şekilde bulunabilirler. Böylece $R > t_0$ için

$$|e^{-sR}F(R)| < Me^{-(s-\alpha)R}$$

bulunur. O halde $s > \alpha$ iken

$$\lim_{R\to\infty} e^{-sR}F(R) = 0$$

olacaktır. Ayrıca

$$\lim_{R\to\infty} s\int_0^R e^{-st}F(t)dt = s\mathcal{L}\{F(t)\}$$

olacağından

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}F'(t)dt = -F(0) + s\mathcal{L}\{F(t)\}$$

elde edilir. Böylece $\mathcal{L}\{F'(t)\}$ dönüşümü $s > \alpha$ için mevcuttur ve (8.11) ile verilir.

Örnek 8.12. $F(t) = \sin^2 at$ ile tanımlı fonksiyonu gözönüne alalım. Bu fonksiyon, Teorem 8.3'ün hipotezlerini doğrular.

$F'(t) = 2a\cos at\ \sin at$ ve $F(0) = 0$ olduğundan (8.11) eşitliği

$$\mathcal{L}\{2a\cos at\ \sin at\} = s\mathcal{L}\{\sin^2 at\}$$

elde ederiz. (8.10)'u kullanınca

$$\mathcal{L}\{\sin^2 at\} = \frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$$

bulunur. Böylece

$$\mathcal{L}\{2a\cos at\ \sin at\} = \frac{2a^2}{s^2+4a^2}$$

elde edilir. Öte yandan $2a\sin at\cos at = a\sin 2at$ olduğundan

$$\mathcal{L}\{\sin 2at\} = \frac{2a}{s^2+4a^2}$$

elde ederiz. Bunun $b = 2a$ alındığında, 8.4 örneğinde elde edilen (8.5) formülü ile aynı sonuç olduğuna dikkat ediniz.

Şimdi Teorem 8.3'ü genelleştirerek şu teoremi elde edeceğiz.

TEOREM 8.4.

Hipotezler. (i) F, $(n-1)$.'ye kadar türevleriyle birlikte $t \geq 0$ için sürekli, gerçel ve $e^{-\alpha t}$ üstel mertebesinden bir fonksiyon olsun.

(ii) $F(t)$'nin $F^{(n)}(t)$ türevi her sonlu kapalı $0 \leq t \leq b$ aralığında parçalı sürekli olsun.

Hüküm. $s > \alpha$ için $\mathcal{L}\{F^{(n)}\}$ mevcuttur ve

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{F(t)\} - s^{n-1}F(0) -$$

$$s^{n-2}F'(0) - s^{n-3}F''(0) - \ldots - sF^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0) \tag{8.12}$$

olur.

İspatın Ana Hatları. İspata Teorem 8.3'te olduğu gibi $s > \alpha$ için $\mathcal{L}\{F'\}$ mevcut ve

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = s\mathcal{L}\{F^{(n-1)}(t)\} - F(n-1)(0)$$

olduğu ispatlanarak başlanır ve sonra ispat matematik indüksiyonla bitirilir.

Örnek 8.13. Teorem 8.4'ü daha önce doğrudan hesaplayıp (8.5) eşitliği ile ifade ettiğimiz $\mathcal{L}\{\sin bt\}$ dönüşümünü bulmak için $n = 2$ alarak kullanacağız. $F'(t) = \sin bt$ ile tanımlı fonksiyonun teoremin hipotezlerini $\alpha = 0$ için sağladığı bellidir. $n = 2$ için (8.12) ifadesi

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{F(t)\} - sF(0) - F'(0) \tag{8.13}$$

halini alır.

$$F'(t) = b\cos bt, \;\; F''(t) = -b^2 \sin bt, \;\; F(0) = 0, \;\; F'(0) = b$$

olduğundan, bunları (8.13)'te yerlerine koyarak

$$\mathcal{L}\{-b^2 \sin bt\} = s^2\mathcal{L}\{\sin bt\} - b, \quad -b^2\mathcal{L}\{\sin bt\} = s^2\mathcal{L}\{\sin bt\} - b$$

ve böylece

$$\mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2 + b^2}, \quad (s > 0)$$

bulunur ki bu, daha önce doğrudan bulunan (8.5) ile aynıdır.

TEOREM 8.5. Öteleme Özelliği.

Hipotez. F, $s \geq 0$ için $\mathcal{L}\{F\}$ dönüşümü mevcut bir fonksiyon olsun.

Hüküm. Her a sabiti için, $f(s) = \mathcal{L}\{F\}$ olmak üzere, her $s > \alpha + a$ için geçerli olmak üzere

$$\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} = f(s-a) \tag{8.14}$$

olur.

İspat. Tanıma göre,

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$$

olacaktır. s'yi $s-a$ ile değiştirirsek,

$$f(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}F(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\left[e^{at}F(t)\right]dt = \mathcal{L}\{e^{at}F(t)\}$$

olur.

Örnek 8.14. $\mathcal{L}\{te^{at}\}$'yi bulmak için $F(t) = t$ olmak üzere Teorem 8.5'i kullanalım. $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \mathcal{L}\{t\}$ olmak üzere, her $s > a$ için geçerli olmak üzere

$$\mathcal{L}\{e^{at}t\} = f(s-a)$$

olur. (8.3)'ten

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad (s > 0)$$

olduğundan

$$\mathcal{L}\{te^{at}\} = \frac{1}{(s-a)^2}, \quad (s > a) \tag{8.15}$$

elde ederiz.

Örnek 8.15. $\mathcal{L}\{e^{at}\sin bt\}$'yi bulmak için $F(t) = \sin bt$ alalım.

$$f(s) = \mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}, \quad (s > 0)$$

olduğundan

$$f(s-a) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad (s > 0)$$

ve böylece,

$$\mathcal{L}\{e^{at} \sin bt\} = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad (s > 0) \tag{8.16}$$

buluruz.

TEOREM 8.6.

Hipotez. F, Teorem 8.1'in hipotezlerini sağlayan ve Laplace dönüşümü

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$$

olan bir fonksiyon, G de

$$G(t) = \begin{cases} 0, \ 0 < t < a, \\ F(t-a), \ t > a \end{cases} \tag{8.17}$$

şeklinde bir fonksiyon olsun.

Hüküm.

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as} f(s) \tag{8.18}$$

olur.

İspat.

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} G(t) dt$$

$$= \int_0^a e^{-st}.0 dt + \int_a^\infty e^{-st} F(t-a) dt = \int_a^\infty e^{-st} F(t-a) dt$$

olur. Burada $t - a = \tau$ koyarak

$$\int_a^\infty e^{-st} F(t-a) dt = \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} F(\tau) d\tau$$

$$e^{-as} \int_0^\infty e^{-s\tau} F(\tau) d\tau = e^{-as} \mathcal{L}\{F(\tau)\}$$

olur. Demek ki

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as} f(s)$$

sonucuna varırız.

Örnek 8.16.

$$G(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{\pi}{2}, \\ \sin t, & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

olduğuna göre $\mathcal{L}\{G(t)\}$'yi bulunuz.

$\sin t = \cos(t - \pi/2)$ olduğundan

$$G(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{\pi}{2}, \\ \cos(t - \pi/2)t, & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

yazabiliriz. Böylece $F(t) = \cos t$ ile Teorem 8.6'yı uygulayabiliriz. $b = 1$ alırsak

$$f(s) = \mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}$$

olmak üzere

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-\frac{\pi}{2}s} f(s)$$

buluruz. Böylece

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \frac{se^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}$$

sonucuna varırız.

TEOREM 8.7.

Hipotez. F, Teorem 8.1'in hipotezlerini sağlayan ve Laplace dönüşümü

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt \tag{8.19}$$

olan bir fonksiyon olsun.

Hüküm.

$$\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}[f(s)] \tag{8.20}$$

olur.

İspat. (8.19) ifadesinin iki yanını s'ye göre n defa türetelim. Bu türetmeye bu incelediğimiz durumda hakkımız vardır ve

$$f'(s) = (-1)^1 \int_0^\infty e^{-st}.t.F(t)dt$$

$$f''(s) = (-1)^2 \int_0^\infty e^{-st}.t^2.F(t)dt$$

$$\vdots$$
$$f^n(s) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-st}.t^n.F(t)dt$$

olur ki (8.20)'nin doğruluğu buradan görülmektedir.

Örnek 8.17. $\mathcal{L}\{t^2 \sin bt\}$'yi bulunuz.
Teorem 8.7'den

$$\mathcal{L}\{t^2 \sin bt\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}[f(s)]$$

olur. (8.5)'ten

$$f(s) = \mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}$$

olduğundan

$$\frac{d}{ds}[f(s)] = -\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}, \qquad \frac{d^2}{ds^2}[f(s)] = \frac{6bs^2-2b^3}{(s^2+b^2)^3}$$

ve böylece

$$\mathcal{L}\{t^2 \sin bt\} = \frac{6bs^2-2b^3}{(s^2+b^2)^3}$$

elde edilir.

C. Ters Dönüşüm ve Konvolüsyon

Bu bölümde buraya kadar şu problemle meşgul olduk: $t > 0$ için tanımlı bir F fonksiyonu verildiğinde bunun $\mathcal{L}\{F\}$ ya da $f(s)$ ile gösterilen Laplace dönüşümünü bulmak. Şimdi ters problemi ele alalım: Bir $f(s)$ fonksiyonu verildiğinde, Laplace dönüşümü bu olan bir $F(t)$ fonksiyonu bulmak. Böyle bir F fonksiyonu için $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$ gösterimini kullanacağız ve $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ yazacağız, bu dönüşüme *ters Laplace dönüşümü*, $F(t)$'ye de $f(s)$'nin ters dönüşmüşü diyeceğiz. Yani

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t) \leftrightarrow \mathcal{L}\{F\} = f(s)$$

olacak.

Burada hemen şu sorular ortaya çıkar:

(a) Bir f fonksiyonu verildiğinde bunun ters dönüşmüşü var mıdır?

(b) f'nin bir ters dönüşmüşünün varlığını kabul etsek, bu ters dönüşmüş tek midir?

(c) f'nin ters dönüşmüşü nasıl bulunur?

(a) sorusunu "her zaman değil" diye cevaplayacağız. Çünkü hiç bir $F(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü olmayan $f(s)$ fonksiyonları pekala vardır. f'nin bir fonksiyonun Laplace dönüşümü olması için bazı süreklilik şartlarını sağlaması ve $s \to \infty$ için uygun şekilde davranması gerekir. Okuyucuyu ferahlatmak için, çok sayıda f fonksiyonunun ters dönüşümlerinin bulunmuş ve tablo haline getirilmiş olduğunu söyleyelim.

Şimdi (b) sorusuna gelelim. f'nin tersi olan bir fonksiyon olduğunu kabul edip, bu tersin eğer varsa hangi anlamda tek olacağını araştıralım. Aşağıdaki teoremin ifadesini ispatsız olarak verip, bu soruyu amacımıza uygun şekilde cevapladığımızı kabul edeceğiz.

TEOREM 8.8.

Hipotez. F ve G fonksiyonları $t \geq 0$ için sürekli ve aynı $f(s)$ Laplace dönüşümüne sahip iki fonksiyon olsun.

Hüküm. $\forall t \geq 0$ için $F(t) = G(t)$ olur.

Buna göre $f(s)$'nin $F(t)$ gibi sürekli bir tersi olduğu biliniyorsa bu, onun yegane tersidir. Aşağıdaki örneği inceleyelim:

Örnek 8.18. (8.2) eşitliğinden $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ olacaktır. Böylece $f(s) = \frac{1}{s}$ ile tanımlı f fonksiyonunun ters dönüşümü her t için $F(t) = 1$ ile tanımlı F *sürekli* fonksiyonu olur. Buradan Teorem 8.8'e göre $f(s) = \frac{1}{s}$ ile tanımlı f fonksiyonunun başka *sürekli* ters dönüşümü yoktur. Bununla birlikte f fonksiyonunun sürekli olmayan başka ters dönüşümleri vardır. Mesela G fonksiyonu

$$G(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 3 \\ 2, & t = 3 \\ 1, & t > 3 \end{cases}$$

ile tanımlansın, o zaman $s > 0$ olmak üzere

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}G(t)dt = \int_0^3 e^{-st}dt + \int_3^\infty e^{-st}dt =$$

$$\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^3 + \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_3^R = \frac{1}{s}$$

olacaktır. Böylece bu sürekli olmayan G fonksiyonu da $f(s) = \frac{1}{s}$ ile tanımlı f fonksiyonunun ters dönüşümüşüdür. Ancak tekrar belirtelim, $f(s) = \frac{1}{s}$ ile tanımlı f fonksiyonunun *sürekli* ters dönüşümü her t için $F(t) = 1$ ile tanımlı F fonksiyonudur. Aslında her t için $F(t) = 1$ ile tanımlı F fonksiyonunun, $f(s) = \frac{1}{s}$ ile tanımlı f fonksiyonunun *yegane sürekli* tersi olduğunun bilincinde olarak

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = 1$$

yazarız.

Şimdi (c) sorusunu ele alalım. f fonksiyonunun bir tek sürekli tersi olduğunu kabul edelim. Bu tersi nasıl bulacağız? Bu kitapta tersin doğrudan bulunması anlatılmayacak. Verilen bir f fonksiyonunun tersini bulmak için asıl gerecimiz bir dönüşüm tablosu olacak. Daha önce de söylediğimiz gibi kitaplarda çok geniş dönüşüm tabloları vardır. Bu kısmın sonunda bu çeşitten çok kısa bir tablo göreceksiniz.

f fonksiyonunun tersini bulmak için dönüşüm tablosunu kullanırken, verilen $f(s)$ fonksiyonunda tablodaki çeşitli dönüşümlerin kullanılabilmesini sağlamak amacıyla, bir dizi işlem yapılmalıdır. Diğer teknikler arasında basit kesirlere ayırma en sık başvurulanlardandır. Bunun kullanımını 8.20 örneğinde göstereceğiz.

Örnek 8.18. (8.1) tablosunu kullanarak

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2 + 6s + 13}\}$$

ters dönüşümünü hesaplayınız.

Çözüm. (8.1) tablosunun $f(s)$ sütununa bakarak önce $f(s) = \frac{1}{as^2+bs+c}$'yi ararız. Tabloda böyle bir fonksiyon yok ancak 11 numarada

$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$ var. Verilen $\frac{1}{s^2+6s+13}$ ifadesini aşağıdaki işlemlerle bu hale getirmemiz mümkündür:

$$\frac{1}{s^2+6s+13} = \frac{1}{(s+3)^2+4} = \frac{1}{2}\frac{2}{(s+3)^2+2^2}$$

olur. Şimdi (8.1) tablosunun 11. satırına bakarsak

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+6s+13}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{(s+3)^2+2^2}\} = \frac{1}{2}e^{-3t}\sin 2t$$

bulunur.

Örnek 8.20. (8.1) tablosunu kullanarak

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+1)}\}$$

ters dönüşümünü hesaplayınız.

Çözüm. (8.1) tablosunun $f(s)$ sütununda böyle bir şey görülmüyor. Basit kesirlere ayırma yöntemini kullanırsak,

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

ve böylece

$$1 = (A+B)s^2 + Cs + A \quad \text{veya} \quad A+B=0, \quad C=0, \quad A=1$$

olur ki,

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

basit kesirleri elde edilir. Böylece

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+1)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}$$

Şimdi (8.1) tablosunun 1. ve 4. satırlarından

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = 1 \quad \text{ve} \quad \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\} = \cos t$$

bulunur. Böylece

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+1)}\} = 1 - \cos t$$

elde edilir.

Dönüşüm tablolarının kullanılması sırasında başka bir yardımcı da aşağıda vereceğimiz konvolüsyon teorisidir. Önce F ve G fonksiyonlarının konvolüsyonunu tanımlayalım.

TANIM. *Konvolüsyon* F ve G her kapalı sonlu $0 \leq t \leq b$ aralığında parçalı sürekli ve üstel mertebeden olsunlar. $F * G$ ile gösterilen ve

$$F(t) * G(t) = \int_0^t F(\tau)G(t-\tau)d\tau \tag{8.21}$$

eşitliği ile tanımlanan fonksiyona, F ve G fonksiyonlarının *konvolüsyon*'u denir.

(8.21)'deki integralde $u = t - \tau$ yerine koyması ile değişken dönüşümü yapalım.

$$F(t) * G(t) = \int_0^t F(\tau)G(t-\tau)d\tau = -\int_t^0 F(t-u)G(u)du$$

$$= \int_0^t G(u)F(t-u)du = G(t) * F(t)$$

olur ki

$$F(t) * G(t) = G(t) * F(t) \tag{8.22}$$

değişme özelliğini ispat etmiş olduk.

F ve G, $0 \leq t \leq b$ $(b > 0)$ gibi her sonlu kapalı aralıkta parçalı sürekli ve $e^{\alpha t}$ üstel mertebesinden olsunlar. Bu durumda $F * G$'nin de, $\epsilon > 0$ herhangi bir pozitif sayı olmak üzere, $0 \leq t \leq b$ $(b > 0)$ gibi her sonlu kapalı aralıkta parçalı sürekli ve $e^{(\alpha+\epsilon)t}$ üstel mertebesinden olduğunu gösterebiliriz. Böylece yeterince büyük s'ler için $\mathcal{L}\{F * G\}$ mevcut olur. Daha açıkçası $s > a$ için $\mathcal{L}\{F * G\}$ dönüşümünün varlığı kanıtlanabilir.

Şimdi aşağıdaki $\mathcal{L}\{F * G\}$'ye ilişkin önemli teoremi ispat edeceğiz.

TEOREM 8.8.

Hipotez. F ve G, $0 \leq t \leq b$ gibi her sonlu kapalı aralıkta parçalı sürekli ve $e^{\alpha t}$ üstel mertebesinden olsunlar.

Hüküm. $s > a$ için

$$\mathcal{L}\{F * G\} = \mathcal{L}\{F\}\mathcal{L}\{G\} \tag{8.23}$$

olur.

İspat. Laplace dönüşümünün tanımından $\mathcal{L}\{F * G\}$,

$$\int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t F(\tau)G(t-\tau)d\tau\right]dt \tag{8.24}$$

ile tanımlı fonksiyondur. (8.24)'deki integral,

$$\int_0^\infty \int_0^t e^{-st}F(\tau)G(t-\tau)d\tau\ dt \tag{8.25}$$

ardışık integrali haline getirilebilir. Ayrıca (8.25)'deki ardışık integral de

$$\int\int_{R_1} e^{-st}F(\tau)G(t-\tau)d\tau\ dt \tag{8.26}$$

iki katlı integraline dönüştürülebilir. Burada R_1, Şekil 8.2'deki $\tau = 0$ ve $t = \tau$ çizgileriyle sınırlı, 45°'lik kama şeklindeki bölgedir.

Şimdi (8.26)'daki iki katlı integrali dönüştürmek için

$$\begin{cases} u = t - \tau \\ v = \tau \end{cases} \tag{8.27}$$

değişken dönüşümünü yapalım. (8.27)'deki koordinat dönüşümünün Jacobianı 1'dir ve τ, t düzleminin R_1 bölgesini, u, v düzleminin birinci dörttebirine dönüştürür. Böylece (8.27)'deki iki katlı integral

$$\int\int_{R_2} e^{-s(u+v)}F(v)G(u)du\ dv \tag{8.28}$$

iki katlı integraline dönüştürülebilir. Burada R_2, Şekil 8.3'deki $u > 0$, $v > 0$ ile tanımlı dörttebir düzlem parçasıdır.

(8.28)'deki iki katlı integral

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)}F(v)G(u)du\ dv \tag{8.29}$$

ardışık integraline denktir. Fakat (8.29)'daki ardışık integral de

$$\int_0^\infty e^{-sv} F(v) dv \int_0^\infty e^{-su} G(u) du \tag{8.30}$$

şeklinde yazılabilir. Ancak (8.30)'da soldaki integral $\mathcal{L}\{F\}$'i, sağdaki integral de $\mathcal{L}\{G\}$'yi tanımlar. Böylece (8.30) ifadesi $\mathcal{L}\{F\}\mathcal{L}\{G\}$'den ibarettir.

Şekil 8.2 Şekil 8.3

Yukarıdaki integraller $s > a$ için yakınsak olduklarından, yapılan işlemler $s > a$ için geçerli işlemlerdir. Böylece

$$\mathcal{L}\{F * G\} = \mathcal{L}\{F\}\mathcal{L}\{G\} \qquad s > a$$

olduğunu göstermiş olduk.

$\mathcal{L}\{F\}$'yi f, $\mathcal{L}\{G\}$'yi de g ile gösterirsek (8.23)'ü

$$\mathcal{L}\{F * G\} = f(s)\ g(s)$$

olarak yazabiliriz. Neticede

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\ g(s)\} = F(t) * G(t) = \int_0^t F(\tau) G(t-\tau) d\tau, \tag{8.31}$$

bulunur. (8.22)'yi kullanırsak,

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\ g(s)\} = F(t) * G(t) = \int_0^t G(\tau)F(t-\tau)d\tau, \qquad (8.32)$$

bulunur.

Şimdi bize bir $h(s)$ fonksiyonu verilsin ve $\mathcal{L}^{-1}\{h(s)\}$ ters dönüşümünü bulmak isteyelim. $h(s)$ fonksiyonu

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t) \quad \text{ve} \quad \mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} = G(t)$$

bilinen fonksiyonlar olmak üzere $h(s) = f(s).g(s)$ olarak yazılabilirse, $\mathcal{L}^{-1}\{h(s)\}$ ters dönüşümü (8.31) veya (8.32) kullanılarak bulunabilir.

Örnek 8.21. Konvolüsyon teoremini ve (8.1) tablosunu kullanarak

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+1)}\}$$

ters dönüşümünü hesaplayınız.

Çözüm. $\frac{1}{s(s^2+1)}$ fonksiyonunu $f(s) = \frac{1}{s}$ ve $g(s) = \frac{1}{s^2+1}$ fonksiyonlarının çarpımı olarak yazalım. Tablonun 1. ve 3. satırlarından

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = F(t) = 1 \quad \text{ve} \quad \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} = G(t)\sin t$$

bulunur ki (8.31)'den

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+1)}\} = F(t) * G(t) = \int_0^t 1.\sin(t-\tau)d\tau$$

ve (8.32)'den

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+1)}\} = G(t) * F(t) = \int_0^t \sin\tau.1\ d\tau$$

elde edilir. Bu integrallerden ikincisi biraz daha basittir. Bundan

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+1)}\} = 1 - \cos t$$

bulunur.

Bu sonucu 8.20 örneğinde basit kesirlere ayırmayla elde etmiş olduğumuzu hatırlayın.

ALIŞTIRMALAR

1. (a) $\mathcal{L}\{t^2\}$
(b) $\mathcal{L}\{\sinh bt\}$ dönüşümlerini bulmak için Laplace dönüşümünün tanımını kullanınız.

2. (a) $\mathcal{L}\{\cos^2 at\}$
(b) $\mathcal{L}\{\sin at.\sin bt\}$ dönüşümlerini bulmak için Teorem 8.2'yi kullanınız.

3. $\mathcal{L}\{\sin^3 at\}$'yi bulmak için Teorem 8.2'yi ve $\mathcal{L}\{\sin^2 at.\cos at\}$'yi bulmak için Teorem 8.3'ü kullanınız.

4. $\mathcal{L}\{\cos^3 at\}$'yi bulmak için Teorem 8.2'yi ve $\mathcal{L}\{\cos^2 at.\sin at\}$'yi bulmak için Teorem 8.3'ü kullanınız.

5. $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$ verilmiştir. $\mathcal{L}\{t^4\}$'ü bulmak için Teorem 8.4'ü kullanınız.

6. (a) $\mathcal{L}\{t^2e^{at}\}$
(b) $\mathcal{L}\{e^{at}\sinh^2 bt\}$ dönüşümlerini bulmak için Teorem 8.5'i kullanınız.

7. (a) $G(t) = \begin{cases} 0 \ , & 0 < t < \frac{\pi}{2}, \\ \cos t, & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ (b) $G(t) = \begin{cases} 0 \ , & 0 < t < 2, \\ t, & t > 2 \end{cases}$
olduğuna göre $\mathcal{L}\{G(t)\}$'yi bulmak için Teorem 8.6'yı kullanınız.

8. (a) $\mathcal{L}\{t^2\cos bt\}$
(b) $\mathcal{L}\{t^2\sin bt\}$
(c) $\mathcal{L}\{t^4e^{at}\}$ dönüşümlerini bulmak için Teorem 8.7'yi kullanınız.

9-18. problemlerde verilen $f(s)$ fonksiyonlarına karşılık $F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$ fonksiyonunu bulmak için Tablo 8.1'i kullanınız.

8. $f(s) = \frac{2}{s^2+9}$ 10. $f(s) = \frac{3s}{s^2-4}$
11. $f(s) = \frac{5}{(s-2)^4}$ 12. $f(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+7}$
13. $f(s) = \frac{5s}{s^2+4s+4}$ 14. $f(s) = \frac{s+10}{s^2+8s+20}$

15. $f(s) = \frac{1}{s^3+4s^2+3s}$
16. $f(s) = \frac{s+1}{s^3+2s}$
17. $f(s) = \frac{s+3}{(s^2+4)^2}$
18. $f(s) = \frac{s+5}{s^4+3s^3+2s^2}$

	F(t)	f(s)
1	1	$\frac{1}{s}$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3	$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
4	$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
5	$\sinh bt$	$\frac{b}{s^2-b^2}$
6	$\cosh bt$	$\frac{s}{s^2-b^2}$
7	$t^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
8	$t^n e^{at} \quad (n = 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
9	$t \sin bt$	$\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$
10	$t \cos bt$	$\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$
11	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
12	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
13	$\frac{\sin bt - bt\cos bt}{2b^3}$	$\frac{1}{(s^2+b^2)^2}$
14	$\frac{t \sin bt}{2b}$	$\frac{s}{(s^2+b^2)^2}$

Tablo 8.1

8.2 Laplace Dönüşümü ile Çözüm

A. Yöntem

Şimdi Laplace dönüşümünün sabit katsayılı, n. basamaktan

$$a_0\frac{d^nY}{dt^n}+a_1\frac{d^{(n-1)}Y}{dt^{(n-1)}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dY}{dt}+a_nY=B(t) \tag{8.33}$$

diferansiyel denklemi ve

$$Y(0)=c_0,\ Y'(0)=c_1,\ \ldots,Y^{(n-1}(0)=c_{n-1} \tag{8.34}$$

başlangıç şartlarından oluşan başlangıç değer probleminin çözümüne nasıl uygulanacağını göreceğiz. 4. Bölüm'deki Teorem 4.1 bu problemin bir tek çözümü olduğu konusunda bize garanti veriyor.

Şimdi (8.33) denkleminin iki yanının da Laplace dönüşümünü alalım. Teorem 8.2'den

$$a_0\mathcal{L}\left\{\frac{d^nY}{dt^n}\right\}+a_1\mathcal{L}\left\{\frac{d^{(n-1)}Y}{dt^{(n-1)}}\right\}+\ldots+$$

$$a_{n-1}\mathcal{L}\left\{\frac{dY}{dt}\right\}+a_n\mathcal{L}\left\{Y\right\}=\mathcal{L}\{B(t)\} \tag{8.35}$$

elde edilir. (8.35)'in sol tarafındaki

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^nY}{dt^n}\right\},\ \mathcal{L}\left\{\frac{d^{(n-1)}Y}{dt^{(n-1)}}\right\},\ \ldots,\ \mathcal{L}\left\{\frac{dY}{dt}\right\}$$

ifadelerine bu sefer Teorem 8.4'ü uygularız. (8.34)'deki başlangıç şartlarını da kullanarak

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{d^nY}{dt^n}\right\}&=s^n\mathcal{L}\left\{Y(t)\right\}-s^{n-1}Y(0)-\ldots-Y^{(n-1)}(0)\\&=s^n\mathcal{L}\left\{Y(t)\right\}-c_0s^{n-1}-c_1s^{n-2}-\ldots-c_{n-1},\\\mathcal{L}\left\{\frac{d^{n-1}Y}{dt^{n-1}}\right\}&=s^{n-1}\mathcal{L}\left\{Y(t)\right\}-s^{n-2}Y(0)-\ldots-Y^{(n-2)}(0)\end{aligned}$$

$$= s^{n-1}\mathcal{L}\{Y(t)\} - c_0 s^{n-2} - c_1 s^{n-3} - \ldots - c_{n-2},$$

$$\ldots\ldots$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dY}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\{Y(t)\} - Y(0) = s\mathcal{L}\{Y(t)\} - c_0$$

elde edilir. Böylece $\mathcal{L}\{Y(t)\} = y(s)$ ve $\mathcal{L}\{B(t)\} = b(s)$ diyerek (8.35) denklemi

$$[a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n]\, y(s) - c_0[a_0 s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1}] -$$

$$c_1[a_0 s^{n-2} + a_1 s^{n-3} + \ldots + a_{n-2}] - \ldots - c_{n-2}[a_0 s + a_1] - c_{n-1}a_0 = b(s)$$

haline getirilir.

B, t'nin bilinen bir fonksiyonu olduğundan, Laplace dönüşümünün varlığını ve hesaplanabileceğini varsayarsak, b de s'nin bilinen bir fonksiyonu olur. Böylece (8.36) denklemi $y(s)$ "bilinmeyeni" cinsinden cebirsel bir denklem olur. Şimdi (8.36) denklemini çözerek $y(s)$'yi bulacağız. $y(s)$ bir kere bulunduktan sonra, Laplace dönüşümlerini kullanarak verilen başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\}$$

olarak bulunur.

Bu yöntemi şöyle özetleriz:

(a) (8.33) diferansiyel denkleminin iki yanının da Laplace dönüşümünü al. (8.34)'deki başlangıç şartlarını kullanarak Teorem 8.4'ü uygula. "$y(s)$" cinsinden (8.36) cebirsel denklemini elde etmek üzere tarafları eşitle.

(b) Böylece elde edilen (8.36) cebirsel denklemini çözerek $y(s)$'yi bul.

(c) $y(s)$'yi bulduktan sonra, başlangıç değer probleminin $Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\}$ çözümünü elde etmek için dönüşümler tablosunu kullan.

B. Örnekler

Örnek 8.22.

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} - 2Y = e^{5t} \\ Y(0) = 3 \end{cases} \qquad (8.37-38)$$

başlangıç değer probleminin çözünüz.

Adım (a) (8.37) diferansiyel denkleminin iki yanının da Laplace dönüşümünü alırız:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dY}{dt}\right\} - 2\mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{e^{5t}\}. \tag{8.39}$$

Teorem 8.3'ü veya $n = 1$ için Teorem 8.4'ü kullanır ve $\mathcal{L}\{Y(t)\}$'yi $y(s)$ ile gösterirsek, $\mathcal{L}\left\{\frac{dY}{dt}\right\}$'yi $y(s)$ ve $Y(0)$ cinsinden şöyle bulabiliriz:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dY}{dt}\right\} = sy(s) - Y(0)$$

(8.38)'deki başlangıç şartlarını uygularsak buradan,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dY}{dt}\right\} = sy(s) - 3$$

bulunur.

Bunu kullanınca (8.39) denkleminin sol tarafı $s\,y(s) - 3 - 2y(s)$ olur. Tablo 8.1'in 2. satırından

$$\mathcal{L}\left\{e^{5t}\right\} = \frac{1}{s-5}$$

olacağından (8.39) denklemi $y(s)$ cinsinden

$$[s-2]y(s) - 3 = \frac{1}{s-5} \tag{8.40}$$

cebirsel denklemi haline gelir.

Adım (b) (8.40) denkleminden $y(s)$'yi çözersek

$$[s-2]y(s) = \frac{3s-14}{s-5} \;\Rightarrow\; y(s) = \frac{3s-14}{(s-2)(s-5)}$$

bulunur.

Adım (c) Şimdi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-14}{(s-2)(s-5)}\right\}$$

ters dönüşümünü bulmalıyız. Basit kesirlere ayırma uygularsak,

$$\frac{3s-14}{(s-2)(s-5)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-5}$$

ve böylece $3s-14 = A(s-5)+B(s-2)$ olur ki $A = \frac{8}{3}$ ve $B = \frac{1}{3}$ elde edilir. Buradan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-14}{(s-2)(s-5)}\right\} = \frac{8}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\}$$

bulunur. Tablo 8.1'in 2. satırını kullanırsak

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t} \qquad \text{ve} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} = e^{5t}$$

olduğunu görürüz. Böylece verilen başlangıç değer probleminin çözümü

$$Y(t) = \frac{8}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{5t}$$

olur.

Örnek 8.23.

$$\begin{cases} \frac{d^2Y}{dt^2} - 2\frac{dY}{dt} - 8Y = 0 \\ Y(0) = 3 \\ Y'(0) = 6 \end{cases} \qquad (8.41-42-43)$$

başlangıç değer probleminin çözünüz.

Adım (a) (8.41) diferansiyel denkleminin iki yanının da Laplace dönüşümünü alarak

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2Y}{dt^2}\right\} - 2\mathcal{L}\left\{\frac{dY}{dt}\right\} - 8\mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{0\} \qquad (8.44)$$

buluruz. $\mathcal{L}\{0\} = 0$ olduğundan (8.44) denkleminin sağ tarafı sadece 0'dır. Teorem 8.4'ü kullanır ve $\mathcal{L}\{Y(t)\}$'yi $y(s)$ ile gösterirsek, $\mathcal{L}\left\{\frac{dY^2}{dt^2}\right\}$ ve $\mathcal{L}\left\{\frac{dY}{dt}\right\}$'yi $y(s)$, $Y(0)$ ve $Y'(0)$ cinsinden şöyle bulabiliriz:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{\frac{dY^2}{dt^2}\right\} = s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) \\ \mathcal{L}\left\{\frac{dY}{dt}\right\} = sy(s) - Y(0) \end{cases}$$

(8.42) ve (8.43)'deki başlangıç şartlarını uygularsak buradan,

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{\frac{dY^2}{dt^2}\right\} = s^2y(s) - 3s - 6 \\ \mathcal{L}\left\{\frac{dY}{dt}\right\} = sy(s) - 3 \end{cases}$$

bulunur ve bunlarla (8.44) denklemi

$$s^2y(s) - 3s - 6 - 2sy(s) + 6 - 8y(s) = 0 \text{ veya } [s^2 - 2s - 8]y(s) = 3s \quad (8.45)$$

haline gelir.

Adım (b) (8.45) denkleminden $y(s)$'yi çözeriz:

$$y(s) = \frac{3s}{(s-4)(s+2)}$$

Adım (c) Şimdi $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{(s-4)(s+2)}\right\}$ ters dönüşümünü bulmalıyız. Basit kesirlere ayırma uygularsak,

$$\frac{3s}{(s-4)(s+2)} = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s+2}$$

ve böylece $A = 2$, $B = 1$ elde edilir. Buradan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{(s-4)(s+2)}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

bulunur. Tablo 8.1'in 2. satırını kullanırsak

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} = e^{4t} \qquad \text{ve} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}$$

olduğunu görürüz. Böylece verilen başlangıç değer probleminin çözümü

$$Y(t) = 2e^{4t} + e^{-2t}$$

olur.

Örnek 8.24.

$$\begin{cases} \frac{d^2Y}{dt^2} + Y = e^{-2t}\sin t \\ Y(0) = 0 \\ Y'(0) = 0 \end{cases} \qquad (8.46-47-48)$$

başlangıç değer probleminin çözünüz.

Adım (a) (8.46) diferansiyel denkleminin iki yanının da Laplace dönüşümünü alarak

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2Y}{dt^2}\right\} + \mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{e^{-2t}\sin t\} \tag{8.49}$$

buluruz. Teorem 8.4'ü kullanır ve $\mathcal{L}\{Y(t)\}$'yi $y(s)$ ile gösterirsek,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dY^2}{dt^2}\right\}$$

ikinci türevini $y(s)$, $Y(0)$ ve $Y'(0)$ cinsinden şöyle bulabiliriz:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dY^2}{dt^2}\right\} = s^2y(s) - sY(0) - Y'(0)$$

(8.47) ve (8.48)'deki başlangıç şartlarını uygularsak buradan,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dY^2}{dt^2}\right\} = s^2y(s)$$

elde ederiz. Böylece (8.49)'un sol tarafı $s^2y(s) + y(s)$ olur. Tablo 8.1'in 11. satırından, (8.49) denkleminin sağ tarafı

$$\frac{1}{(s+2)^2+1}$$

olur. Bunu kullanınca (8.46) denklemi $y(s)$ cinsinden

$$(s^2+1)y(s) = \frac{1}{(s+2)^2+1} \tag{8.50}$$

cebirsel denklemi haline gelir.

Adım (b) (8.50) denkleminden $y(s)$'yi çözeriz:

$$y(s) = \frac{3s}{(s^2+1)[(s+2)^2+1]}$$

Adım (c) Şimdi $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)[(s+2)^2+1]}\right\}$ ters dönüşümünü bulmalıyız. Basit kesirlere ayırma yönteminin yanı sıra konvolüsyon da kullanabiliriz. İki yöntemi de uygulayacağız.

(i) Basit Kesirlere Ayırma Yönteminin Kullanılışı: Şimdi

$$\frac{1}{(s^2+1)[(s+2)^2+1]} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4s+5}$$

yazarız. Buradan

$$1 = (As+B)(s^2+4s+5) + (Cs+D)(s^2+1)$$

$$= (A+C)s^3 + (4A+B+D)s^2 + (5A+4B+C)s + (5B+D)$$

ve böylece

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 4A+B+D=0 \\ 5A+4B+C=0 \\ 5B+D=1 \end{cases}$$

bulunur ki buradan $A=-\frac{1}{8}$, $B=\frac{1}{8}$, $C=\frac{1}{8}$, $D=\frac{3}{8}$ ve böylece

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+5)}\right\} = -\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} +$$

$$\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\} + \frac{3}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+5}\right\} \tag{8.51}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\} + \frac{3}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+5}\right\} \tag{8.52}$$

ters dönüşümlerini bulmak için

$$\frac{s}{s^2+4s+5} = \frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{2}{(s+2)^2+1}$$

yazarız. Böylece (8.52) ifadesi

$$\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right\} + \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\}$$

haline gelir ki (8.51) artık

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+5)}\right\} = -\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} +$$

$$\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right\} + \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\}$$

olur. Şimdi Tablo 8.1'in 4., 3., 12. ve 11. satırlarını sırayla kullanırsak, verilen başlangıç değer probleminin çözümünü

$$Y(t) = \frac{1}{8}\left(-\cos t + \sin t + e^{-2t}\cos t + e^{-2t}\sin t\right)$$

veya

$$Y(t) = \frac{1}{8}(\sin t - \cos t) + \frac{e^{-2t}}{8}(\sin t + \cos t)$$

olarak buluruz.

(ii) Konvolüsyon Teoreminin Kullanılışı: Şimdi

$$\frac{1}{(s^2+1)[(s+2)^2+1]} = f(s)\cdot g(s)$$

,

$$f(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{ve} \quad g(s) = \frac{1}{(s+2)^2+1}$$

olarak düşünelim. Tablo 8.1'in 3. satırından

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$$

ve

$$G(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\} = e^{-2t}\sin t$$

olarak bulunur. Böylece Teorem 8.9'dan, (8.31) veya (8.32)'yi kullanarak sırayla

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+5)}\right\} = F(t) * G(t)$$

$$= \int_0^t \sin \tau . e^{-2(t-\tau)} \sin(t-\tau) d\tau$$

veya

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+5)}\right\} = G(t) * F(t) = \int_0^t \sin \tau . e^{-2\tau} \sin(t-\tau) d\tau$$

bulunur. Bu integrallerden ikincisi biraz daha basittir,

$$(\sin t) \int_0^t e^{-2\tau} \sin \tau \cos \tau d\tau - (\cos t) \int_0^t e^{-2\tau} \sin^2 \tau d\tau$$

haline getirilebilir. Buradaki trigonometrik fonksiyonlara yarım açı formüllerini uygularsak

$$\frac{\sin t}{2} \int_0^t e^{-2\tau} \sin 2\tau d\tau - \frac{\cos t}{2} \int_0^t e^{-2\tau} d\tau + \frac{\cos t}{2} \int_0^t e^{-2\tau} \cos 2\tau d\tau$$

olur. Buradaki integralleri hesaplarsak

$$-\sin t \left[\frac{e^{-2\tau}}{8}(\sin 2\tau + \cos 2\tau)\right]_0^t + \frac{\cos t}{4}\left[e^{-2\tau}\right]_0^t +$$

$$\cos t \left[\frac{e^{-2\tau}}{8}(\sin 2\tau - \cos 2\tau)\right]_0^t$$

$$= -\frac{e^{-2t}}{8}(\sin t \sin 2t + \sin t \cos 2t) + \frac{\sin t}{8} + \frac{e^{-2t}\cos t}{4} - \frac{\cos t}{4}$$

$$+\frac{e^{-2t}}{8}(\cos t \sin 2t - \cos t \cos 2t) + \frac{\cos t}{8}$$

elde edilir. Bunu basitleştirmek için yarım açı formüllerini yeniden kullanırsak yukarıda basit kesirlere ayırma yöntemi ile elde edilen (8.53) sonucunu buluruz:

$$Y(t) = \frac{1}{8}(\sin t - \cos t) + \frac{e^{-2t}}{8}(\sin t + \cos t)$$

Örnek 8.25.

$$\begin{cases} \frac{d^3Y}{dt^3} + 4\frac{d^2Y}{dt^2} + 5\frac{dY}{dt} + 2Y = 10\cos t \\ Y(0) = 0 \\ Y'(0) = 0 \\ Y''(0) = 3 \end{cases} \qquad (8.54-55-56-57)$$

başlangıç değer probleminin çözünüz.

Adım (a) (8.54) diferansiyel denkleminin iki yanının da Laplace dönüşümünü alarak

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3Y}{dt^3}\right\} + 4\mathcal{L}\left\{\frac{d^2Y}{dt^2}\right\} + 5\mathcal{L}\left\{\frac{d^2Y}{dt^2}\right\} + 2\mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{10\cos t\} \quad (8.58)$$

elde ederiz. Teorem 8.4'ü kullanır ve $\mathcal{L}\{Y(t)\}$'yi $y(s)$ ile gösterirsek,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dY^3}{dt^3}\right\}, \quad \mathcal{L}\left\{\frac{dY^2}{dt^2}\right\} \quad \text{ve} \quad \mathcal{L}\left\{\frac{dY}{dt}\right\}$$

türevlerini $y(s)$, $Y(0)$, $Y'(0)$ ve $Y''(0)$ cinsinden şöyle bulabiliriz:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dY^3}{dt^3}\right\} = s^3y(s) - s^2Y(0) - sY'(0) - Y''(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dY^2}{dt^2}\right\} = s^2y(s) - sY(0) - Y'(0), \quad \mathcal{L}\left\{\frac{dY}{dt}\right\} = sy(s) - Y(0)$$

(8.57), (8.56) ve (8.57)'deki başlangıç şartlarını uygularsak buradan,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dY^3}{dt^3}\right\} = s^3y(s) - 3, \quad \mathcal{L}\left\{\frac{dY^2}{dt^2}\right\} = s^2y(s), \quad \mathcal{L}\left\{\frac{dY}{dt}\right\} = sy(s)$$

buluruz. Böylece (8.58)'in sol tarafı

$$s^3y(s) - 3 + 4s^2y(s) + 5sy(s) + 2y(s) \;\Rightarrow\; [s^3 + 4s^2 + 5s + 2]y(s) - 3$$

olur. Tablo 8.1'in 4.satırından,

$$10\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{10s}{s^2+1}$$

bulunur ki, (8.58) denklemi $y(s)$ cinsinden

$$[s^3 + 4s^2 + 5s + 2]y(s) - 3 = \frac{10s}{s^2+1} \quad (8.58)$$

cebirsel denklemine dönüşür.

Adım (b) (8.59) denkleminden $y(s)$'yi çözeriz:

$$y(s) = \frac{3s^2 + 10s + 3}{(s^2 + 1)(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)}$$

Adım (c) Şimdi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2 + 10s + 3}{(s^2 + 1)(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)}\right\}$$

ters dönüşümünü bulmalıyız. Sağ tarafın kalabalıklığına bakıp da telaşa kapılmayalım. Yine basit kesirlere ayırma yöntemini kullanarak $y(s)$'yi tablodan yararlanabileceğimiz bir şekle sokabiliriz. Ancak bu durumda hesaplar biraz uzayacak.

$$\frac{3s^2 + 10s + 3}{(s^2 + 1)(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)} = \frac{3s^2 + 10s + 3}{(s^2 + 1)(s + 1)^2(s + 2)}$$

$$= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{Ds + E}{s^2 + 1} \tag{8.60}$$

yazarak devam edelim. Buradan

$$3s^2 + 10s + 3 = A(s^2 + 1)(s + 1)^2 + B(s + 2)(s^2 + 1)(s + 1)$$

$$+C(s + 2)(s^2 + 1) + (Ds + E)(s + 2)(s + 1)^2 \tag{8.61}$$

veya

$$3s^2 + 10s + 3 = (A + B + D)s^4 + (2A + 3B + C + 4D + E)s^3 +$$

$$(2A+3B+2C+5D+4E)s^2+(2A+3B+C+2D+5E)s+A+2B+2C+2E$$

elde edilir. Bu eşitliğin bir özdeşlik olmasını istediğimizden

$$\begin{cases} A + B + D = 0 \\ 2A + 3B + C + 4D + E = 0 \\ 2A + 3B + 2C + 5D + 4E = 0 \\ 2A + 3B + C + 2D + 5E = 0 \\ A + 2B + 2C + 2E = 0 \end{cases} \tag{8.62}$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemini doğrudan çözecek yerde, her $s > 0$ için doğru olan (8.61) özdeşliğini parantezlerden bazılarını sıfır yapan özel s değerleri için hesaplayarak bilinmeyenlerden bazılarını hemen bulabiliriz. Mesela $s = -1$ koyarak $C = -2$, $s = -2$ koyarak $A = -1$, bunları (8.62)'de koyarak $B = 2$, $D = -1$, ve $E = 2$ bulmamız kolay olur. A, B, C, D ve E'nin bu değerlerini (8.60)'ta yerlerine yazarak

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2+10s+3}{(s^2+1)(s^3+4s^2+5s+2)}\right\} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$-2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

olduğunu görürüz. Şimdi Tablo 8.1'in 2., 2., 8., 4. ve 3. satırlarını sırayla kullanırsak, verilen başlangıç değer probleminin çözümünü

$$Y(t) = e^{-2t} + e^{-t} - 2te^{-t} - \cos t + 2\sin t$$

olarak buluruz.

Örnek 8.26.

$$\begin{cases} \frac{d^2Y}{dt^2} + 2\frac{dY}{dt} + 5Y = H(t) \\ H(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi, \\ 0, & t > \pi, \end{cases} \\ Y(0) = 0 \\ Y'(0) = 0 \end{cases} \qquad (8.63-64-65-66)$$

başlangıç değer probleminin çözünüz.

Adım (a) (8.63) diferansiyel denkleminin iki yanının da Laplace dönüşümünü alarak

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2Y}{dt^2}\right\} + 2\mathcal{L}\left\{\frac{d^2Y}{dt^2}\right\} + 5\mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{H(t)t\} \qquad (8.67)$$

buluruz. Teorem 8.4'ü kullanır ve $\mathcal{L}\{Y(t)\}$'yi $y(s)$ ile gösterir ve daha önceki örneklerde olduğu gibi (8.65) ve (8.66)'daki başlangıç şartlarını uygularsak (8.67)'nin sol tarafı $[s^2+2s+5]y(s)$ haline gelir. Laplace dönüşümünün tanımından sağ taraf

$$\mathcal{L}\{H(t)t\} = \int_0^\infty e^{-st}H(t)dt = \int_0^\pi e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\pi = \frac{1-e^{-\pi s}}{s}$$

olarak bulunur. Böylece (8.67) denklemi

$$[s^2+2s+5]y(s) = \frac{1-e^{-\pi s}}{s} \tag{8.68}$$

haline gelir.

Adım (b) (8.68) denkleminden $y(s)$'yi çözeriz:

$$y(s) = \frac{1-e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+5)}$$

Adım (c)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1-e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+5)}\right\}$$

ters dönüşümünü bulmalıyız. Şimdi bunu

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+2s+5)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+5)}\right\}$$

olarak yeniden yazalım ve birincisini hesaplamak için basit kesirlere ayırma yöntemini kullanalım.

$$\frac{1}{s(s^2+2s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+5}$$

yazarsak $A = \frac{1}{5}$, $B = -\frac{1}{5}$ ve $C = -\frac{2}{5}$ çıkar. A, B ve C'nin bu değerlerini yerlerine yazarak ve Tablo 8.1'in 1., 12. ve 11. satırlarını sırayla kullanarak,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+2s+5)}\right\} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2+4}\right)$$

$$= \frac{1}{10}\left(2\frac{1}{s} - 2\frac{s+1}{(s+1)^2+4} - \frac{2}{(s+1)^2+4}\right)$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{10} e^{-t} \sin 2t$$

buluruz. Şimdi

$$f(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+5)} \quad \text{ve} \quad F(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{10} e^{-t} \sin 2t$$

yazarak

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$$

elde ederiz. Bundan sonra

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+5)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s} f(s)\right\}$$

ters dönüşümünü hesaplamalıyız. Teorem 8.6'dan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s} f(s)\right\} = G(t), \quad G(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \pi, \\ F(t-\pi), & t > \pi, \end{cases}$$

buluruz. Böylece

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+5)}\right\}$$

$$= \begin{cases} 0, \quad 0 < t < \pi, \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^{-(t-\pi)} \cos 2(t-\pi) - \frac{1}{10} e^{-(t-\pi)} \sin 2(t-\pi), \quad t > \pi, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, \quad 0 < t < \pi, \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^{-(t-\pi)} \cos 2t - \frac{1}{10} e^{-(t-\pi)} \sin 2t, \quad t > \pi, \end{cases}$$

elde edilir. O halde verilen başlangıç değer probleminin çözümü,

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1-e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+5)}\right\} = F(t) - G(t)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{10}\left[2 - e^{-t}\left(2\cos 2t + \sin 2t\right)\right], \quad 0 < t < \pi, \\ \frac{e^{\pi}-1}{10} e^{-t}\left(2\cos 2t + \sin 2t\right), \quad t > \pi, \end{cases}$$

olarak bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1.'den 10.'ya kadar başlangıç değer problemlerini çözmek için Laplace dönüşümleri kullanınız.

1. $\begin{cases} \frac{dY}{dt} - Y = e^{3t} \\ Y(0) = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{dY}{dt} + Y = 2\sin t \\ Y(0) = -1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{d^2Y}{dt^2} - 5\frac{dY}{dt} + 6Y = 0 \\ Y(0) = 1 \\ Y'(0) = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{dY}{dt} - 12Y = 0 \\ Y(0) = 4 \\ Y'(0) = -1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{d^2Y}{dt^2} - \frac{dY}{dt} - 2Y = 18e^{-t}\sin 3t \\ Y(0) = 0 \\ Y'(0) = 3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \frac{d^2Y}{dt^2} + 2\frac{dY}{dt} + Y = te^{-2t} \\ Y(0) = 1 \\ Y'(0) = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{d^3Y}{dt^3} - 5\frac{d^2Y}{dt^2} + 7\frac{dY}{dt} - 3Y = \sin 20t \\ Y(0) = 0 \\ Y'(0) = 0 \\ Y''(0) = -2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \frac{d^3Y}{dt^3} - 6\frac{d^2Y}{dt^2} + 11\frac{dY}{dt} - 6Y = te^{-4t} \\ Y(0) = 1 \\ Y'(0) = 0 \\ Y''(0) = -1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \frac{d^2Y}{dt^2} - 3\frac{dY}{dt} + 2Y = H(t) \\ H(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 4 \\ 0, & t > 4 \end{cases} \\ Y(0) = 0 \\ Y'(0) = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \frac{d^2Y}{dt^2} + 4\frac{dY}{dt} + 5Y = H(t) \\ H(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ 0, & t > \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ Y(0) = 0 \\ Y'(0) = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \frac{dX}{dt} + Y = 3e^{2t} \\ \frac{dY}{dt} + X = 0 \end{cases}$

sisteminin

$$X(0) = 2, \qquad y(0) = 0$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü elde etmek için Laplace dönüşümlerini kullanınız.

[*Kullanılacak Yöntemin Ana Hatları:*

$\mathcal{L}\{X(t)\} = x(s)$ ve $\mathcal{L}\{Y(t)\} = y(s)$ olsun. Sistemin her denklemi için şöyle yap: Denklemin iki yanının Laplace dönüşümünü al, Teorem 8.3'ü ve başlangıç şartlarını kullan. sonuçları eşitleyerek $x(s)$, $y(s)$ cinsinden cebirsel bir denklem sistemi elde et. Sonra cebirsel sistemden bu bilinmeyenleri çöz. Son olarak $x(s)$ ve $y(s)$'nin bulunan ifadelerinden ve tablodan yararlanarak $X(t)$ ile $Y(t)$'yi elde et.]

12. $\begin{cases} \frac{dX}{dt} - 2Y = 0 \\ \frac{dY}{dt} + X - 3Y = 2 \end{cases}$

sisteminin $X(0) = 3$, $Y(0) = 0$ başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü elde etmek için Laplace dönüşümlerini kullanınız. [*Uyarı.* 11. problemde anlatılan yolu izleyiniz.]

OKUNMASI TAVSİYE EDİLEN KİTAPLAR

Agnew (1)	Hildebrand (22)
Churchill (11)	Widder (56)
Holl, Maple ve Vinograde (21)	Wylie (57)